第一篇　电磁场论与电动力学

关于电磁场及其与带电系统相互作用的理论称为电动力学.本篇讲解经典电动力学.它是由对电磁现象的实验定律作微分分析得到的.即只要认为这些定律适用于每一时空点,就可导出这一理论.这一理论是完备的,它有一套完备方程组,可计算电磁现象的每一细节.这一理论是正确的,在它适用的范围内,它导出的每一细节都与实际一致.这一理论是基本的,它不能由更基本的经典理论导出.这一理论是重要的,它所表达的规律已成为现代技术和现代文明的重要组成部分.

经典电动力学的建立过程很自然,好像就是从实验定律导出的.其实,像所有基本理论一样,它的建立也基于假定,即设所依据的那些实验定律都适用于每一时空点.严格讲来,这一假定并不正确.在很小的时空范围内会出现量子现象,使推导所依据的那些实验定律不再在经典物理所表达的那种意义上成立,需要修改或重新诠释.这使经典电动力学只适用于量子现象不重要的范围.在对实验定律作微分分析中所涉及的时空点,实际只能是宏观看很小,微观看很大的时空区域.粗略地说,这也就是上段陈述中所指的经典电动力学的适用范围.在这一范围以外,在深入微观世界,从而量子现象变得重要的条件下,经典电动力学不再适用,而必须代之以量子电动力学.量子电动力学是量子场论的主要内容,是迄今最完美的物理理论,尚未发现它与实际的任何矛盾.即尚未发现它适用的界限.有趣的是,量子电动力学是将经典电动力学按一定手续量子化而得到的.即它仍以建立在每一时空点上的经典电动力学为基础,对它实行量子化手续.学习经典电动力学的首要目的自然是掌握宏观电磁规律,或用于技术或用于对自然界的了解.除此之处,它也是学好量子电动力学和量子场论的前提.

电动力学具有规范不变性.正是在它的启发下,和在与它的对比中,发展了现代的规范场论.在此基础上,已建立了电磁作用与弱作用的统一理论.这是20世纪后期物理理论最重大的进展.人们相信,规范场论还会在进一步建立各种相互作用的统一理论中,在实现对自然界完全统一认识的统一场论的梦想中,发挥重要作用.学好经典电动力学对参与这一重大理论发展的进程也是重要的.

第一章　电动力学的实验基础与基本方程

带电力学系统是电磁场的源;电磁场则作用于带电力学系统,影响它的运动.电磁场与带电力学系统组成的总系统的动力学称为电动力学,它就是电磁场论的内容.经典电动力学的基本方程是由宏观电磁规律经微分分析得到的.虽然它研究电磁场的逐点传播,研究电磁场与带电力学系统的逐点作用,这里的点实际上是与宏观运动范围相比其大小可以忽略的空间区域,本身仍是宏观的.经典电动力学乃是宏观电磁规律的微分数学模型.

§1.1　电荷与静电力,库仑①定律,介电常数,电场强度与电位移矢量

用 q 表示物体所荷电量,称为它的电荷.在标准单位制中电荷的单位为库仑,它是一安培②电流一秒钟内通过垂直于电流方向的横截面的电量.经典电动力学设电荷 q 可取任何实数.这个概念是可操作的.首先可由是否使验电器的两片锡箔张开判定一物体是否带电.设一导体带电荷 q,可制一成分、结构和形状均与它相同却不带电的导体.将此二导体接触,达到平衡后再将它们分开.电荷 q 应平分在此二导体上,每个导体各带 $\frac{q}{2}$ 电荷.类似方法可任意等分一电荷.另一方面,将两物体合并,总电荷即为此二物体电荷的代数和.这类操作原则上可使物体的电荷 q 为任意有理数.任意实数恒可由有理数无限逼近,设电荷 q 可取任何实数便是合理的事.自然,现已知电荷不能无限细分,它的绝对值有一最小单位

$$e = 1.60217733 \times 10^{-19}\mathrm{C}, \tag{1.1}$$

称为基本电荷.任何电荷的绝对值 $|q|$ 只能是此基本电荷的整数倍,这就是电荷的原子性.不过对宏观现象而言,这个基本电荷足够小,可视为无穷小.在表达宏观电磁规律的经典电动力学中仍设 q 可取任意实数.由此推出的结论与宏观电磁现象在观测误差范围内仍然完全一致.

在荷电环境中,荷电质点会受到电作用力.设质点电荷很小,不致改变环境的

---

① Coulomb,作为电量单位时记作 C.

② Ampère,作为电流强度单位时记作 A.

电荷分布，则它所受电力 $\boldsymbol{F}$ 称为静电力，与它的电荷 q 成正比. 从静电力中除去电荷 q，得一矢量

$$\mathscr{E} = \boldsymbol{F}/q, \tag{1.2}$$

它已与荷电质点无关，只表示荷电环境对该点的影响. 称荷电环境对空间各点的影响为电场，此式定义的矢量$\mathscr{E}$表示的便是该点电场的方向和强弱，称为该点的电场强度矢量. 这一概念可以推广. 设空间各点的电场恒可由一电场强度矢量表示，$\boldsymbol{r}$ 处的电场强度为$\mathscr{E}(\boldsymbol{r})$，电荷为 q 的质点在该处受电力

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q\mathscr{E}(\boldsymbol{r}). \tag{1.3}$$

整个空间的电场便由函数$\mathscr{E}(\boldsymbol{r})$表示，没有电场的特殊情形由$\mathscr{E}(\boldsymbol{r})=0$ 表示.

考虑两个荷电质点，点 1 荷电 q_1，点 2 荷电 q_2. 点 2 对点 1 的静电力与 q_1 成正比，点 1 对点 2 的静电力与 q_2 成正比. 然而按牛顿第三定律，这两个力应大小相等，方向相反，作用在一点直线上. 可见点 2 对点 1 的静电力也应与 q_2 成正比，点 1 对点 2 的静电力也应与 q_1 成正比，二者都正比于积 q_1q_2. 用 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 表示质点 1 和 2 的径矢量，$r=|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|$为它们之间的距离，$\boldsymbol{\xi}_1=\dfrac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{r}$表示由质点 2 指向质点 1 的单位矢量，$\boldsymbol{\xi}_2=\dfrac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{r}$表示由质点 1 指向质点 2 的单位矢量. 两质点中第 i 质点受到的另一质点的静电力一般地可表为

$$\boldsymbol{F}_i = q_1q_2f(r)\boldsymbol{\xi}_i, \quad i = 1,2. \tag{1.4}$$

最初由库仑进行的一系列实验确定了函数

$$f(r) = \frac{K}{r^2}, \tag{1.5}$$

K 为一正数. K 的符号表明，若 q_1 和 q_2 同号，两点电荷间为斥力；若 q_1 和 q_2 反号则两点电荷间为引力. 这就是通常所说的电荷同性相斥，异性相引. (1.5)还表明点电荷间的静电力与质点间的万有引力类似，为平方反比力. 通常令

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon}, \tag{1.6}$$

ϵ 称为介电常数. 在不同介质中 ϵ 取值不同. 在标准单位制中真空的介电常数为

$$\epsilon = \epsilon_0 = 8.854187817\times10^{-12}\mathrm{F/m}, \tag{1.7}$$

单位读作法拉每米. 将(1.6)代入(1.5)再代入(1.4)，得两点电荷间静电力的代数值

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_1q_2}{r^2}, \tag{1.8}$$

此值为正表示斥力，此值为负则表示引力. 这便是点电荷间静电力的库仑定律. 由于此定律的基本重要性，不少人都对它作过仔细的实验研究. 着重探测的是(1.8)右边分母上 r 的幂次相对于 2 的偏离. 到 20 世纪 70 年代初，已知此偏离不超过 6

$\times 10^{-16}$,可以说没有发现任何超出实验误差范围的偏离.库仑定律(1.8)可视为精确定律.

比较(1.8)和(1.3)知,点电荷 q 在以它为原点的径矢量为 $\boldsymbol{r}$ 处产生的电场强度为

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}\boldsymbol{r}_0, \tag{1.9}$$

$\boldsymbol{r}_0 \equiv \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 为径向单位矢量.如果电荷 q 不是摆在真空中,而是摆在某种气体、液体或固体中,式中的介电常数 ϵ 将不同于它的真空值(1.7).这是因为不同介质在同一电荷的影响下会产生不同的极化.不同原子和分子内,以及不同原子和分子间,正负电荷的不同极化导致不同的次级电荷分布.它们和诱导出这种极化的电荷 q 一起产生电场(1.9).可见不同的介质有不同的介电常数 ϵ.介电常数反映的是介质的性质,而不是诱导出整个电场的电荷 q 的性质.这提示人们引进电位移矢量

$$\mathscr{D} = \epsilon\mathscr{E}. \tag{1.10}$$

一个点电荷 q 产生的电位移矢量

$$\mathscr{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{r}_0 \tag{1.11}$$

已与介电常数 ϵ 无关,单纯反映点电荷 q 的性质.

在各向异性的介质中,点电荷周围的电场分布也应是各向异性的,场强$\mathscr{E}$不一定沿径向.为表示这种各向异性,(1.10)中的介电常数 ϵ 应改为介电张量$\boldsymbol{\epsilon}$,(1.9)中的$\frac{1}{\epsilon} = \epsilon^{-1}$则应改为介电张量$\boldsymbol{\epsilon}$ 的逆张量$\boldsymbol{\epsilon}^{-1}$.各向异性介质中的电动力学是专门问题,本书不予深究.除非特别声明,本书只考虑各向同性介质中的电动力学,特别着重讨论真空中的电动力学,介电常数 ϵ 为一正数.

电场的另一重要性质是可叠加性.仍考虑荷电环境对点电荷 q 的作用.将环境中的带电体设想为许多小部分组成,其中每一部分的大小与整个环境相比可忽略不计,从而都可当作点电荷.实验表明点电荷 q 受到的静电力为组成环境的那些点电荷对它的作用力的矢量和.再由(1.2)和(1.10)知,空间一点的电场强度$\mathscr{E}(\boldsymbol{r})$和电位移矢量$\mathscr{D}(\boldsymbol{r})$也都分别是带电环境各部分在该点产生的电场强度和电位移矢量的矢量和.

计算一个点电荷 q 产生的电位移矢量在一个封闭曲面 s 上的面积分

$$\Phi_s = \oint_s \mathscr{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{1.12}$$

称为它在此面上的电通量.面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 是一微分矢量,其大小 $\mathrm{d}s$ 为面元面积,方向为面元法向.封闭曲面法向恒取成向外.以点电荷作径矢量 $\boldsymbol{r}$ 的原点,按(1.11)

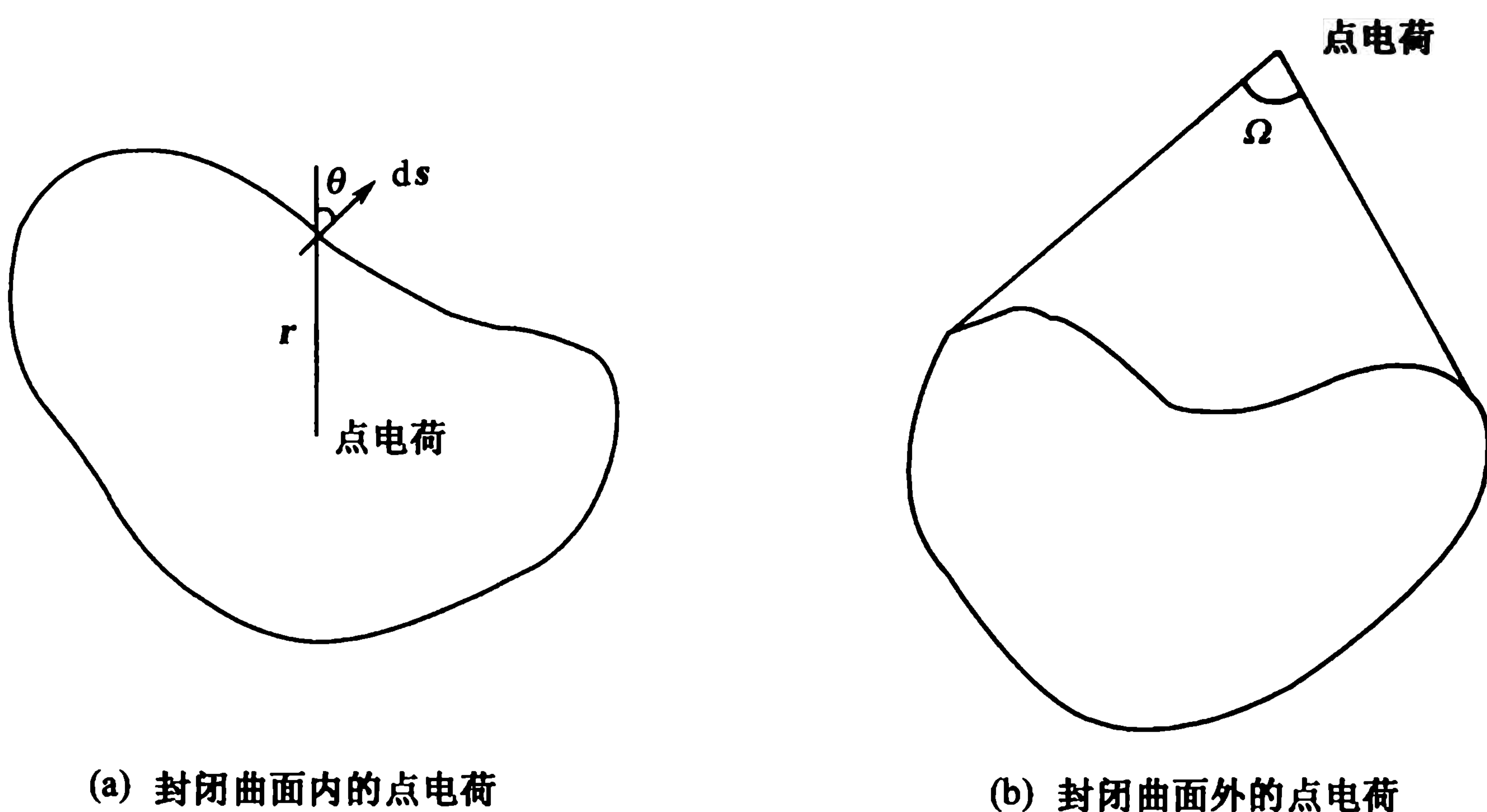
$$\mathscr{D}\cdot \mathrm{d}s = \frac{q}{4\pi}\frac{\cos\theta \mathrm{d}s}{r^2}, \tag{1.13}$$

θ 为面元法向与径向的夹角. 如图 1-1(a),设点电荷在曲面包围的区域中,在每一方向上径矢量与曲面有且只有一个交点,$\theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. 由图中可看出 θ 也是面元与垂直于径向的面的夹角,$\cos\theta \mathrm{d}s$ 为面元在该面上的投影. 可见

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\cos\theta \mathrm{d}s}{r^2}$$

为面元对原点张的立体角. 将它代入上式再代回(1.12),由全方位立体角 $\oint \mathrm{d}\Omega = 4\pi$ 知,

$$\oint_s \mathscr{D}\cdot \mathrm{d}s = \frac{q}{4\pi}\oint \mathrm{d}\Omega = q.$$



(a) 封闭曲面内的点电荷　　(b) 封闭曲面外的点电荷

图 1-1　点电荷电场在封闭曲面上的积分

由电位移矢量的可叠加性进一步得封闭曲面内的全部电荷 Q 对曲面上电通量的总贡献为

$$\oint_s \mathscr{D}\cdot \mathrm{d}s = Q. \tag{1.14}$$

设点电荷在曲面包围的区域外,如图 1-1(b),在一给定方向上径矢量与曲面或者不相交,或者有两个交点,或者相切. (1.12)右边的积分只在径矢量与曲面相交或相切的方向上进行,(1.13)仍成立. 在径矢与曲面的切点处 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = 0$,因而对面积分(1.12)无贡献. 在径矢与曲面的两个交点中,与点电荷较远的交点处 $\theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta > 0$,面元 $\mathrm{d}s$ 对面积分(1.12)的贡献为

$$\mathscr{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{q}{4\pi}\mathrm{d}\Omega,$$

封闭曲面由这些远交点组成的部分对面积分(1.12)的总贡献为$\frac{q}{4\pi}\Omega$,Ω 为封闭曲面对点电荷 q 张的立体角.径矢与曲面的两个交点中,与点电荷相距较近的交点处 $\theta>\frac{\pi}{2}$,$\cos\theta<0$,面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 对面积分(1.12)的贡献为

$$\mathscr{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{q}{4\pi}\mathrm{d}\Omega,$$

封闭曲面由这些近交点组成的部分对面积分(1.12)的总贡献为 $-\frac{q}{4\pi}\Omega$.这两部分贡献恰相抵消,封闭曲面包围的区域以外的电荷对曲面上的电通量贡献为零.整个空间中的电荷产生的电位移矢量在任一封闭曲面上的电通量由(1.14)表示,它右边的 Q 表示封闭曲面包围的总电荷,此式称高斯[①]定理.从它的推导过程可看出,它源于库仑定律中的距离平方反比律,因而可视为库仑定律的积分形式.

§1.2 电流与磁力,安培定律,磁导率,磁感应强度与磁场强度,洛伦兹[②]力

人们对磁的认识是从磁石的天然磁性和地磁开始的.磁石可以吸铁,磁针可以指南,磁表现为对别物的作用和自身被作用的能力.开始时,人们注意到磁与电的相似.电有正、负极,磁有南、北极.且都是同极相斥,异极相引,斥力和引力还都表现出距离平方反比律.很快,人们注意到磁与电的本质差别.电的正负极可以分开,有只带正电或只带负电的物体.磁的南北极却不能分开,将磁针从中截断时,与南极相联的那一截断口处立即形成磁北极,与北极相联的那一截断口处立即形成磁南极.每一物体必同时有磁的两极.在对电现象有较深入的认识后,人们发现电流会使邻近的磁针偏转,磁石附近的通电导线也会受到力的作用.一个通电线圈宛如一条磁铁.至此,人们终于认识到电与磁的本质联系,磁性乃是电流引起的,天然磁石的磁性也是由其中分子内的电流引起的.当然按现代观点,分子电流不仅包括其中带电粒子(主要是电子)的空间移动,而且包括其中带电粒子的自旋电流(主要是电子自旋电流).在此基础上人们解释了全部磁现象.不过对磁性认识的这一曲折历史还是在电磁理论中留下了印迹.当然这只影响理论的表达方式,而不影响理论的实质内容.

设一物体中有电流分布,$\boldsymbol{r}$ 处的电流密度矢量为$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$.$\boldsymbol{j}$ 的方向为 $\boldsymbol{r}$ 处电流方

---

① K. F. Gauss.

② H. A. Lorentz.

向,大小为通过垂直于 $\boldsymbol{j}$ 的单位面积的电流强度,即单位时间内通过 $\boldsymbol{r}$ 处此单位面积的电量.将此物体放在磁环境中会受力.实验表明,在磁环境不变条件下,每点 $\boldsymbol{r}$ 处空间有一特殊方向,当该处电流沿此方向时即不受力,只当 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 偏离此方向时才受力,力的大小正比于 $|\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})|\sin\theta$,$\theta$ 为电流方向与此特殊方向的夹角.此外,力的方向垂直于此特殊方向和电流方向.这提示定义一沿此特殊方向的量 $\mathscr{B}(\boldsymbol{r})$,将磁场对 $\boldsymbol{r}$ 处电流作用的力密度表为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \mathscr{B}(\boldsymbol{r}), \tag{1.15}$$

$\mathscr{B}(\boldsymbol{r})$ 称为磁场在 $\boldsymbol{r}$ 处的磁感应强度.它随 $\boldsymbol{r}$ 的变化可表示磁场.这一定义同时提供了测量磁感应强度的原始方法,是可操作的.为此要用一体积小的弱电流,以便逐点测量且不影响磁环境.此小电流称为试探电流.首先找到 $\boldsymbol{r}$ 处它不受力的方向,是为 $\mathscr{B}(\boldsymbol{r})$ 的方向.再将电流的方向改变 90°,量出该处力密度的代数值,除去电流密度的代数值后即得该处 $\mathscr{B}(\boldsymbol{r})$ 的代数值.方向和代数值都确定后便得 $\boldsymbol{r}$ 处的磁感应强度 $\mathscr{B}(\boldsymbol{r})$.在(1.15)两边乘 $\boldsymbol{r}$ 处的小体积元 $\mathrm{d}\mathscr{V}=\mathrm{d}s\mathrm{d}l$,$\mathrm{d}s$ 为体积元中与 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 垂直的横截面积,$\mathrm{d}l$ 为体积元沿 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 方向的长度,得此体积元受的力

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} = \mathrm{d}l\boldsymbol{I}(\boldsymbol{r}) \times \mathscr{B}(\boldsymbol{r}); \tag{1.16}$$

$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}s$ 的方向为 $\boldsymbol{r}$ 处的电流方向,大小为体积元中的电流强度.用载流子的电荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 来表示电流密度,得

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}. \tag{1.17}$$

代入(1.15)后两边再乘体积元 $\mathrm{d}\mathscr{V}$,得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mathrm{d}q\boldsymbol{v} \times \mathscr{B}. \tag{1.18}$$

$\mathrm{d}q\equiv\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}$ 为体积元中载流子的电荷.若所论物体为一运动中的点电荷 q,$\boldsymbol{v}$ 为它的运动速度,则它仅有无穷小体积元 $\mathrm{d}\mathscr{V}$,$\mathrm{d}q$ 即是 q,$\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 即磁场对它作用的力 $\boldsymbol{F}$.于是电荷为 q、速度为 $\boldsymbol{v}$ 的质点受到的磁场作用力为

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \mathscr{B}. \tag{1.19}$$

此力称洛伦兹力.

由毕奥[①]和萨伐尔[②]开始并由安培详细进行的实验表明,电流密度为 $\boldsymbol{j}$ 的一点附近 $\mathrm{d}\mathscr{V}$ 体积元中的电流在以此点为原点的径矢为 $\boldsymbol{r}$ 处产生的磁感应强度为

$$\mathrm{d}\mathscr{B} = k\frac{\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{r}_0}{r^2}\mathrm{d}\mathscr{V} = k\frac{\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{1.20}$$

$\boldsymbol{r}_0 \doteq \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ 为径向单位矢量.比例常数 k 在标准单位制中为

$$k = \frac{\mu}{4\pi}, \tag{1.21}$$

μ 称为 $\boldsymbol{r}$ 处介质的磁导率.真空磁导率为

---

① Biot.

② Savart.

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \mathrm{H/m}, \tag{1.22}$$

单位读作亨利每米.实验发现,磁感应强度也具可叠加性,因此电流密度分布$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$在 $\boldsymbol{r}$ 处产生的磁感应强度为

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \mathrm{d}\mathscr{V}', \tag{1.23}$$

体积分对 $\boldsymbol{r}'$进行,遍及电流分布的空间.磁导率 μ 反映的是介质的性质,而不是电流分布的性质.将它从磁感应强度$\mathscr{B}$中除去,可定义磁场强度

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{r}) = \mathscr{B}(\boldsymbol{r})/\mu. \tag{1.24}$$

由此可将(1.23)表为

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \mathrm{d}\mathscr{V}'. \tag{1.25}$$

此式称为毕奥-萨伐尔-安培定律,简称安培定律.也有简称毕奥-萨伐尔定律的.

用(x,y,z)和(x',y',z')分别表示 $\boldsymbol{r}$ 和$\boldsymbol{r}'$的正交直线坐标,

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

其梯度为

$$\nabla |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| = \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|},$$

$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$为梯度算符.可见

$$\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}. \tag{1.26}$$

代入(1.25)得

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi}\int \left(\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\right) \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \mathrm{d}\mathscr{V}' \\ &= \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}),\end{aligned} \tag{1.27}$$

其中

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}\mathscr{V}'. \tag{1.28}$$

在(1.27)两边取旋度,由向量分析知

$$\nabla \times \mathscr{H} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}. \tag{1.29}$$

右边第一项中的散度可表为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \left(\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\right) \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \mathrm{d}\mathscr{V}'.$$

定义对 $\boldsymbol{r}'$坐标的梯度算符$\nabla' \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}\right)$,显然有

$$\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = -\nabla' \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|},$$

上式可改写

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\int\left(\nabla'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}'.$$

作部分积分,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}'+\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}'. \tag{1.30}$$

右边第一项为积出部分,它是包围电流分布区域的表面上的积分,$\mathrm{d}\boldsymbol{s}'$为$\boldsymbol{r}'$处的表面面积元.表面外既无电流分布,$j=0$,由电流分布的连续性知表面上的电流密度也必为零.这使此式右边第一项面积分为零.电荷守恒要求电荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$和电流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$满足连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0. \tag{1.31}$$

在恒稳电流分布条件下各量应与时间无关,$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$,从而有$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$.在 $\boldsymbol{r}'$处即$\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')=0$.可见(1.30)右边第二项也是零,从而$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$.(1.29)的第二项

$$\nabla^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int\left(\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}'.$$

由于

$$g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

恰为泊松[①]方程的格林[②]函数(见附录一),

$$\nabla^2 g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

代入上式得

$$\nabla^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=-\int\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}'=-\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}).$$

代回(1.29)得

$$\nabla\times\mathscr{H}=\boldsymbol{j}. \tag{1.32}$$

另一方面,在(1.27)两边取散度,由向量分析知

$$\nabla\cdot\mathscr{H}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=(\nabla\times\nabla)\cdot\boldsymbol{A}=0. \tag{1.33}$$

在以上讨论中,电流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$不含介质内的微观电流,特别不含由电磁场诱导产生的介质电流,因而可称为外电流.用 $\boldsymbol{j}_m(\boldsymbol{r})$记 $\boldsymbol{r}$ 处介质内微观电流密度.空间 $\boldsymbol{r}$ 处的总电流密度应为

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}). \tag{1.34}$$

计及 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})$后就不必再考虑介质的影响,(1.23)成为

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}\mathscr{V}', \tag{1.35}$$

---

① Poisson.

② Green.

真空磁导率 μ_0 为普适常数.以$\mathscr{B}$代$\mathscr{H}$,$\mu_0\boldsymbol{j}_t$ 代 $\boldsymbol{j}$,重复(1.25)至(1.33)的推导,代替(1.27)和(1.28)的是

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}_t(\boldsymbol{r}),$$

$$\boldsymbol{A}_t(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}_t(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}';$$

代替(1.32)和(1.33)的是

$$\nabla \times \mathscr{B} = \mu_0\boldsymbol{j}_t, \tag{1.36}$$

$$\nabla \cdot \mathscr{B} = 0. \tag{1.37}$$

要注意,(1.32)和(1.33)并不等同于(1.25);(1.36)和(1.37)也不等同于(1.35).(1.25)只是(1.32)和(1.33)的特解,只有加上适当边条件后(1.32)和(1.33)的解才是(1.25).即是说(1.25)的正确性并不能保证(1.32)和(1.33)在一般情形下都正确.后者是前者的推广,因而其正确性还需进一步的检验.现在有两种推广:一是从(1.25)到(1.32)和(1.33),另一是从(1.35)到(1.36)和(1.37).这两种推广是否相同,如果不同又应取哪种推广呢?在交由实验判定以前可先作一些分析.

由

$$\nabla \times \boldsymbol{M} = \boldsymbol{j}_m \tag{1.38}$$

可定义介质的磁化强度 $\boldsymbol{M}$.将此式表示的 $\boldsymbol{j}_m$ 代入(1.34)后再将所得 $\boldsymbol{j}_t$ 代入(1.36)右边,得

$$\nabla \times \left(\frac{\mathscr{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}\right) = \boldsymbol{j}$$

磁化既由外磁场引起,至少对不太强的磁场 $\boldsymbol{M}$ 与$\mathscr{B}$应有正比关系

$$\boldsymbol{M} = \frac{\xi}{\mu_0}\mathscr{B}, \tag{1.39}$$

ξ 为常数.由此可将上式写成(1.32)的形式,其中的磁场强度

$$\mathscr{H} = \frac{\mathscr{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} = \frac{\mathscr{B}}{\mu},$$

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 - \xi}. \tag{1.40}$$

由(1.39)、(1.24)和此式得 $\boldsymbol{M}$ 与$\mathscr{H}$的正比关系式

$$\boldsymbol{M} = \chi_m\mathscr{H}, \tag{1.41}$$

其中

$$\chi_m = \frac{\mu}{\mu_0}\xi = \frac{\xi}{1 - \xi} \tag{1.42}$$

称为介质的磁化率.可见(1.32)和(1.36)是一致的,可从中任取一个来表示磁场与电流的关系.(1.32)右边只含外电流,不含未知的介质电流 $\boldsymbol{j}_m$,比(1.36)简单明了,自然以取它为宜.

至于(1.33)与(1.37)则可能发生矛盾.按(1.24)

$$\nabla \cdot \mathscr{B} = \nabla \cdot (\mu \mathscr{H}) = \mu \nabla \cdot \mathscr{H} + (\nabla \mu) \cdot \mathscr{H}.$$

对非均匀介质，μ 与位置 $\boldsymbol{r}$ 有关. 除非 $\nabla\mu$ 与 $\mathscr{H}$ 垂直，此式表明 $\nabla\cdot\mathscr{B}$ 与 $\nabla\cdot\mathscr{H}$ 不可能同时为零. (1.33)与(1.37)二式中只有一个可能是普遍正确的. (1.37)已将介质电流与外电流同等考虑，因而只设(1.23)在真空中正确，与(1.33)相比假设较少. 此外，将(1.37)两边在任一空间区域体积分得

$$\int \nabla \cdot \mathscr{B}(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\mathscr{V} = 0.$$

利用数学分析中的高斯定理，可将此式左边的体积分化为包围此体积的表面 s 上的面积分，从而有

$$\oint_s \mathscr{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0. \tag{1.43}$$

在磁学与静电学类比的早期发展中，$\mathscr{H}$ 与 $\mathscr{E}$ 相当，$\mathscr{B}$ 与 $\mathscr{D}$ 相当. (1.14)表明电位移矢量 $\mathscr{D}$ 在任一封闭曲面上的面积分等于此曲面包围的总电荷. (1.43)的类似物理意义自然就是任一空间区域的总磁荷为零，表示不存在自由磁荷这一确凿事实. 有此定性基础，人们自然选择(1.37)而不是(1.33)作为基本物理规律.

将(1.32)两边在任一曲面 s 上作面积分. 由斯托克斯[①]定理，左边得

$$\int_s (\nabla \times \mathscr{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint_\Gamma \mathscr{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

此式右边为磁场强度 $\mathscr{H}$ 沿此曲面边缘 Γ 一周的线积分. 右边得到的

$$I_s = \int_s \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.44}$$

为通过此曲面的电流强度. 结果为

$$\oint_\Gamma \mathscr{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_s. \tag{1.45}$$

此式和(1.43)一起可当作安培定律的积分形式. 从(1.23)和(1.25)到(1.32)和(1.37)，或到(1.43)和(1.45)，并非推导而只是推理. 如果以(1.32)和(1.37)，或(1.43)和(1.45)为基本方程，解得的磁场与电流的关系并不一定是(1.23)和(1.25). 即使在均匀介质中也只当加上无穷远处磁场趋于零的边条件后(1.23)和(1.25)才是解. 这里我们看到的不仅是关系的具体变化，而且是概念的飞跃：在(1.23)和(1.25)中场与流之间的关系是固定的，场并无自由度；而在(1.32)和(1.37)，或(1.43)和(1.45)中场与流之间的关系不是固定的，还需其他条件，如无穷远处的边条件才能定解，场便有了独立于流的自由度. 场成为一个独立的动力学系统. (1.32)和(1.37)，或(1.43)和(1.45)经进一步改造后成为经典电动力学基本方程的一部分. 它的正确性，以及从(1.23)和(1.25)改造到最后结果这一推理过程的正确性，由经典电动力学的理论体系与宏观电磁现象的全部观察结果的一致证

---

① Stokes.

实.

§1.3 电磁感应与法拉第[1]定律,电磁规律的自洽

电与磁的联系不仅表现在电流与磁场的关系,而且表现为电场与磁场的关系.电场$\boldsymbol{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r})$沿一条闭合回路 Γ 的线积分

$$\phi_\Gamma \equiv \oint_\Gamma \boldsymbol{\mathscr{E}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.46}$$

称为此回路的电动势.电动势的符号显然与回路绕行方向有关,相反绕行方向的电动势符号相反.磁感应强度$\boldsymbol{\mathscr{B}}(\boldsymbol{r})$沿面 s 的面积分

$$\Phi_s \equiv \int_s \boldsymbol{\mathscr{B}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.47}$$

称为此面的磁通量.磁通量的符号显然与面的法向选取有关,法向相反面上的磁通量符号也相反.法拉第经一系列实验观察到,一闭合回路的电动势正比于此回路包围的面上磁通量随时间的减少率,称法拉第电磁感应定律.设回路 Γ 按右手规则包围面s,绕行正向定义为绕 s 面法向反时针方向,法拉第定律即

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{\mathscr{E}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_s \boldsymbol{\mathscr{B}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{1.48}$$

$k>0$ 为比例常数.此式右边的负号是楞次[2]定律的表现,它要求感生电动势倾向于产生电流形成磁场以抵消磁通量的变化.由相对性原理和上两节已知的电磁规律可以理解法拉第定律(1.48)并定出其中的比例常数 k.相对性原理要求物理规律在所有惯性系中相同,而惯性系间可彼此作等速直线运动.不同惯性系的物理量间作洛伦兹变换.在相对运动速度比光速小得多的惯性系间洛伦兹变换还原为伽利略[3]变换.设惯性系 S′中有恒定磁场$\boldsymbol{\mathscr{B}}(\boldsymbol{r}')$,另有一刚性回路 Γ 以恒定速度$\boldsymbol{v}$ 在其中运动.回路上随回路一起运动的单位电荷按(1.19)受洛伦兹力$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathscr{B}}$,$\boldsymbol{\mathscr{B}}$为回路上电荷所在处的磁感应强度.随回路 Γ 运动的回路本体坐标系 S 相对惯性系 S′以定速$\boldsymbol{v}$ 运动,因而是一惯性系.在低速极限下 v 比光速小得多,S 系与 S′系的物理量间作伽利略变换.质点受的力在伽利略变换下是不变的,在 S 系中看回路上的那个单位电荷仍应受力$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathscr{B}}$.然而这个电荷在 S 系中和回路 Γ 一起是静止的,不可能受磁场作用.要符合相对性原理必须设回路上感生了电场

$$\boldsymbol{\mathscr{E}} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathscr{B}}, \tag{1.49}$$

从而感生电动势为

---

① Faraday.

② Lenz.

③ Galileo.

$$\phi_\Gamma = \oint_\Gamma \mathscr{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_\Gamma (\boldsymbol{v} \times \mathscr{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}. \tag{1.50}$$

另一方面，在S系中看磁场不再是恒定的，它在空间的分布作为一个整体以恒定速度 $-\boldsymbol{v}$ 相对S移动．单位时间内有面积

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.51}$$

从回路线段 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 处流入回路．这使回路内磁通量在单位时间中增加

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Phi_s}{\mathrm{d}t} &\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_s \mathscr{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint_\Gamma \mathscr{B} \cdot (\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}) \\ &= \oint_\Gamma (\mathscr{B} \times \boldsymbol{v}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\end{aligned}$$

与(1.49)比较得

$$\oint_\Gamma \mathscr{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_s \mathscr{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{1.52}$$

这正是(1.48)，只是其中的比例常数已确定为

$$k = 1. \tag{1.53}$$

以上陈述自然不是法拉第定律的证明．(1.52)作为普遍的电磁感应定律，其中磁通量的变化并不一定是整个磁场平移的结果．以上陈述只是表明法拉第定律与上两节的电磁规律相洽，无矛盾，与相对性原理也是一致的．相对性原理还帮助确定了比例常数 k．比例常数 k 的值与单位制有关．在标准单位制中磁场对电流的作用由(1.15)表示，对运动电荷的作用由(1.19)表示，这才要求在法拉第定律(1.48)中将比例常数 k 取为1．如果改变单位制，(1.15)改为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = k\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \mathscr{B}(\boldsymbol{r}), \tag{1.54}$$

(1.19)就会成为

$$\boldsymbol{F} = kq\boldsymbol{v} \times \mathscr{B}, \tag{1.55}$$

法拉第定律则仍由(1.48)表示．电磁规律的自洽以及它们与相对性原理的一致只要求这三个表达式中的比例常数 k 是一样的．在著名的高斯单位制中取 $k = \frac{1}{c}$，c 为光速．于是，(1.54)、(1.55)和(1.48)分别成为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \mathscr{B}(\boldsymbol{r}), \tag{1.56}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{q}{c}\boldsymbol{v} \times \mathscr{B}, \tag{1.57}$$

和

$$\oint_\Gamma \mathscr{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_s \mathscr{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{1.58}$$

法拉第定律还存在其他自洽问题．一条封闭曲线包围的曲面并非惟一的，有无穷多种．要法拉第定律有意义，必须证明所有这些曲面上的磁通量在任一时刻都是彼此相同的．设曲面 s_1 和 s_2 都以封闭曲线 Γ 为边缘．它们合起来便组成一封闭曲

面 s. 为比较磁通量, s_1 和 s_2 的法线方向与回路 Γ 的绕行方向的关系要么都是右手螺旋的,要么都是左手螺旋的. 这使曲面 s_1 和 s_2 中只有一个曲面的法向为曲面 s 的外向法向,另一个曲面的法向必为曲面 s 的内向法向. 可见

$$\int_{s_1} \mathscr{B} \cdot d\boldsymbol{s} - \int_{s_2} \mathscr{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \pm \oint_s \mathscr{B} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

若(1.43)不仅对恒定电流产生的磁场成立,而且在任何情形中都成立,则此式右边为零,从而得

$$\int_{s_1} \mathscr{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{s_2} \mathscr{B} \cdot d\boldsymbol{s},$$

一条封闭曲线包围的每一曲面上磁通量都相同. 这使法拉第定律的陈述有意义,电磁规律是自洽的. 注意此处已将(1.43)推广于一般情形. 鉴于它表达的是不存在自由磁荷这一基本事实,这一推广是自然的.

法拉第定律与静电学的自洽,要求电荷产生的静电场在任一封闭回路中的电动势为零. 将整个电荷分布,包括介质中固有的和感生的电荷分布,都看成是由点电荷组成的. 由于电场的可叠加性和线积分(1.46)对电场$\mathscr{E}$的线性,只须证明一个点电荷产生的电场在任一封闭曲线上的线积分是零. 这是轻而易举的. 实际上点电荷的静电场(1.9)可由静电势

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon r} \tag{1.59}$$

按

$$\mathscr{E} = -\nabla\phi \tag{1.60}$$

给出. 一个函数的梯度沿封闭曲线积分一周所得为此函数在同一点的值之差,若此函数是单值的这差便是零. 势函数(1.59)的单值性保证静电场(1.60)在任一封闭回路中的电动势

$$\oint_\Gamma \mathscr{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\oint_\Gamma (\nabla\phi) \cdot d\boldsymbol{l} = 0.$$

再次表明电磁规律自洽.

§1.4 电磁规律的自洽扩充与微分分析,位移电流,麦克斯韦[1]方程,平面电磁波解

库仑定律、安培定律和法拉第定律从各方面表达出关于电磁现象的定量实验规律. 在此基础上总结出完备的电磁理论体系已是顺理成章的事. 第一步仍是检验

---

[1] Maxwell, J. C., Treatise on Electricity and Magnetism, 3rd edition (1891), reprint by Dover, New York(1954).

这些定律的逻辑自洽性.特别是在构造理论体系时常常要将定律推广到普遍情形.在一种情形中自洽的陈述在普遍情形中未必自洽.上节对此作了一些讨论,幸运地发现在所讨论的情形中,将陈述推广到一般情形时仍是自洽的.现在要指出一个陈述,将它推广于一般情形时即不自洽,因而需要改造.这便是安培定律(1.45).此式有意义的前提是周线 Γ 包围的任何曲面上电流强度同为 I.这在恒稳电流分布条件下是成立的,否则电流强度不同的两个曲面包围的空间中电荷会随时间变化,从而违背恒稳条件.然而要将此式推广到一般情形,包括非恒稳情形,则须改造.设 s_1 和 s_2 为以 Γ 为周线的两个曲面,合组成封闭曲面 s.不失一般性,设 s_1 的法线为 s 的外向法线,则 s_2 的法线为 s 的内向法线.以

$$I_i = \int_{s_i} \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \quad i = 1,2,$$

表示通过 s_i 面的电流强度,$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$仍表示 $\boldsymbol{r}$ 处的电流密度矢量.Q 表示封闭曲面 s 包围的电荷.电荷守恒要求

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I_2 - I_1 = -\oint_s \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

另一方面,由(1.14)知

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \oint_s \frac{\partial \mathscr{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

与上式相减得

$$\oint_s \left(\boldsymbol{j} + \frac{\partial \mathscr{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0. \tag{1.61}$$

可见

$$I_1 + \int_{s_1} \frac{\partial \mathscr{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = I_2 + \int_{s_2} \frac{\partial \mathscr{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{1.62}$$

提示将安培定律(1.45)推广为

$$\oint_\Gamma \mathscr{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_s + \int_s \frac{\partial \mathscr{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}; \tag{1.63}$$

此处 s 重新表示以 Γ 为周线的一个曲面,

$$I_s = \int_s \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1.64}$$

为通过此面的电流强度.(1.63)右边对任何以 Γ 为周线的曲面 s 都是一样的.19世纪末得到推广(1.63)后有一解释.认为它右边第一项 I_s 为通过 s 面的传导电流,即用电流计量得的电流.而它右边第二项则是电磁环境诱导介质中正、负电荷相对位移导致的电流,称为位移电流.其中的 $\mathscr{D}$ 因而称为电位移矢量.当时还认为真空也是一种介质,称为以太.以太中也有正负电荷,因而真空中也有位移电流.以太概念一度被否定,后来又有人以新的形式提出.现在一般的认识是,以太概念并无必要,(1.63)表示的乃是电磁场与电流的一般关系.它与(1.43),以及库仑定律

(1.14)和法拉第定律(1.52)组成电磁场与带电系统普遍成立的自洽规律.

将体积$\mathscr{V}$中的电荷 Q 表成电荷密度$\rho(\boldsymbol{r})$的体积分得

$$Q = \int_{\mathscr{V}} \rho \mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{1.65}$$

代入(1.14)右边,并将它左边的面积分用矢量分析中的高斯定理化成体积分得

$$\int_{\mathscr{V}} \nabla \cdot \mathscr{D} \mathrm{d}\mathscr{V} = \int_{\mathscr{V}} \rho \mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{1.66}$$

同理可将(1.43)表为

$$\int_{\mathscr{V}} \nabla \cdot \mathscr{B} \mathrm{d}\mathscr{V} = 0. \tag{1.67}$$

将(1.52)和(1.63)中的线积分用斯托克斯定理化成面积分,分别得

$$\int_{s} (\nabla \times \mathscr{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_{s} \frac{\partial \mathscr{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{1.68}$$

$$\int_{s} (\nabla \times \mathscr{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{s} \left(\boldsymbol{j} + \frac{\partial \mathscr{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{1.69}$$

现在设(1.66)和(1.67)对任意小的体积$\mathscr{V}$成立,取极限便是在一点上成立.除掉体积元后它们给出

$$\nabla \cdot \mathscr{D} = \rho, \tag{1.70}$$

$$\nabla \cdot \mathscr{B} = 0. \tag{1.71}$$

类似地设(1.68)和(1.69)对任意小的面积 s 成立,取极限便是在一点上成立.除去面积元后它们给出

$$\nabla \times \mathscr{E} = -\frac{\partial \mathscr{B}}{\partial t}, \tag{1.72}$$

$$\nabla \times \mathscr{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \mathscr{D}}{\partial t}. \tag{1.73}$$

除从安培定律(1.45)到(1.63)的推广外,(1.66)～(1.69)可视为实验定律.由它们作微分分析,取极限得到(1.70)～(1.73)似乎是自然而然的事.这一点在 19 世纪末是没有问题的,至少对真空中的电磁规律是这样.然而自 20 世纪初发现量子现象,建立量子论后,情形复杂化了.人们认识到微观世界的规律与宏观世界大为不同,不能将宏观世界中认识的规律用于微观世界,更不用说将它用到一个空间点了.以上取极限的过程必须适可而止,取到宏观上可视为无穷小的体积元或面积元而在微观看来宏观条件仍满足的程度.这样,(1.70)～(1.73)中诸量都应认为是各量在宏观看来无穷小却仍然是宏观体积或宏观面积上的平均.更小区域内的电磁规律只能用量子理论研究.这也就是本章开始时所说的,即使是描写电磁场逐点变化的微分方程组(1.70)～(1.73)也只能是宏观电磁现象的微分数学模型,这里的每一个“点”都是一个宏观区域,不过在宏观看来这个区域的尺度可视为零罢了.在此基础上可将微分方程组(1.70)～(1.73)当作电磁场的运动方程.给定了电荷电流分布 $\rho(\boldsymbol{r},t)$和$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$,给定了介质性质即$\mathscr{D}$、$\mathscr{B}$与$\mathscr{E}$、$\mathscr{H}$的关系,以及给定了电

磁场的初条件和边条件后，便可从中解出电磁场$\mathscr{E}(\boldsymbol{r},t)$，$\mathscr{D}(\boldsymbol{r},t)$，$\mathscr{H}(\boldsymbol{r},t)$和$\mathscr{B}(\boldsymbol{r},t)$. 方程组(1.70)～(1.73)称为麦克斯韦方程.

$\mathscr{D}$、$\mathscr{B}$与$\mathscr{E}$、$\mathscr{H}$的关系表示的既是介质的性质便不是电磁场论或电动力学的研究对象，在电动力学中只是作为唯象关系引用. 它的理论研究是统计力学问题，须从介质的成分、结构，特别是从其中原子、分子的排布和相互作用以及对电磁场的反应，用统计方法从微观到宏观推导得来. 在电磁场不太强时，假定它们之间的线性关系(1.10)和(1.24)是合理的. 对各向同性介质，ϵ和μ一般为正数. 在均匀介质中ϵ和μ为常数，与空间位置$\boldsymbol{r}$无关. 这里应为理论的扩充留下余地. ϵ和μ不仅可以不是常数，而且可以不是普通的数而是张量. 线性关系(1.10)和(1.24)也是可以修改的. 特别当研究领域向强场方向扩充时$\mathscr{D}$、$\mathscr{B}$与$\mathscr{E}$、$\mathscr{H}$间的可能非线性关系是一个现实的课题. 这自然是研究领域的专门问题，超出本书范围. 本书只考虑线性关系

$$\mathscr{D} = \epsilon\mathscr{E}, \qquad \mathscr{B} = \mu\mathscr{H}, \tag{1.74}$$

其中ϵ和μ为普通数，且在多数场合设为常数. 它们的值由对具体介质实测确定. 用(1.74)可在四个矢量$\mathscr{D}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{E}$和$\mathscr{H}$中消去两个，例如消去$\mathscr{D}$和$\mathscr{B}$. 将(1.74)代入(1.70)～(1.73)，在ϵ和μ为常数的条件下将麦克斯韦方程简化为

$$\nabla\cdot\mathscr{E} = \frac{1}{\epsilon}\rho, \tag{1.75}$$

$$\nabla\cdot\mathscr{H} = 0, \tag{1.76}$$

$$\nabla\times\mathscr{E} = -\mu\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t}, \tag{1.77}$$

$$\nabla\times\mathscr{H} = \boldsymbol{j} + \epsilon\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}. \tag{1.78}$$

以往的电磁学认为电荷与电流是电磁场的源，电磁场由这种源产生. 麦克斯韦方程却表明，这只是一种情形，还可有别种情形. 在(1.70)和(1.73)中将电荷电流分布$\rho(\boldsymbol{r},t)$和$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$置零，得无源麦克斯韦方程

$$\nabla\cdot\mathscr{D} = 0, \qquad \nabla\cdot\mathscr{B} = 0, \tag{1.79}$$

$$\nabla\times\mathscr{E} = -\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial t}, \qquad \nabla\times\mathscr{H} = \frac{\partial\mathscr{D}}{\partial t}. \tag{1.80}$$

它们表明，电场的旋涡会引起磁场变化，磁场的旋涡又会引起电场的变化. 电磁场有自己的动力学，毋需什么源来“产生”它. 这再次表明电磁场是独立的动力学系统，有独立的自由度. 在均匀介质中这组方程可表为

$$\nabla\cdot\mathscr{E} = 0, \qquad \nabla\cdot\mathscr{H} = 0, \tag{1.81}$$

$$\nabla\times\mathscr{E} = -\mu\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t}, \qquad \nabla\times\mathscr{H} = \epsilon\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}. \tag{1.82}$$

有弹性力学经验的人立即会猜想这组偏微分方程有波动解，并会尝试它的平面波

解

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{E} &= \mathscr{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t),\\ \mathscr{H} &= \mathscr{H}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t),\end{aligned}\right\} \tag{1.83}$$

其中常矢量$\mathscr{E}_0$、$\mathscr{H}_0$和 $\boldsymbol{k}$ 分别为电波振幅、磁波振幅和波矢量,常数 ω 为角频率.代入(1.81)得

$$\boldsymbol{k}\cdot\mathscr{E}_0=0,\qquad \boldsymbol{k}\cdot\mathscr{H}_0=0, \tag{1.84}$$

表明这组平面波由振幅$\mathscr{E}_0$和$\mathscr{H}_0$代表的偏振方向恒垂直于波矢量 $\boldsymbol{k}$ 代表的传播方向,因而是横波.将(1.83)代入(1.82)得

$$\boldsymbol{k}\times\mathscr{E}_0=\mu\omega\mathscr{H}_0,\qquad \boldsymbol{k}\times\mathscr{H}_0=-\epsilon\omega\mathscr{E}_0. \tag{1.85}$$

此式首先表明,$\mathscr{E}_0$代表的电波偏振方向与$\mathscr{H}_0$代表的磁波偏振方向也互相垂直,且$\mathscr{E}_0$、$\mathscr{H}_0$和 $\boldsymbol{k}$ 组成右手正交矢量系.用 $\boldsymbol{k}$ 叉乘(1.85)第一式两边然后用其中的第二式得

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\mathscr{E}_0)=-\epsilon\mu\omega^2\mathscr{E}_0.$$

由于(1.84)的第一式,此式左边为

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\mathscr{E}_0)\equiv(\boldsymbol{k}\cdot\mathscr{E}_0)\boldsymbol{k}-k^2\mathscr{E}_0=-k^2\mathscr{E}_0.$$

与右边比较知对非零振幅$\mathscr{E}_0$必有 $k^2=\epsilon\mu\omega^2$,从而得电磁波的色散关系

$$\omega=\pm uk, \tag{1.86}$$

其中

$$u=\sqrt{\frac{1}{\epsilon\mu}}. \tag{1.87}$$

这些关系保证了平面波(1.83)是无源麦克斯韦方程(1.81)和(1.82)的解.

波(1.83)的等相位面

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t=\text{常数}$$

为一平面,法向沿波矢量 $\boldsymbol{k}$,这就是称它为平面波的原因.这个等相位面随时间沿波矢量 $\boldsymbol{k}$ 所指方向移动,速度为$\frac{\omega}{k}$.与(1.86)比较知,由(1.87)定义的 u 为平面电磁波等相位面移动的速度,即它的相速度.真空中的电磁波相速度为

$$c=\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}}, \tag{1.88}$$

将 ϵ_0 和 μ_0 的值(1.7)和(1.22)代入,得

$$c=2.99792458\times10^8\,\text{m/s}, \tag{1.89}$$

恰为真空中的光速.

1865 年麦克斯韦用他的理论预言了电磁波的存在,并指称光波就是电磁波.1888 年赫兹[①]利用振荡电流产生了电磁波,随后详细研究了电磁波的性质,证实它

---

① Hertz.

在每一细节上都与理论预言一致.接着是电磁波广泛和深入的应用,而结果则是完全改变了人类的生活面貌.今天,如果说,离开了电磁波人类现代文明是不可想像的,这一点也不是夸张.然而不要忘记对电磁现象不计功利的基础研究在这中间的决定作用.

将(1.3)与(1.19)合并,得点电荷 q 在电磁场中受的力

$$\boldsymbol{F} = q(\mathscr{E} + \boldsymbol{v} \times \mathscr{B}), \tag{1.90}$$

此式称洛伦兹公式.一个轨道方程为 $\boldsymbol{r}_0(t)$因而速度为$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}_0(t)$的荷电质点,电荷密度和电流密度矢量分别为

$$\left.\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{r},t) &= q\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t)), \\ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) &= \rho(\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{v}(t), \end{aligned}\right\} \tag{1.91}$$

$\delta(\boldsymbol{r})$为 $\boldsymbol{r}$ 的 δ 函数,有性质

$$\int_{\mathscr{V}} \delta(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 1, & \text{若积分区域 } \mathscr{V} \text{ 含原点 } \boldsymbol{r} = 0, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases} \tag{1.92}$$

如此,可将点电荷和连续介质受电磁力的情形统一表达.力密度

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t)\,\mathscr{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) \times \mathscr{B}(\boldsymbol{r},t). \tag{1.93}$$

麦克斯韦方程(1.70)～(1.73)、介质电磁物态方程

$$\mathscr{D}, \mathscr{H}(\mathscr{E}, \mathscr{B}), \tag{1.94}$$

介质力学运动方程和点电荷力学运动方程,以及电磁力方程(1.93)一起,组成电磁场与介质和荷电力学系统的完备方程组,在一定初条件和边条件下可求解场$\mathscr{E}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{D}$、$\mathscr{H}$和荷 ρ、流 $\boldsymbol{j}$ 随时间的变化.这便是经典电动力学系统的基础.经一个多世纪的实践检验,在量子现象可忽略的条件下,经典电动力学作为一个体系,它的全部结果与全部实验观察结果完全一致,成为宏观电磁现象的实验研究和应用的强有力的可靠指导.

§1.5 电磁场的标势和矢势,电磁势的波动方程,规范变换与规范,电动力学的规范不变性

麦克斯韦方程中(1.71)表明磁感应强度$\mathscr{B}(\boldsymbol{r})$是无散的.已熟知任何矢量$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$的旋度无散,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0.$$

现在证明它的逆,即

定理一 无散矢量场必可表为另一矢量场的旋度场.

证 采用构造法.对任何矢量场$\mathscr{B}(\boldsymbol{r})$必可构造另一矢量场

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 \mathscr{B}(\lambda\boldsymbol{r}) \times (\lambda\boldsymbol{r})\mathrm{d}\lambda. \tag{1.95}$$

按矢量分析规则可得它的旋度

$$\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 \lambda \, \nabla \times [\mathscr{B}(\lambda \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{r}] \mathrm{d}\lambda$$

$$= \int_0^1 \lambda [3\mathscr{B}(\lambda \boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{r} \cdot \nabla)\mathscr{B}(\lambda \boldsymbol{r}) - (\nabla \cdot \mathscr{B})_{\lambda r} \lambda \boldsymbol{r} - \mathscr{B}(\lambda \boldsymbol{r})] \mathrm{d}\lambda.$$

若$\mathscr{B}(\boldsymbol{r})$场无散，右边积分号下方括号内第三项为零，而第二项则为

$$(\boldsymbol{r} \cdot \nabla)\mathscr{B}(\lambda \boldsymbol{r}) = \lambda \frac{\mathrm{d}\mathscr{B}(\lambda \boldsymbol{r})}{\mathrm{d}\lambda}.$$

代回积分号下得

$$\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 \left[2\lambda \, \mathscr{B}(\lambda \boldsymbol{r}) + \lambda^2 \frac{\mathrm{d}\mathscr{B}(\lambda \boldsymbol{r})}{\mathrm{d}\lambda} \right] \mathrm{d}\lambda$$

$$= \lambda^2 \mathscr{B}(\lambda \boldsymbol{r}) \Big|_{\lambda=0}^{\lambda=1} = \mathscr{B}(\boldsymbol{r}).$$

可见任一无散场$\mathscr{B}(\boldsymbol{r})$皆可表为(1.95)定义的矢量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$的旋度场. 证毕.

由于任何标量函数 $\phi(\boldsymbol{r})$的梯度都是无旋的，

$$\nabla \times \nabla \phi(\boldsymbol{r}) \equiv 0,$$

将无散场表为旋度场的方式不是惟一的. 在(1.95)右边加上一任意梯度场，不改变矢量场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$的旋度. 无散场$\mathscr{B}(\boldsymbol{r})$也可表为这样重新定义的 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$的旋度场. 不过无论如何，这个定理保证了磁感应强度$\mathscr{B}(\boldsymbol{r})$可表为一矢量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$的旋度：

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}). \tag{1.96}$$

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$称为电磁场的矢势. 将此式代入麦克斯韦方程中的(1.72)得

$$\nabla \times \left(\mathscr{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0. \tag{1.97}$$

下面要用无旋场的性质. 即

定理二 无旋矢量场必可表为一标量场的梯度场.

证 设矢量场 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$无旋：

$$\nabla \times \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 0.$$

按斯托克斯定理

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_s (\nabla \times \boldsymbol{V}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0,$$

Γ 为任一封闭曲线，s 为它包围的任一曲面. 无旋矢量场的矢量沿任一封闭曲线的线积分为零. 空间任意两点 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}$ 间连的两条不同曲线组成一封闭曲线. 无旋矢量沿此封闭曲线的线积分为零表明它沿从 $\boldsymbol{r}_0$ 到 $\boldsymbol{r}$ 的两条不同连线的线积分相等，固定始末点的线积分与路径无关，即

$$\phi = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.98}$$

只是始末点 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}$ 的函数，固定始点 $\boldsymbol{r}_0$ 后便只是 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$的函数. 如此构造的函数 $\phi(\boldsymbol{r})$按定义(1.98)有性质

$$\nabla \phi = \boldsymbol{V}.$$

这便证明了定理的陈述.证毕.

(1.97)表明 $-\left(\mathscr{E}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$无旋,因而有函数 $\phi(\boldsymbol{r})$使

$$\mathscr{E}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla \phi, \tag{1.99}$$

或

$$\mathscr{E}=-\nabla \phi-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{1.100}$$

如此定义的函数 $\phi(\boldsymbol{r})$称为电磁场的标势,是静电势的推广.

考虑均匀介质中的电磁场,麦克斯韦方程简化为(1.75)~(1.78).由(1.74)的第二式和(1.96)得

$$\mathscr{H}=\frac{1}{\mu} \nabla \times \boldsymbol{A}. \tag{1.101}$$

此式和(1.100)使(1.76)和(1.77)自动满足,且使(1.75)和(1.78)分别成为

$$\nabla^{2} \phi+\frac{\partial \nabla \cdot \boldsymbol{A}}{\partial t}=-\frac{1}{\epsilon} \rho, \tag{1.102}$$

$$\nabla \times(\nabla \times \boldsymbol{A})+\frac{1}{u^{2}} \frac{\partial^{2} \boldsymbol{A}}{\partial t^{2}}=-\frac{1}{u^{2}} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}+\mu \boldsymbol{j}, \tag{1.103}$$

其中 u 由(1.87)定义.如前所述,由(1.96)定义的矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$并不惟一,可在它上面加任一标量函数 $\psi(\boldsymbol{r})$的梯度.重新定义矢势

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})+\nabla \psi(\boldsymbol{r}), \tag{1.104}$$

用它代替 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$表示磁感应强度,得

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{r})=\nabla \times \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}), \tag{1.105}$$

形式与(1.96)一样.还可用它消去(1.100)中的 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$,得

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{r})=-\nabla \phi'(\boldsymbol{r})-\frac{\partial \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r})}{\partial t}, \tag{1.106}$$

其中

$$\phi'(\boldsymbol{r})=\phi(\boldsymbol{r})-\frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{1.107}$$

以 $\phi'(\boldsymbol{r})$和 $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r})$为标势和矢势按(1.106)和(1.105)表示的电磁场与以 $\phi(\boldsymbol{r})$和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$为标势和矢势按(1.100)和(1.96)表示的电磁场一样.这不仅指它们直接给出的$\mathscr{E}(\boldsymbol{r})$和$\mathscr{B}(\boldsymbol{r})$一样,而且指进一步按电磁物态方程(1.94)给出的$\mathscr{D}(\boldsymbol{r})$和$\mathscr{H}(\boldsymbol{r})$也一样,从而电磁场及其满足的麦克斯韦方程完全一样.电磁势的变换(1.107)和(1.104)称为规范变换.以上的讨论表明电磁场及电动力学在规范变换下不变,称为规范不变性.这种不变性使得可适当选取电磁势以简化理论的表达.例如,在均匀介质中若能使电磁势符合条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}+\frac{1}{u^{2}} \frac{\partial \phi}{\partial t}=0, \tag{1.108}$$

则电动力学方程(1.102)和(1.103)可简化为

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon}\rho, \tag{1.109}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu\boldsymbol{j}. \tag{1.110}$$

后一式推导中用到恒等式

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}. \tag{1.111}$$

(1.109)是以 ρ/ϵ 为源的标势 ϕ 的波动方程,(1.110)则是以 $\mu\boldsymbol{j}$ 为源的矢势 $\boldsymbol{A}$ 的波动方程,它们都可以用标准方法求解.求解波动方程是本书的一个重要内容.现先看它的无源特例,即 $\rho(\boldsymbol{r},t)=0$ 和 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=0$ 的情形.此情形中(1.109)和(1.110)成为无源波动方程,又称达朗贝尔[①]方程

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0, \tag{1.112}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0, \tag{1.113}$$

有平面波解

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \phi_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t), \tag{1.114}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{A}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t). \tag{1.115}$$

方程(1.112)和(1.113)规定了色散关系,它就是(1.86),表明波的相速度为(1.87)定义的 u,与上节结果一致.条件(1.108)则规定了振幅关系

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}_0 = \frac{\omega}{u^2}\phi_0. \tag{1.116}$$

现在证明恒能选择电磁势,使条件(1.108)满足.设

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \xi(\boldsymbol{r},t), \tag{1,117}$$

$\xi(\boldsymbol{r},t)$可能非零.若 $\xi\neq 0$ 则作规范变换(1.104)和(1.107),令

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}' + \frac{1}{u^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t} = 0. \tag{1.118}$$

将(1.104)和(1.107)代入此式,并用(1.117)得

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\xi. \tag{1.119}$$

这是以 $\xi(\boldsymbol{r},t)$ 为源的 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 的波动方程,它有解.从中解出 $\psi(\boldsymbol{r},t)$,代回(1.104)和(1.107),这样得到的电磁势 $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\phi'(\boldsymbol{r},t)$ 便满足条件(1.118).附加于电磁势的约束条件(1.108)或(1.118)称规范条件,服从某规范条件的电磁势称属于某规范.

---

① J. D'Alembert.

对真空中的电动力学,规范条件(1.108)成为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \tag{1.120}$$

c 为真空中的光速(1.89).此条件称洛伦兹条件,它所规定的规范称洛伦兹规范.

常用的规范还有库仑规范和时间规范.库仑规范条件为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0. \tag{1.121}$$

恒能选择电磁势满足此条件.若不巧

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \xi(\boldsymbol{r}, t),$$

$\xi \neq 0$,则作规范变换(1.104)和(1.107),令

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}' = 0. \tag{1.122}$$

将(1.104)代入此式并利用上式得

$$\nabla^2 \psi = -\xi. \tag{1.123}$$

这是以 $\xi(\boldsymbol{r}, t)$ 为源的泊松方程,它有解.从中解出 $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ 代回(1.104)和(1.107),所得电磁势 $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}, t)$ 和 $\phi'(\boldsymbol{r}, t)$ 即满足库仑规范条件(1.122).将(1.121)代入(1.102)和(1.103)得

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon}\rho, \tag{1.124}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu \boldsymbol{j} + \frac{1}{u^2}\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}. \tag{1.125}$$

第二式的推导中再次用到恒等式(1.111).在此规范中标势满足以电荷为源的泊松方程(1.124),随电荷密度分布瞬时变化.按附录一,此式的解为

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\mathscr{V}', \tag{1.126}$$

体积分对 $\boldsymbol{r}'$ 进行,遍及整个电荷分布.利用附录一证明的关系

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{1.127}$$

可直接验证(1.126)为方程(1.124)的解.与(1.59)比较,可将(1.126)理解为 t 时刻空间各点 $\boldsymbol{r}'$ 处的点电荷 $\rho(\boldsymbol{r}', t) d\mathscr{V}'$ 在 $\boldsymbol{r}$ 处产生的库仑势之和.这就是称此规范为库仑规范的原因.(1.125)右边第二项则可用(1.126)和连续性方程(1.31)表为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u^2}\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \mu \frac{1}{4\pi}\nabla \int \frac{\frac{\partial \rho}{\partial t}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\mathscr{V}' \\
&= -\frac{\mu}{4\pi}\nabla \int \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', t)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\mathscr{V}' \\
&= \frac{\mu}{4\pi}\nabla \int \left(\nabla' \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\right) \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', t) d\mathscr{V}' \\
&= -\frac{\mu}{4\pi}\nabla \int \left(\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\right) \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', t) d\mathscr{V}'
\end{aligned}$$

$$= -\frac{\mu}{4\pi}\nabla\left(\nabla\cdot\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}'\right)$$

$$= -\frac{\mu}{4\pi}\nabla\times\left(\nabla\times\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}'\right)-\mu\nabla^2\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}'.$$

式中∇'为对坐标$\boldsymbol{r}'$的梯度运算,第三等号处作了分部积分,末一等号处用了恒等式(1.111).用(1.127)可作出等式最右边末项的积分,得

$$-\nabla^2\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}' = \int\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\mathscr{V}' = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t).$$

代回原式便得到电流密度矢量的一个分解

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{j}_\mathrm{t}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{j}_\mathrm{l}(\boldsymbol{r},t), \tag{1.128}$$

其中

$$\boldsymbol{j}_\mathrm{t}(\boldsymbol{r},t)\equiv\frac{1}{4\pi}\nabla\times\left(\nabla\times\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}'\right) \tag{1.129}$$

由于是一旋度因而散度为零:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}_\mathrm{t}(\boldsymbol{r},t) = 0, \tag{1.130}$$

所以称为横电流密度,这就是下标 t 的意思.

$$\boldsymbol{j}_\mathrm{l}(\boldsymbol{r},t)\equiv-\frac{1}{4\pi}\nabla\left(\nabla\cdot\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}'\right) = \epsilon\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{1.131}$$

由于是一梯度因而旋度为零:

$$\nabla\times\boldsymbol{j}_\mathrm{l}(\boldsymbol{r},t) = 0, \tag{1.132}$$

所以称为纵电流密度,这也就是下标 l 的意思.用(1.131)、(1.128)和(1.87)可将(1.125)改写为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu\boldsymbol{j}_\mathrm{t}. \tag{1.133}$$

库仑规范条件(1.121)表明此规范中矢势场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$为横场,它的动力学方程(1.133)右边也只出现横电流,此规范因而又称横规范.横规范常用于辐射问题,便又称为辐射规范.

时间规范条件为

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = 0. \tag{1.134}$$

恒可选择电磁势满足此条件.若遇

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \xi(\boldsymbol{r},t)\neq 0,$$

即作变换(1.104)和(1.107),令变换后的标势

$$\phi'(\boldsymbol{r},t) = 0. \tag{1.135}$$

按(1.107),这就是要

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \xi. \tag{1.136}$$

积分得

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \int^t \xi(\boldsymbol{r},t')\mathrm{d}t'. \tag{1.137}$$

右边积分下限待定,为不定积分.代回(1.104)得变换后的矢势 $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r},t)$. $\phi(\boldsymbol{r},t)$ 既限定为零,电磁场就由一三维矢势场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 描写.这是时间规范的优点.代入时间规范条件(1.134)后电场强度的表达式(1.100)成为

$$\boldsymbol{\mathscr{E}} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{1.138}$$

此式与(1.96)一起表示电磁场强度与矢势 $\boldsymbol{A}$ 的关系.将(1.134)代入(1.102)和(1.103)得动力学方程

$$\nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon}\rho, \tag{1.139}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \mu \boldsymbol{j}. \tag{1.140}$$

这两个方程彼此并非完全独立的.在(1.140)两边取散度,左边第一项贡献为零,用连续性方程(1.31)将右边的$\nabla\cdot\boldsymbol{j}$ 换成 $-\frac{\partial\rho}{\partial t}$后得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon}\rho\right) = 0.$$

此式表明(1.139)只要在一特定时刻成立,(1.140)就保证它恒成立.在时间规范中动力学方程只有(1.140)一个;(1.139)仅为对初条件的约束,规定$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$的初值与电荷密度 ρ 初值之间的关系.

一个规范条件常常不足以确定电磁势.(1.117)~(1.119)的讨论表明,对已满足条件(1.108)的电磁势 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 还可作规范变换(1.104)和(1.107),只要其中 $\psi(\boldsymbol{r},t)$满足达朗贝尔方程

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{1.141}$$

变换后的电磁势 ϕ'和$\boldsymbol{A}'$就仍满足同一规范条件(1.118).类似地,对已满足库仑规范条件(1.121)的电磁势 $\phi,\boldsymbol{A}$ 也可再作规范变换(1.104)和(1.107).(1.123)的论证表明,只要这一变换中的 $\psi(\boldsymbol{r},t)$满足拉普拉斯[①]方程

$$\nabla^2\psi = 0, \tag{1.142}$$

变换后的电磁势 $\phi',\boldsymbol{A}'$便满足同一库仑规范条件(1.122).可见为了确定电磁势,除一个规范条件外还可加其他条件,例如再加一个规范条件.考虑无源电动力学,其中 $\rho(\boldsymbol{r},t)=0,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=0$.设其电磁势 $\phi,\boldsymbol{A}$ 已满足库仑规范条件,因而服从方程

$$\nabla^2\phi = 0, \tag{1.143}$$

---

① Laplace.

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.144}$$

它们分别由(1.124)和(1.133)将 ρ 和 $\boldsymbol{j}$ 置零而得. 现再作规范变换(1.104)和(1.107),并要求变换后的标势为零,即加时间规范条件(1.135). 按(1.137),这要求规范变换中

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \int^t \phi(\boldsymbol{r},t')\mathrm{d}t'.$$

由(1.143)和积分、微分次序的交换规则知 $\psi(\boldsymbol{r},t)$满足拉普拉斯方程(1.142),从而变换后的电磁势仍满足库仑规范条件. 它现在同时满足时间规范条件和库仑规范条件,属时间-库仑规范,有时仍称库仑规范,不过理解其中的标势已为零. 无源电动力学的库仑规范通常是指这种时间-库仑规范. 在这种规范中电磁场由一个三维矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$完全描述,它满足条件(1.121)和动力学方程(1.144). 对平面波解

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{A}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t), \tag{1.145}$$

库仑规范条件(1.121)规定

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}_0 = 0, \tag{1.146}$$

即是一横波;波动方程(1.144)则导致色散关系(1.86),表明它的相速度为(1.87)定义的 u.

§1.6 电磁场量的洛伦兹变换,真空电动力学在洛伦兹变换下的不变性,运动点电荷的电磁场

相对性原理是现代物理学的一条普遍的基本原理,它要求物理规律在所有惯性系中看来都相同. 惯性系彼此可作等速直线运动,同一物理量在不同惯性系取值可不同,并按一定方式在各惯性系间变换. 这种变换通称洛伦兹变换. 其中最基本的是时空坐标的洛伦兹变换. 设同一事件在惯性系 S 中看发生在 t 时刻,直线正交坐标为(x,y,z)处,在惯性系 S′中看发生在 t'时刻,直线正交坐标为(x',y',z')处. 设两个坐标系在 $t'=t=0$ 时刻重合,S′沿 x 方向相对 S 以速度 v 运动,它们之间的洛伦兹变换为

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' &= y, \quad z' = z, \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned}\right\} \tag{1.147}$$

其中 c 为真空中的光速(1.89). 由于变换是线性的,在两边求差分可得两事件时空

坐标差在惯性系 S 和 S′间的洛伦兹变换

$$\left.\begin{aligned} \Delta x' &= \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \\ \Delta y' &= \Delta y, \qquad \Delta z' = \Delta z, \\ \Delta t' &= \frac{\Delta t - \dfrac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{1.148}$$

可以直接验证,这个变换保证

$$\begin{aligned} &(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2(\Delta t')^2 \\ &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2. \end{aligned} \tag{1.149}$$

设这两事件之一是光的发射,另一是光的接收,两事件间即为光的传播. 若在 S 系看,光速为 c,从而

$$\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}{\Delta t} = c,$$

上式右边为零. 这使它的左边也为零,因此

$$\frac{\sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2}}{\Delta t'} = c,$$

即 S′系中看光速也是 c. 光在各惯性系中传播速度的值同为 c,这便是光速不变原理. 人们是从 19 世纪末的迈克耳孙-莫雷[1]实验和与它相关的一类实验中认识这一原理的. 洛伦兹在此基础上建立的变换(1.147),便自然符合这一原理. 这一变换的另一重要性质是在 $v \ll c$ 的低速极限下还原成伽利略变换

$$\left.\begin{aligned} &x' = x - vt, \\ &y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t. \end{aligned}\right\} \tag{1.150}$$

低速极限下伽利略变换与实验相符甚好,在此极限下与伽利略变换一致便是与实验一致. (1.147)只是洛伦兹变换的一种表达形式. 一般的洛伦兹变换被定义为符合条件(1.149)的线性变换. 这个条件即是光速不变条件. 采用四维符号

$$x^1 \equiv x, \qquad x^2 \equiv y, \qquad x^3 \equiv z, \qquad x^0 \equiv ct, \tag{1.151}$$

条件(1.149)可表为

$$\eta_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}. \tag{1.152}$$

其中希腊字母标号 μ、ν 等从 0 到 3 取整数值,在一项中出现相同的上、下希腊字母标号便自动对它从 0 到 3 求和(爱因斯坦[2]求和约定),而

---

① A. A. Michelson and E. W. Morley, Phil. Mag. Dec. (1887).

② A. Einstein.

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{cases} 0, & 若\ \mu \neq \nu, \\ -1, & 若\ \mu = \nu = 0, \\ 1, & 若\ \mu = \nu = 1,2,3, \end{cases} \tag{1.153}$$

称为闵可夫斯基[①]度规. 将洛伦兹变换一般地写作

$$x'^{\mu} = a^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}, \tag{1.154}$$

代入(1.152)右边得

$$\eta_{\mu'\nu'} a^{\mu'}_{\ \mu} a^{\nu'}_{\ \nu} x^{\mu} x^{\nu} = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}.$$

此式对任意的 x^{μ}, x^{ν} 均成立,可见

$$\eta_{\mu'\nu'} a^{\mu'}_{\ \mu} a^{\nu'}_{\ \nu} = \eta_{\mu\nu}. \tag{1.155}$$

这便是洛伦兹变换系数的充分兼必要条件. 将(1.147)写成(1.154)的形式,变换系数为

$$\left.\begin{aligned} & a^0_{\ 0} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad a^0_{\ 1} = -\frac{\dfrac{v}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad a^0_{\ 2} = a^0_{\ 3} = 0, \\ & a^1_{\ 0} = -\frac{\dfrac{v}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad a^1_{\ 1} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad a^1_{\ 2} = a^1_{\ 3} = 0, \\ & a^2_{\ 0} = a^2_{\ 1} = a^2_{\ 3} = 0, \quad a^2_{\ 2} = 1, \\ & a^3_{\ 0} = a^3_{\ 1} = a^3_{\ 2} = 0, \quad a^3_{\ 3} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{1.156}$$

直接验证知它们符合条件(1.155). 若一量有四个分量,在 S 系中为 V^{μ}, $\mu=0,1,2,3$,在 S′系中为 V'^{μ}, $\mu=0,1,2,3$,设它们按(1.154)变换,即

$$V'^{\mu} = a^{\mu}_{\ \nu} V^{\nu}, \tag{1.157}$$

则称它们组成一反变四矢量. 时空坐标(1.151)即是一反变四矢量. 若一时空点的函数 Φ 取值与坐标系的选择无关,则称为一标量. 按(1.154),

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'^{\mu}} a^{\mu}_{\ \nu} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\nu}}. \tag{1.158}$$

若一量有四个分量,在 S 系中为 V_{μ}, $\mu=0,1,2,3$,在 S′系中为 V'_{μ}, $\mu=0,1,2,3$,设它们按(1.158)变换,即

$$V'_{\mu} a^{\mu}_{\ \nu} = V_{\nu}, \tag{1.159}$$

则称它们组成一协变四矢量. 标量对时空坐标的微商

$$\partial_{\mu} \Phi \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\mu}}, \qquad \mu = 0,1,2,3, \tag{1.160}$$

---

① H. Minkowski.

即组成一协变四矢量. 由于这对任意标量 Φ 都对,便称运算 $\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$, $\mu=0,1,2,3$,组成一协变四矢量. 类似地,可以变换性质

$$T'^{\mu\nu} = a^{\mu}{}_{\mu'} a^{\nu}{}_{\nu'} T^{\mu'\nu'} \tag{1.161}$$

定义二阶反变张量 $T^{\mu\nu}$, $\mu, \nu=0,1,2,3$;以变换性质

$$T'_{\mu\nu} a^{\mu}{}_{\mu'} a^{\nu}{}_{\nu'} = T_{\mu'\nu'} \tag{1.162}$$

定义二阶协变张量 $T_{\mu\nu}$, $\mu, \nu=0,1,2,3$;和以变换性质

$$T'^{\mu}_{\nu} a^{\nu}_{\nu'} = a^{\mu}_{\mu'} T^{\mu'}_{\nu'} \tag{1.163}$$

定义二阶混合张量 $T^{\mu}{}_{\nu}$, $\mu, \nu=0,1,2,3$. 以此类推,还可定义高阶张量. 而反变矢量和协变矢量则分别为一阶反变张量和一阶协变张量. 将(1.154)的逆变换写作

$$x^{\mu} = b^{\mu}{}_{\nu} x'^{\nu}, \tag{1.164}$$

将(1.154)再代入此式右边,得

$$x^{\mu} = b^{\mu}{}_{\nu} a^{\nu}{}_{\mu'} x^{\mu'}.$$

此式对任意四矢量 x^{μ}, $\mu=0,1,2,3$,成立,因而

$$b^{\mu}{}_{\nu} a^{\nu}{}_{\mu'} = \delta^{\mu}{}_{\mu'} = \begin{cases} 1, & 若\ \mu = \mu', \\ 0, & 若\ \mu \neq \mu'. \end{cases} \tag{1.165}$$

同理,将(1.164)代入(1.154)右边,得

$$x'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu} b^{\nu}{}_{\mu'} x'^{\mu'}$$

对任意四矢量 x'^{μ}, $\mu=0,1,2,3$,成立,因而

$$a^{\mu}{}_{\nu} b^{\nu}{}_{\mu'} = \delta^{\mu}{}_{\mu'} = \begin{cases} 1, & 若\ \mu = \mu', \\ 0, & 若\ \mu \neq \mu'. \end{cases} \tag{1.166}$$

此式与(1.165)一起,表明变换矩阵($a^{\mu}{}_{\nu}$)和($b^{\mu}{}_{\nu}$)互逆. 利用互逆关系(1.165)和(1.166)可将(1.157)、(1.159)、(1.161)、(1.162)和(1.163)分别改写为

$$V^{\mu} = b^{\mu}{}_{\nu} V'^{\nu}, \tag{1.167}$$

$$V'_{\mu} = V_{\nu} b^{\nu}{}_{\mu}, \tag{1.168}$$

$$T^{\mu\nu} = b^{\mu}{}_{\mu'} b^{\nu}{}_{\nu'} T'^{\mu'\nu'}, \tag{1.169}$$

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu'\nu'} b^{\mu'}{}_{\mu} b^{\nu'}{}_{\nu}, \tag{1.170}$$

和

$$T'^{\mu}{}_{\nu} = a^{\mu}{}_{\mu'} T^{\mu'}{}_{\nu'} b^{\nu'}{}_{\nu}, \tag{1.171}$$

$$T^{\mu}{}_{\nu} = b^{\mu}{}_{\mu'} T'^{\mu'}{}_{\nu'} a^{\nu'}{}_{\nu}. \tag{1.172}$$

比较(1.155)和(1.162)知($\eta_{\mu\nu}$)为一二阶协变张量,且在所有惯性系中取值相同. 由此可得相当于(1.170)的关系

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'} b^{\mu'}_{\mu} b^{\nu'}_{\nu}. \tag{1.173}$$

对任一反变矢量(V^{μ})可定义

$$V_{\mu} = \eta_{\mu\nu} V^{\nu}, \qquad \mu = 0,1,2,3. \tag{1.174}$$

在另一惯性坐标系 S' 中此量为

$$\begin{aligned} V'_\mu &= \eta_{\mu\nu} V'^\nu = \eta_{\mu\nu} a^\nu{}_{\nu'} V^{\nu'} \\ &= \delta^{\mu'}{}_\mu \eta_{\mu'\nu'} a^{\nu'}{}_\nu V^\nu \\ &= a^{\mu'}{}_{\mu''} b^{\mu''}_\mu \eta_{\mu'\nu'} a^{\nu'}{}_\nu V^\nu \\ &= b^{\mu''}{}_\mu \eta_{\mu''\nu} V^\nu = b^{\mu'}{}_\mu V_{\mu'}, \end{aligned}$$

在第二、第四、第五等号处分别用到(1.157)、(1.166)、(1.155). 与(1.168)比较知，(1.174)定义的(V_μ)为一协变四矢量. 它与原反变矢量(V^μ)可分别视为同一四矢量的协变形式和反变形式. 再定义反变度规

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & 若\ \mu \neq \nu, \\ -1, & 若\ \mu = \nu = 0, \\ 1, & 若\ \mu = \nu = 1,2,3. \end{cases} \tag{1.175}$$

直接验证知

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\mu'} = \delta^\mu{}_{\mu'}, \qquad \eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\mu'} = \delta_\mu{}^{\mu'} = \begin{cases} 1, & 若\ \mu = \mu', \\ 0, & 若\ \mu \neq \mu'. \end{cases} \tag{1.176}$$

此式作为 $\eta^{\mu\nu}$ 的线性非齐次方程，系数($\eta_{\mu\nu}$)排成的行列式为

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

因此有惟一解. 它就是(1.175). 可以等价地用(1.176)定义反变度规($\eta^{\mu\nu}$). 将它当作二阶反变张量，按变换(1.161)得它在另一惯性系 S' 中的值

$$\eta'^{\mu\nu} = a^\mu{}_{\mu'} a^\nu{}_{\nu'} \eta^{\mu'\nu'},$$

由此算得

$$\begin{aligned} \eta'^{\mu\nu}\eta_{\nu\mu'} &= a^\mu{}_\lambda a^\nu{}_\rho \eta^{\lambda\rho}\eta_{\nu\mu'} \\ &= a^\mu{}_\lambda a^\nu{}_\rho b^\kappa{}_\nu b^\sigma{}_{\mu'} \eta^{\lambda\rho}\eta_{\kappa\sigma} \\ &= a^\mu{}_\lambda b^\sigma{}_{\mu'} \eta^{\lambda\rho}\eta_{\rho\sigma} \\ &= a^\mu{}_\lambda b^\lambda{}_{\mu'} = \delta^\mu{}_{\mu'}. \end{aligned}$$

在第二、三、四、五等号处分别用了(1.173)、(1.165)、(1.176)、(1.166)诸式. 由方程(1.176)解的惟一性知

$$\eta'^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$$

由(1.175)表示. ($\eta^{\mu\nu}$)确为二阶反变张量，且在所有惯性系中取值相同. 由(1.176)和(1.174)得

$$V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu, \tag{1.177}$$

反变度规($\eta^{\mu\nu}$)将矢量的协变形式变为反变形式.

下面要用到的关系还有：两个反变矢量(U^μ)和(V^ν)可拼成一二阶反变张量$(T^{\mu\nu})=(U^\mu V^\nu)$；两个协变矢量$(U_\mu)$和$(V_\nu)$可拼成一二阶协变张量$(T_{\mu\nu})=(U_\mu V_\nu)$；一个反变矢量$(U^\mu)$和一个协变矢量$(V_\nu)$则可拼成一个混合张量$(T^\mu{}_\nu)=(U^\mu V_\nu)$. 这些都是显然的. 现在证明由一个混合张量$(T^\mu{}_\nu)$可组成标量

$$T^\mu{}_\mu \equiv T^0{}_0 + T^1{}_1 + T^2{}_2 + T^3{}_3, \tag{1.178}$$

它在洛伦兹变换下不变.

证 直接算得在另一惯性系 S′中此量为

$$\begin{aligned} T'^\mu{}_\mu &= a^\mu{}_\nu T^\nu{}_\rho b^\rho{}_\mu = \delta^\rho{}_\nu T^\nu{}_\rho \\ &= T^\nu{}_\nu, \end{aligned} \tag{1.179}$$

与在原惯性系 S 中的取值相同，因此确为标量. 证毕.

特别当$(T^\mu{}_\nu)$由二矢量(U^μ)和(V_ν)合成时，组成的标量

$$U^\mu V_\mu = \eta^{\mu\nu} U_\mu V_\nu = \eta_{\mu\nu} U^\mu V^\nu \tag{1.180}$$

称为二矢量的标量积.

运动物体沿运动方向的长度会发生洛伦兹收缩. 这从洛伦兹变换(1.148)可直接导得. 设一直尺沿 x 方向静置于 S′系中，并随 S′系沿 x 方向以速度 v 相对于 S 系运动. 它的长度可定义为同时测定的两端点 x 坐标之差. 在 S′系中它静止，两端点的 x 坐标不随时间改变，因此同时测定条件可以取消，可在不同时刻测两端点的 x 坐标，其差均等于它的长度. 在 S 系中它运动，不同时刻的 x 坐标不同，因此必须限定在同一时刻测两端点的 x 坐标，其差才是它的长度. 在(1.148)第一式右端置 $\Delta t=0$，$\Delta x=l$ 即它在 S 系中的长度，左端的 $\Delta x'=l_0$ 为它在 S′系中的长度，而不必顾虑 $\Delta t'$为多少. 代入(1.148)，整理后即得

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{1.181}$$

$l<l_0$ 即洛伦兹收缩.(1.148)的第二、三两式则表明，运动物体只沿运动方向收缩，与运动方向垂直的两个方向上长度不变. 因而体积的收缩为

$$\mathscr{V} = \mathscr{V}_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \tag{1.182}$$

$\mathscr{V}_0$ 为静止物体的体积，$\mathscr{V}$为同一物体以速度 v 运动时的体积.

介质对电磁场的影响恒可化为其中电荷电流分布的影响. 只有真空中的电动力学是基本的，介质中的电动力学可由真空电动力学，包括电磁场与电荷电流分布的作用，推导出来. 只须要求基本规律符合相对性原理，由基本规律导出的结果也必符合相对性原理. 下面探讨电磁场量的洛伦兹变换，看看真空电动力学在洛伦兹变换下是否保持不变. 为此先要看看电荷电流分布的洛伦兹变换.

设有一电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r},t)$和电流分布 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$，电流分布就是由电荷分布的变化引起的. 电荷运动的速度分布由$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$表示，则有

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t). \tag{1.183}$$

作这种描写时自然已选定了一个参考系，称空间固定坐标系. 在时空点$(\boldsymbol{r},t)$可取一以速度$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$相对空间固定坐标系作等速直线运动的惯性系，称为该时空点的局域静止坐标系. 在其中看 t 时刻$\boldsymbol{r}$ 处的电荷是不动的. 以 $\rho_0(\boldsymbol{r},t)$表示该时空点在局域静止坐标系中的电荷密度. 由于体积的洛伦兹收缩(1.182)，在空间固定坐标系看电荷密度成为

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\frac{\rho_0(\boldsymbol{r},t)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \tag{1.184}$$

v 为t 时刻$\boldsymbol{r}$ 处电荷相对空间固定坐标系运动速度$\boldsymbol{v}$ 的值. 再由(1.183)得

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\rho_0(\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.185}$$

$\rho_0(\boldsymbol{r},t)$为在一确定坐标系中的电荷密度，不存在坐标系间的变换问题，在所有坐标系中取同一值，因而是标量. 另一方面，设 t 时刻$\boldsymbol{r}$ 处电荷在 $\mathrm{d}t$ 时间中径矢增量为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，按(1.151)和(1.154)，

$$c\mathrm{d}t \quad 和 \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r}\equiv(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z) \tag{1.186}$$

为一四矢量的时间分量(零分量)和空间分量，而按(1.149)

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}\boldsymbol{r})^2-c^2(\mathrm{d}t)^2}=\mathrm{i}c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}t \tag{1.187}$$

为标量，其中 v 为速度$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$的值. 从其中除去常数 $\mathrm{i}c$，便得标量$\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}t$. 用它除(1.186)各分量，知

$$\frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \quad 和 \quad \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{1.188}$$

组成四矢量. 在各分量上乘标量 ρ_0 后与(1.184)和(1.185)比较可见 $c\rho(\boldsymbol{r},t)$和$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$组成一反变四矢量 $j^\mu(\boldsymbol{r},t)$，$\mu=0,1,2,3$，

$$\left.\begin{aligned} j^0(\boldsymbol{r},t)&=c\rho(\boldsymbol{r},t), & j^1(\boldsymbol{r},t)&=j_x(\boldsymbol{r},t),\\ j^2(\boldsymbol{r},t)&=j_y(\boldsymbol{r},t), & j^3(\boldsymbol{r},t)&=j_z(\boldsymbol{r},t). \end{aligned}\right\} \tag{1.189}$$

按(1.180)，它可与协变四矢量

$$\partial_0=\frac{\partial}{\partial x^0}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\qquad (\partial_1,\partial_2,\partial_3)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)=\nabla \tag{1.190}$$

组成标量

$$\partial_\mu j^\mu=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}, \tag{1.191}$$

这正是连续性方程(1.31)的左边.可见连续性方程只要在一个惯性系中成立,便在所有惯性系中成立,在洛伦兹变换下不变.

在实际情形中电荷电流分布可能有多种组分,每种组分有自己的载流子和运动方式,以上的讨论对每种组分分别成立.由于矢量运算是线性的,矢量的任意线性叠加仍是矢量,即仍按矢量方式在各坐标系间变换.各组分的电荷电流密度四矢量加起来,便是总电荷电流密度四矢量 $j^\mu(\boldsymbol{r},t)$,它与总电荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$和总电流密度矢量 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$间符合关系(1.189).

按(1.180)并借助(1.189)可用协变四矢量(∂_μ)组成标量

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \Box, \tag{1.192}$$

这正是达朗贝尔算符.**达朗贝尔算符在洛伦兹变换中不变**.用关系(1.88)可在真空中将电磁势方程(1.109)和(1.110)统一表为

$$\Box A^\mu = -\mu_0 j^\mu, \tag{1.193}$$

其中定义

$$A^0 \equiv \frac{\phi}{c}, \qquad (A^1,A^2,A^3) \equiv \boldsymbol{A}. \tag{1.194}$$

(1.193)右边为反变四矢量,当且只当左边也是反变四矢量时方程在洛伦兹变换下不变.达朗贝尔算符□既是标量,相对性原理便要求 A^μ, $\mu=0,1,2,3$,组成反变四矢量,即在惯性系间作洛伦兹变换(1.157).洛伦兹条件(1.120)现可表为

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{1.195}$$

显然在洛伦兹变换中不变.这就是称此条件为洛伦兹条件,此规范为洛伦兹规范的原因.顺便提一下,在时间-库仑规范中条件(1.134)和(1.121)同时满足,洛伦兹条件(1.120)便也满足.但时间-库仑规范不是洛伦兹规范,这是因为时间-库仑规范条件(1.134)和(1.121)并非在洛伦兹变换下不变的,在一个惯性系中成立在别的惯性系中却不成立.而洛伦兹条件则可在所有惯性系中成立.洛伦兹规范是对所有惯性系而言的.

至此已求得电磁势的洛伦兹变换,并证明了以电磁势表达的电动力学在洛伦兹变换下的不变性,从而符合相对性原理.虽然是采用洛伦兹规范证明的,由于电动力学的规范不变性,各种规范表达的电动力学内容等价.洛伦兹规范下电动力学符合相对性原理保证了任何规范下电动力学都符合相对性原理.只是其他规范下电动力学的形式未能直接显露它在洛伦兹变换下的不变性.

再看电磁场强的洛伦兹变换.它们与电磁势的关系由(1.100)和(1.96)表示.现在电磁势可表成四矢量(1.194).它的协变形式按(1.174)为

$$A_0 = -\frac{\phi}{c}, \qquad (A_1,A_2,A_3) = \boldsymbol{A}. \tag{1.196}$$

由此可组成二阶协变张量,它的诸分量定义为

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad \mu, \nu = 0,1,2,3. \tag{1.197}$$

这是一个反对称张量：

$$F_{\mu\nu} = - F_{\nu\mu}. \tag{1.198}$$

将电场强度和磁感应强度分别写为

$$\boldsymbol{\mathscr{E}} \equiv (\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \mathscr{E}_3), \qquad \boldsymbol{\mathscr{B}} \equiv (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \mathscr{B}_3), \tag{1.199}$$

将(1.100)、(1.96)和(1.197)、(1.196)比较知

$$\mathscr{E}_i = cF_{i0}, \qquad i = 1,2,3, \tag{1.200}$$

$$\mathscr{B}_1 = F_{23}, \qquad \mathscr{B}_2 = F_{31}, \qquad \mathscr{B}_3 = F_{12}. \tag{1.201}$$

原来电磁场强组成一反对称二阶协变张量. 它们在惯性系间作洛伦兹变换

$$F_{\mu\nu} = F'_{\mu'\nu'} a^{\mu'}_{\ \mu} a^{\nu'}_{\ \nu}. \tag{1.202}$$

采用(1.156)中的变换系数，按(1.200)和(1.201)将此式直接表成电磁场强的变换关系，得

$$\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_1', \qquad \mathscr{E}_2 = \frac{\mathscr{E}_2' + v\mathscr{B}_3'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \mathscr{E}_3 = \frac{\mathscr{E}_3' - v\mathscr{B}_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1.203}$$

$$\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_1', \qquad \mathscr{B}_2 = \frac{\mathscr{B}_2' - \frac{v}{c^2}\mathscr{E}_3'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \mathscr{B}_3 = \frac{\mathscr{B}_3' + \frac{v}{c^2}\mathscr{E}_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.204}$$

由于恒可将 S′系相对 S 系运动速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向称为方向 1，此二式实际上是普遍的. 将它们表成三维矢量的变换式，即是

$$\boldsymbol{\mathscr{E}} = \frac{\boldsymbol{\mathscr{E}}' - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathscr{B}}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{v^2} \cdot \boldsymbol{\mathscr{E}}', \tag{1.205}$$

$$\boldsymbol{\mathscr{B}} = \frac{\boldsymbol{\mathscr{B}}' + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathscr{E}}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{v^2} \cdot \boldsymbol{\mathscr{B}}'. \tag{1.206}$$

(1.205)右边第一项表示，随 S′系相对 S 系运动的磁场 $\boldsymbol{\mathscr{B}}'$ 在 S 系中感生出一项电场

$$-\frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathscr{B}}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow[\frac{v}{c} \to 0]{} -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathscr{B}}',$$

它在 $v \ll c$ 的低速极限下与伽利略变换的结果(1.49)一致. 要注意此处的 $\boldsymbol{v}$ 是 S′系相对 S 系的速度，而在(1.49)中 $\boldsymbol{v}$ 表示的是 S 系相对 S′系的速度，二者差一负号；(1.49)中的 $\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 为 S′系中的磁感应强度，此处用 $\boldsymbol{\mathscr{B}}'$ 表示. (1.206)右边第一项则

含运动电场感生的磁场

$$\frac{1}{c^2}\frac{\boldsymbol{v}\times\mathscr{E}'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\xrightarrow[\frac{v^2}{c^2}\to 0]{}\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\mathscr{E}'\xrightarrow[\frac{v}{c}\to 0]{}0.$$

借助变换(1.205)和(1.206)可求得匀速运动点电荷产生的电磁场而毋需求解麦克斯韦方程.设点电荷速度为$\boldsymbol{v}$,将 S′系原点取在点电荷上并随它一起匀速运动.将 S 系取得在 $t=t'=0$ 时刻与 S′系重合.点电荷在 S′中静止,从其中看径矢为 $\boldsymbol{r}'$的点上有静电场

$$\mathscr{E}'=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^3}\boldsymbol{r}', \tag{1.207}$$

q 为点电荷的电量.静止电荷不产生磁场,因而$\mathscr{B}'=0$.现在问在空间固定坐标系 S 中看,径矢为 $\boldsymbol{r}$ 的点上 t 时刻的电场强度$\mathscr{E}$和磁感应强度$\mathscr{B}$.为此要求出 S′系中看这一时空点的径矢$\boldsymbol{r}'$.S′系相对 S 系以匀速$\boldsymbol{v}$ 运动.若将$\boldsymbol{v}$ 的方向取为x 方向,它们的时空坐标间作洛伦兹变换(1.147).将此变换写成三维矢量形式便是

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}'&=\boldsymbol{r}+(\gamma-1)\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{v^2}\cdot\boldsymbol{r}-\gamma\boldsymbol{v}t,\\ t'&=\gamma\left(t-\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}\right),\end{aligned}\right\} \tag{1.208}$$

其中

$$\gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.209}$$

点电荷既在 S′系的原点,S′系中它的径矢 $\boldsymbol{r}_0'=0$.代入(1.208)第一式左端,整理后得

$$\gamma\boldsymbol{v}t=\boldsymbol{r}_0+(\gamma-1)\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{v^2}\cdot\boldsymbol{r}_0, \tag{1.210}$$

$\boldsymbol{r}_0$ 为 S 系中看 t 时刻点电荷的位置.代回(1.208)第一式右端,得

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{R}+(\gamma-1)\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{v^2}\cdot\boldsymbol{R}, \tag{1.211}$$

其中

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0 \tag{1.212}$$

为 S 系中一给定时刻由点电荷到 $\boldsymbol{r}$ 点的径矢量.为使运算整洁,引入三维幺张量

$$\boldsymbol{I}\equiv\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{z}_0, \tag{1.213}$$

$\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$ 和 $\boldsymbol{z}_0$ 为互相垂直的三个单位三维矢量.任意三维矢量 $\boldsymbol{V}$ 与它点乘均得自己:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{I}&=V_x\boldsymbol{x}_0+V_y\boldsymbol{y}_0+V_z\boldsymbol{z}_0=\boldsymbol{V},\\ \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{V}&=\boldsymbol{x}_0V_x+\boldsymbol{y}_0V_y+\boldsymbol{z}_0V_z=\boldsymbol{V},\end{aligned}\right\} \tag{1.214}$$

其中

$$V_x = \boldsymbol{x}_0 \cdot \boldsymbol{V}, \qquad V_y = \boldsymbol{y}_0 \cdot \boldsymbol{V}, \qquad V_z = \boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{V}$$

为矢量 $\boldsymbol{V}$ 以$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{z}_0)$为坐标架的分量. 将(1.211)代入(1.207)后再代入(1.205),用(1.214)和(1.209)得

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= \left[\gamma \boldsymbol{I} + (1-\gamma)\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{v^2}\right]\cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^3}\left[\boldsymbol{I} + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{v^2}\right]\cdot \boldsymbol{R} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^3}\left\{\gamma\boldsymbol{I} + [\gamma(\gamma-1) + 1 - \gamma]\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{v^2} - (1-\gamma)^2\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{v^2}\right\}\cdot\boldsymbol{R} \\ &= \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0 r'^3}\boldsymbol{R},\end{aligned} \tag{1.215}$$

再代入(1.206),用(1.88)得

$$\mathscr{B} = \frac{\gamma}{c^2}\boldsymbol{v}\times\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^3}\boldsymbol{r}' = \frac{\mu_0 q\gamma}{4\pi r'^3}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}'. \tag{1.216}$$

在S系中 $\boldsymbol{r}'$由(1.211)定义. 这两个表达式都保持了超距作用的形式. 麦克斯韦方程是微分方程,表明电磁场的变化是逐点传递的而不是超距的. 不过这种逐点传递的最后结果可具超距的形式.

在(1.75)~(1.78)中令 $\epsilon=\epsilon_0, \mu=\mu_0$,借助(1.74)和(1.88)可得真空中的麦克斯韦方程

$$\nabla\cdot\mathscr{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{1.217}$$

$$\nabla\cdot\mathscr{B} = 0, \tag{1.218}$$

$$\nabla\times\mathscr{E} = -\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial t}, \tag{1.219}$$

$$\nabla\times\mathscr{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}. \tag{1.220}$$

借助(1.200)和(1.201)可将这组方程表成反对称张量 $F_{\mu\nu}$的方程. 其中(1.217)和(1.220)共有四个分量方程,可表为

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu, \qquad \mu = 0,1,2,3. \tag{1.221}$$

$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\mu'}\eta^{\nu\nu'}F_{\mu'\nu'}$组成二阶反对称反变张量. (1.218)和(1.219)合起来也是四个分量方程

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \tag{1.222}$$

由 $F_{\mu\nu}$的反对称性可推断此式左边对每一对下标都反对称,称为全反对称的. 由于三个下标地位对等,可选其中任一对,例如 μ 和 ν,来检验这一陈述. 交换 μ 和 ν,此式左边成为

$$\partial_\lambda F_{\nu\mu} + \partial_\nu F_{\mu\lambda} + \partial_\mu F_{\lambda\nu} = -\partial_\lambda F_{\mu\nu} - \partial_\nu F_{\lambda\mu} - \partial_\mu F_{\nu\lambda},$$

与原式相比恰只改了号.全反对称性使(1.222)左边在有两个下标取值相同的情况下为零,整个方程成为平庸恒等式 $0=0$.(1.222)只当三个下标 λ、μ 和 ν 取值各不相同时才不是平庸的.这三个下标都只能在 0、1、2 和 3 间取值.(1.222)中的非平庸关系的数目便是三个对等下标在这四个值中取三个不同值的方式数,也就是组合数 $C_3^4=4$.在这种意义上(1.222)只是四个分量方程.

将表达式(1.197)代入(1.222)左边,得到 A_λ、A_μ 和 A_ν 的二阶微商的组合.其中含 A_λ 的项为

$$\frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu}-\frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x^\nu \partial x^\mu}=0.$$

由于下标 λ、μ 和 ν 完全对等,含 A_μ 和 A_ν 的项必也为零.(1.222)左边为零,再次得到平庸恒等式 $0=0$.可见在已知关系(1.197)的前提下(1.222)已不必要.此事也可反过来陈述:(1.197)是反对称张量($F_{\mu\nu}$)的方程(1.222)的解.对符合方程(1.222)的反对称张量($F_{\mu\nu}$)必存在四维矢量(A_μ)使(1.197)成立.

方程(1.221)和(1.222)的形式很对称,使人直觉它们在洛伦兹变换下会是不变的.为确证这一点,再补充一些张量代数的知识.4^{n+m} 个量 $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}$,其中 $\mu_i,\nu_j=0,1,2,3,i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m$,若在洛伦兹变换(1.154)中按

$$T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}=a^{\mu_1}_{\ \mu_1'}a^{\mu_2}_{\ \mu_2'}\cdots a^{\mu_n}_{\ \mu_n'}T^{\mu_1'\mu_2'\cdots\mu_n'}_{\nu_1'\nu_2'\cdots\nu_m'}b^{\nu_1'}_{\ \nu_1}b^{\nu_2'}_{\ \nu_2}\cdots b^{\nu_m'}_{\ \nu_m} \tag{1.223}$$

变换,则称它们组成一 n 阶反变 m 阶协变的四维张量 $\boldsymbol{T}$,(1.223)便是这个张量的洛伦兹变换.张量的性质由这个变换决定.可以看出,上标 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 的次序以及下标 $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_m$ 的次序并不影响这个变换,可见张量与上标和下标的排列次序无关.由于(1.223)为线性齐次变换,同阶张量的任意线性组合的结果仍为该阶张量.同样由于洛伦兹变换(1.223)为线性齐次的,若一张量在某惯性系中各分量均为零,经此变换后得到的任何其他惯性系中此张量的各分量也均为零.称各分量均为零的张量等于零.将方程表为张量等于零的形式称为表成张量形式.表成张量形式的方程在洛伦兹变换下不变,符合相对性原理.

(1.222)左边三项各为一三阶协变张量的同一分量.它们的和,即(1.222)左边,便是一三阶协变张量的该分量.(1.222)表示的是这个张量为零,即已表成张量形式,在洛伦兹变换下不变.

由 n 阶反变 m 阶协变张量($T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}\mu_n}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{m-1}\nu_m}$)的诸分量可组成 4^{n+m-2} 个量

$$S^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{m-1}}\equiv T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}\mu}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{m-1}\mu}. \tag{1.224}$$

按(1.223)此量的洛伦兹变换为

$$\begin{aligned}S'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{m-1}}&\equiv T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}\mu}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{m-1}\mu}\\&=a^{\mu_1}_{\ \mu_1'}a^{\mu_2}_{\ \mu_2'}\cdots a^{\mu_{n-1}}_{\ \mu_{n-1}'}a^{\mu}_{\ \mu'}T^{\mu_1'\mu_2'\cdots\mu_{n-1}'\mu'}_{\nu_1'\nu_2'\cdots\nu_{m-1}'\nu'}b^{\nu_1'}_{\ \nu_1}b^{\nu_2'}_{\ \nu_2}\cdots b^{\nu_{m-1}'}_{\ \nu_{m-1}}b^{\nu'}_{\ \mu}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a^{\mu_1}{}_{\mu_1'} a^{\mu_2}{}_{\mu_2'} \cdots a^{\mu_{n-1}}{}_{\mu_{n-1}'} T^{\mu_1'\mu_2'\cdots\mu_{n-1}'\mu'}{}_{\nu_1'\nu_2'\cdots\nu_{m-1}'\nu'} b^{\nu_1'}{}_{\nu_1} b^{\nu_2'}{}_{\nu_2} \cdots b^{\nu_{m-1}'}{}_{\nu_{m-1}} \delta^{\nu'}{}_{\mu'} \\
&= a^{\mu_1}{}_{\mu_1'} a^{\mu_2}{}_{\mu_2'} \cdots a^{\mu_{n-1}}{}_{\mu_{n-1}'} S^{\mu_1'\mu_2'\cdots\mu_{n-1}'}{}_{\nu_1'\nu_2'\cdots\nu_{m-1}'} b^{\nu_1'}{}_{\nu_1} b^{\nu_2'}{}_{\nu_2} \cdots b^{\nu_{m-1}'}{}_{\nu_{m-1}},
\end{aligned}
\tag{1.225}
$$

表明($S^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{m-1}}$)为一 $n-1$ 阶反变 $m-1$ 阶协变张量.由 $\boldsymbol{T}$ 到 $\boldsymbol{S}$ 的这种降阶运算称为收缩.(1.221)左边就是二阶反变一阶协变张量($\partial_\lambda F^{\mu\nu}$)收缩所得反变矢量的 μ 分量.此方程表示两个反变矢量相等,是矢量方程.由于所有反变矢量作同一洛伦兹变换,矢量方程在洛伦兹变换下不变.此式符合相对性原理.

§1.7 电磁场的能量和动量,坡印亭[①]能流密度矢量,麦克斯韦应力张量,四维能量动量张量

电磁力(1.90)作用于自由电荷会改变它的动量.若认为自由电荷与电磁场组成的总系统动量守恒,则应设电磁场也有动量.在它改变自由电荷动量的同时自身动量也作相应改变,以使系统的总动量不变.电磁力会对自由电荷作功.按(1.90)功率为

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\mathscr{E}}. \tag{1.226}$$

若认为自由电荷与电磁场组成的总系统能量守恒,则应设电磁场也有能量.在它改变自由电荷能量的同时自身能量也作相应改变,以使系统的总能量不变.对一个电荷电流密度的分布 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$,力密度为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) \times \boldsymbol{\mathscr{B}}(\boldsymbol{r},t), \tag{1.227}$$

功率密度为

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) \cdot \boldsymbol{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r},t), \tag{1.228}$$

末一等式用到(1.183).如果电荷电流密度分布含多种组分,即若有多种载流子和载流子的多种运动方式,此二式对每一种组分成立.电磁场对整个电荷电流密度分布的总力密度和总功率密度为此二式对各组分的和.由于二式右边对 ρ 和 $\boldsymbol{j}$ 的关系是线性的,求和的结果只是将各组分的电荷密度和电流密度矢量分别加起来.因此,如果将 ρ、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 分别理解为电荷电流密度分布的总电荷密度、总电流密度矢量和电磁场对自由电荷作用的总力密度,(1.227)仍然成立,而总功率密度仍为 $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{\mathscr{E}}$.依次用(1.73)、恒等式

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\mathscr{E}} \times \boldsymbol{\mathscr{H}}) = (\nabla \times \boldsymbol{\mathscr{E}}) \cdot \boldsymbol{\mathscr{H}} - (\nabla \times \boldsymbol{\mathscr{H}}) \cdot \boldsymbol{\mathscr{E}}、 \tag{1.229}$$

和(1.72),得功率密度

$$\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{\mathscr{E}} = (\nabla \times \boldsymbol{\mathscr{H}}) \cdot \boldsymbol{\mathscr{E}} - \frac{\partial \boldsymbol{\mathscr{D}}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\mathscr{E}}$$

---

① Poynting.

$$= -\left[\nabla \cdot (\mathscr{E} \times \mathscr{H}) + \frac{\partial \mathscr{D}}{\partial t} \cdot \mathscr{E} + \frac{\partial \mathscr{B}}{\partial t} \cdot \mathscr{H}\right]. \tag{1.230}$$

采用电磁物态方程(1.74)并设其中 ϵ 和 μ 均不随时间变化,可由此得

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{j} \cdot \mathscr{E} = 0, \tag{1.231}$$

其中

$$U = \frac{1}{2}(\mathscr{E} \cdot \mathscr{D} + \mathscr{H} \cdot \mathscr{B}), \tag{1.232}$$

$$\boldsymbol{S} = \mathscr{E} \times \mathscr{H}. \tag{1.233}$$

(1.231)有简单解释.在 $\boldsymbol{j} \cdot \mathscr{E} = 0$ 的条件下它成为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{S} = 0. \tag{1.234}$$

这是量

$$E = \int_{\mathscr{V}} U \mathrm{d}\mathscr{V} \tag{1.235}$$

的连续性方程,表示 E 守恒.在作功功率密度为零条件下的守恒量应是能量.这提示 E 为体积 $\mathscr{V}$ 内的电磁场能量,$U(\boldsymbol{r}, t)$ 为 t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 点的电磁场能量密度,而 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t)$ 则为 t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 点的电磁场能量流密度矢量.若 $\boldsymbol{S} = 0$,(1.231)成为

$$\boldsymbol{j} \cdot \mathscr{E} = -\frac{\partial U}{\partial t},$$

将此式两边在体积 $\mathscr{V}$ 内积分,并用定义(1.235)得

$$\int_{\mathscr{V}} \boldsymbol{j} \cdot \mathscr{E} \mathrm{d}\mathscr{V} = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}.$$

它表明在此条件下电磁场在体积 $\mathscr{V}$ 内作的功等于 E 的减少,从而确证了 E 为体积 $\mathscr{V}$ 内电磁场能量的解释.将完整的(1.231)式在体积 $\mathscr{V}$ 内积分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathscr{V}} U \mathrm{d}\mathscr{V} + \int_{\mathscr{V}} \boldsymbol{j} \cdot \mathscr{E} \mathrm{d}\mathscr{V} = -\int_{s} \boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{1.236}$$

表明体积 $\mathscr{V}$ 内电磁场能的增加与电磁场作的功之和恰等于从包围体积 $\mathscr{V}$ 的表面 s 流入该体积的能量.这也映证了(1.233)定义的 $\boldsymbol{S}$ 为电磁场能量流密度矢量的解释.(1.231)类型的方程为连续性方程的推广,可用来表示非封闭系统的守恒关系.(1.233)定义的 $\boldsymbol{S}$ 又称为坡印亭矢量.

用(1.70)和(1.73)可将(1.227)写为

$$\boldsymbol{f} = (\nabla \cdot \mathscr{D})\mathscr{E} + (\nabla \times \mathscr{H}) \times \mathscr{B} - \frac{\partial \mathscr{D}}{\partial t} \times \mathscr{B}.$$

将(1.72)代入

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{D} \times \mathscr{B}) = \frac{\partial \mathscr{D}}{\partial t} \times \mathscr{B} + \mathscr{D} \times \frac{\partial \mathscr{B}}{\partial t}$$

得

$$\frac{\partial \mathscr{D}}{\partial t} \times \mathscr{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{D} \times \mathscr{B}) + \mathscr{D} \times (\nabla \times \mathscr{E}).$$

再代回上面的力密度表达式,并在右边加一项$\mathscr{H}\nabla\cdot\mathscr{B}=0$,得

$$f = \mathscr{E}\nabla \cdot \mathscr{D} + \mathscr{H}\nabla \cdot \mathscr{B} - \mathscr{D} \times (\nabla \times \mathscr{E}) - \mathscr{B} \times (\nabla \times \mathscr{H}) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{D} \times \mathscr{B}). \tag{1.237}$$

用 $i=1,2,3$ 表示三个互相垂直的空间方向,计算此式在其中一个方向上的分量.采用电磁物态方程(1.74)并设其中 ϵ 和μ 与空间位置无关,得

$$\begin{aligned}
&[\mathscr{E}\nabla\cdot\mathscr{D} - \mathscr{D} \times (\nabla\times\mathscr{E})]_1 \\
&= \epsilon[\mathscr{E}\nabla\cdot\mathscr{E} - \mathscr{E} \times (\nabla\times\mathscr{E})]_1 \\
&= \epsilon\left[\mathscr{E}_1\left(\frac{\partial\mathscr{E}_1}{\partial x^1} + \frac{\partial\mathscr{E}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial\mathscr{E}_3}{\partial x^3}\right) - \mathscr{E}_2\left(\frac{\partial\mathscr{E}_2}{\partial x^1} - \frac{\partial\mathscr{E}_1}{\partial x^2}\right) + \mathscr{E}_3\left(\frac{\partial\mathscr{E}_1}{\partial x^3} - \frac{\partial\mathscr{E}_3}{\partial x^1}\right)\right] \\
&= \epsilon\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(\mathscr{E}_1\mathscr{E}_1) + \frac{\partial}{\partial x^2}(\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2) + \frac{\partial}{\partial x^3}(\mathscr{E}_1\mathscr{E}_3) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^1}(\mathscr{E}_1{}^2 + \mathscr{E}_2{}^2 + \mathscr{E}_3{}^2)\right].
\end{aligned}$$

对 2、3 方向有类似结果,可一般表为

$$\begin{aligned}
[\mathscr{E}\nabla \cdot \mathscr{D} - \mathscr{D} \times (\nabla \times \mathscr{E})]_i &= \epsilon\sum_{i'=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\left(\mathscr{E}_i\mathscr{E}_{i'} - \frac{1}{2}\mathscr{E} \cdot \mathscr{E}\delta_{ii'}\right) \\
&= \sum_{i'=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\left(\mathscr{E}_i\mathscr{D}_{i'} - \frac{1}{2}\mathscr{E} \cdot \mathscr{D}\delta_{ii'}\right).
\end{aligned} \tag{1.238}$$

类似可得

$$\begin{aligned}
[\mathscr{H}\nabla \cdot \mathscr{B} - \mathscr{B} \times (\nabla \times \mathscr{H})]_i &= \mu\sum_{i'=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\left(\mathscr{H}_i \mathscr{H}_{i'} - \frac{1}{2}\mathscr{H} \cdot \mathscr{H}\delta_{ii'}\right) \\
&= \sum_{i'=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\left(\mathscr{H}_i \mathscr{B}_{i'} - \frac{1}{2}\mathscr{H} \cdot \mathscr{B}\delta_{ii'}\right).
\end{aligned} \tag{1.239}$$

于是可定义三维矢量

$$G \equiv \mathscr{D} \times \mathscr{B} \tag{1.240}$$

和三维张量$(\mathscr{P}_{ii'})$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{ii'} &\equiv \epsilon\left(\mathscr{E}_i\mathscr{E}_{i'} - \frac{1}{2}\mathscr{E} \cdot \mathscr{E}\delta_{ii'}\right) + \mu\left(\mathscr{H}_i\mathscr{H}_{i'} - \frac{1}{2}\mathscr{H} \cdot \mathscr{H}\delta_{ii'}\right) \\
&= \mathscr{E}_i\mathscr{D}_{i'} + \mathscr{H}_i\mathscr{B}_{i'} - \frac{1}{2}(\mathscr{E} \cdot \mathscr{D} + \mathscr{H} \cdot \mathscr{B})\delta_{ii'}, \qquad i, i' = 1,2,3,
\end{aligned} \tag{1.241}$$

将(1.237)的分量形式写成

$$\frac{\partial G_i}{\partial t} + f_i = \sum_{i'=1}^{3} \frac{\partial \mathscr{P}_{ii'}}{\partial x^{i'}}, \qquad i = 1,2,3. \tag{1.242}$$

f 既是电磁场作用在自由电荷分布上的力密度,便等于电磁场作用下自由电荷分布的动量密度随时间的变化率.(1.242)左边与它直接相加的$\frac{\partial G}{\partial t}$的自然解释就应当是某种动量密度 G 随时间的变化率.从表达式(1.240)看,G 只与电磁场量有

关,应解释为电磁场的动量密度.(1.242)左边的和为电磁场与自由电荷分布组成的总系统在电磁场作用下动量密度随时间的变化率.它的右边便应是电磁场作用在这个总系统上的力密度.与弹性力学对比可将$(\mathscr{P}_{ii'})$当作应力张量,因而称为麦克斯韦应力张量.

以上陈述中将系统分为两部分,一部分是电磁场,另一部分是自由电荷电流分布.介质没有当作独立自由度考虑.其中的束缚电荷电流由于电磁场的存在而发生的能量动量变化都作为电磁场能量动量的一部分,包含在(1.232)定义的 U 和(1.240)定义的 $\boldsymbol{G}$ 中了.这自然是一种近似,介质作为大块物质,各部分的运动状态不会完全跟随电磁场.其中还可能发生能量耗散和热激发.介质实际上有自己的自由度.只当介质自由度被冻结的条件下,以上陈述才可能正确.即使在这种条件下,电磁物态方程也不一定具有(1.74)的简单形式,而即使可用(1.74)其中的 ϵ 和 μ 也不一定是常数.可见以上陈述远不是普遍正确的,要小心判定它的适用范围和适用程度.介质中的经典电动力学并非一个完全研究清楚了的领域.在各种具体条件下仍然有丰富的内容和有趣的课题待人研究.

然而有一种情形,其中以上陈述完全适用,即真空情形.这里没有介质,(1.74)也完全正确.如前所述,即使有介质也可不分束缚电荷和自由电荷,将一切电荷密度都包含在(1.70)右边的 ρ 中,一切电流密度都包含在(1.73)右边的 $\boldsymbol{j}$ 中.这样,真空电动力学就成为普遍适用的,介质中的电动力学成为它的推论,由它判断在有介质的各种条件下电磁物态方程为何,(1.74)适用范围和适用程度为何.这是一个基本理论,在一切量子现象可忽略的条件下适用.在这一理论中,电磁场本身(不含介质部分)有能量和动量,能量密度为(1.232)定义的 U,动量密度为(1.240)定义的 $\boldsymbol{G}$.定义中$\mathscr{D}$、$\mathscr{B}$与$\mathscr{E}$、$\mathscr{H}$的关系由(1.74)表达,而常数 ϵ 和 μ 则分别为它们的真空值,即(1.7)表示的 ϵ_0 和(1.22)表示的 μ_0.这一理论还是在洛伦兹变换下不变的.定义四维张量$(T_{\mu\nu})$,

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\mu_0}\left(F_{\mu\mu'}F_{\nu\nu'}\eta^{\mu'\nu'} - \frac{1}{4}F_{\mu'\nu'}F^{\mu'\nu'}\eta_{\mu\nu}\right), \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3. \quad (1.243)$$

这是一个对称张量,

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}. \quad (1.244)$$

由(1.200)、(1.201)、(1.74)和(1.88)可认出它的空间分量恰与麦克斯韦应力张量(1.241)反号:$T_{ii'} = -\mathscr{P}_{ii'}, i, i' = 1,2,3$;时间分量

$$T_{00} = \frac{1}{2}(\mathscr{E}\cdot\mathscr{D} + \mathscr{H}\cdot\mathscr{B}) = U \quad (1.245)$$

为电磁场的能量密度;时空和空时分量

$$T_{0i} = T_{i0} = -c(\mathscr{D}\times\mathscr{B})_i = -\frac{1}{c}(\mathscr{E}\times\mathscr{H})_i$$

$$= -cG_i = -\frac{1}{c}S_i \tag{1.246}$$

为常数乘电磁场的动量密度或能流密度.这个张量称为电磁场的能量动量张量.再定义一个四矢量(f_μ),

$$f_\mu \equiv F_{\mu\nu} j^\nu, \qquad \mu = 0,1,2,3, \tag{1.247}$$

其中电流密度四矢量(j^ν)由(1.189)定义.用(1.200)和(1.201)可认出它的三个空间分量(f_1, f_2, f_3)就是电磁力密度(1.227)的三个分量,而时间分量

$$f_0 = F_{0\nu} j^\nu = -\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\mathscr{E}} \tag{1.248}$$

为常数乘电磁功率密度(1.230).用这些四维矢量和张量可将能量守恒(1.231)和动量守恒(1.242)等四个关系统一地表为

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = -f^\mu, \qquad \mu = 0,1,2,3. \tag{1.249}$$

这是一个矢量关系,在洛伦兹变换下不变,符合相对性原理.

习 题 一

1. 用高斯定理(1.14)证明,均匀介质中静止点电荷 q 周围的各向同性电场分布由库仑定律(1.9)表示.说明各向同性条件在证明中的意义.

2. 设有一以某点为中心的各向同性电荷分布.以 $\boldsymbol{r}$ 表示从中心到一点的径矢,设点的电荷密度 $\rho(r)$只与 $\boldsymbol{r}$ 的长度有关而与它的方向无关.绕中心以 r 为半径的球内有电荷

$$Q(r) = \int_0^r \rho(r')4\pi r'^2 \mathrm{d}r'. \tag{1.250}$$

试证此电荷分布所在的均匀介质中各向同性的电场强度分布为

$$\boldsymbol{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon r^2}\boldsymbol{r}_0, \tag{1.251}$$

$\boldsymbol{r}_0$ 为 $\boldsymbol{r}$ 方向单位矢量,ϵ 为介质介电常数.讨论这结果的意义.

3. 一半径为 R 介电常数为 ϵ 均匀荷电 Q 的球置于真空中.试证以球心为原点球外 $\boldsymbol{r}$ 处的电场强度为

$$\boldsymbol{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}_0, \tag{1.252}$$

静电势为

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}; \tag{1.253}$$

球内 $\boldsymbol{r}$ 处的电场强度为

$$\boldsymbol{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^3}\boldsymbol{r}, \tag{1.254}$$

静电势为

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{8\pi\epsilon R^3}\left[\left(1 + 2\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)R^2 - r^2\right]. \tag{1.255}$$

4. 一条无限长直细导线中有恒定电流 I. 试用安培定律的积分形式(1.45)证明,导线周围具有绕导线螺旋对称和沿导线平移对称的磁感应强度分布为

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu I}{4\pi r_{\perp}} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{r}), \tag{1.256}$$

其中 $r_{\perp}$ 为 $\boldsymbol{r}$ 点与导线的垂直距离,$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r})$ 为 $\boldsymbol{r}$ 点到导线的垂足为心 $r_{\perp}$ 为半径的圆周上 $\boldsymbol{r}$ 处的切向单位矢量并指绕电流的右手螺旋方向.

5. 一恒定柱对称电流分布,$\boldsymbol{r}$ 处电流密度矢量 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 与柱轴平行且只与该点到柱轴的垂直距离 $r_{\perp}$ 有关.

$$I(r_{\perp}) = \int_0^{r_{\perp}} j(r_{\perp}')2\pi r_{\perp}' \mathrm{d} r_{\perp}' \tag{1.257}$$

为绕中心轴半径为 $r_{\perp}$ 的柱内的电流强度. 试证绕中心轴螺旋对称且沿轴平移对称的磁感应强度分布为

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu I(r_{\perp})}{2\pi r_{\perp}} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{r}), \tag{1.258}$$

$\boldsymbol{t}$ 的定义与上题类似,只是将那里的细导线改为此处的中心轴. 讨论所得结果.

6. 如图 1-2,导线围成的矩形框置于均匀磁场中,一对边与磁场方向垂直,并绕框面内一条与此对边平行的轴转动. 在磁场不变的坐标系中看,导线内的载流子在洛伦兹力和导线约束力的合力作用下运动. 此合力对单位电荷绕框一周作的功 ϕ 也称为电动势. 试证

$$\phi = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \tag{1.259}$$

Φ 为框所围磁通量. 将此结果与法拉第定律(1.52)比较,并做讨论.

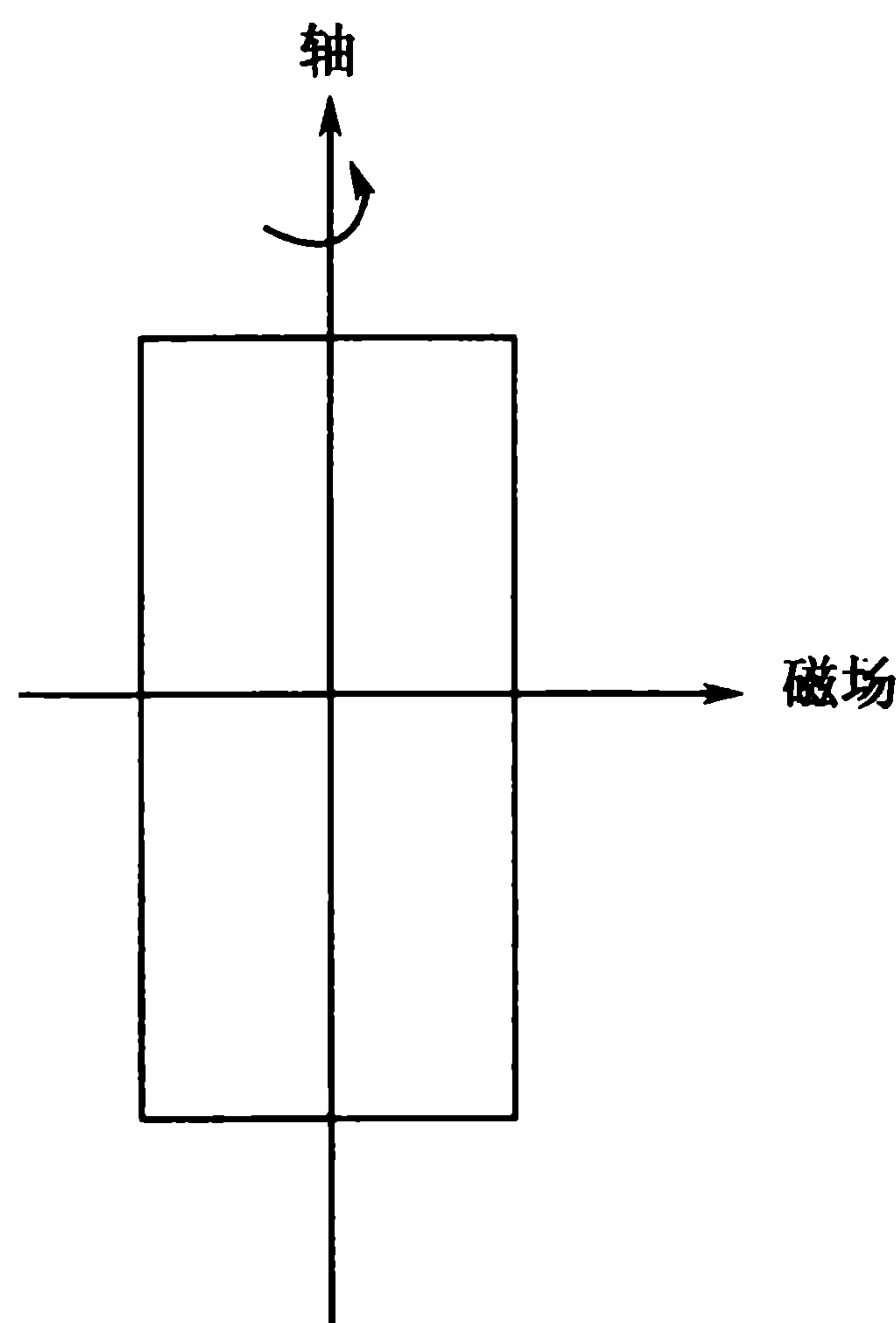


图 1-2 绕垂直于磁场方向旋转的导线框

7. 试证无源($\rho = 0, \boldsymbol{j} = 0$)真空中均匀电场或(和)均匀磁场不随时间改变. 讨论此结果的意义.

8. 试证,如在一个惯性系中看电磁场是均匀的则在任一惯性系中看电磁场都是均匀的.

9. 设在一惯性系中看无磁场,电场是均匀的. 试证在相对于这个惯性系沿电场方向等速运动的坐标系中看情形无任何变化,即也没有磁场,电场仍是均匀的,且电场强度与原惯性系中看到的一样. 又问在相对于这个惯性系垂直于电场方向匀速运动的坐标系中看情形如何?

10. 用 $(M^{\mu}{}_{\nu})$ 表 μ 行 ν 列元素为 $M^{\mu}{}_{\nu}$ 的矩阵,$|(M^{\mu}{}_{\nu})|$ 表这个矩阵的行列式. 试证洛伦兹变换(1.154)的系数行列式

$$|(a^{\mu}{}_{\nu})| = \pm 1, \tag{1.260}$$

其中取 $+1$ 的变换称固有洛伦兹变换,取 -1 的变换称非固有洛伦兹变换.

提示 将(1.155)两边的元素排成矩阵并计算它的行列式.

11. 试验证(1.147)为固有洛伦兹变换.

12. 试证坐标系转一固定角的变换为固有洛伦兹变换.

13. 试证时间反演变换

$$t' = -t, \qquad x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = z \tag{1.261}$$

和空间反演变换

$$t' = t, \qquad x' = -x, \qquad y' = -y, \qquad z' = -z \tag{1.262}$$

皆为非固有洛伦兹变换.

14. 一量若在固有洛伦兹变换中作张量的洛伦兹变换,在非固有洛伦兹变换中的变换结果与按张量洛伦兹变换的结果反号,则称赝张量.一阶赝张量称赝矢量,零阶赝张量称赝标量.试证四维全反对称符号

$$\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{若 } \kappa\lambda\mu\nu \text{ 为 } 0\ 1\ 2\ 3 \text{ 的偶排列}, \\ 0, & \text{若此四标号中有两个取值相同}, \\ -1, & \text{若 } \kappa\lambda\mu\nu \text{ 为 } 0\ 1\ 2\ 3 \text{ 的奇排列} \end{cases} \tag{1.263}$$

组成四阶反变赝张量.

提示 注意行列式的定义和性质.

15. 试证

$$\widetilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3, \tag{1.264}$$

组成二阶反变赝张量,其中 $F_{\kappa\lambda}$按(1.197)定义,写出这个赝张量与电场强度$\mathscr{E}$和磁感应强度$\mathscr{B}$的关系.

16. 试证方程(1.222)中的四个非平庸关系可表为

$$\partial_\nu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0, \qquad \mu = 0,1,2,3. \tag{1.265}$$

这是一个赝矢量关系,在洛伦兹变换下不变.

第二章　静　电　学

§2.1　静电学的研究对象与基本方程,惟一性定理

静电学研究静止电荷分布产生的**静电场**和**静电场**对电荷的作用,也研究电荷保持静止的条件.电荷静止,**电荷密度** $\rho(\boldsymbol{r})$与时间无关,电流密度矢量 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=0$.无磁场,$\mathscr{H}=\mathscr{B}=0$,静电场中$\mathscr{E}(\boldsymbol{r})$和$\mathscr{D}(\boldsymbol{r})$均与时间无关,$\dfrac{\partial\mathscr{D}}{\partial t}=0$.在这些条件下,非平庸的麦克斯韦方程只剩两个,即

$$\nabla\cdot\mathscr{D}=\rho,\qquad \nabla\times\mathscr{E}=0. \tag{2.1}$$

第二个方程只是表明静电场有势 $\phi(\boldsymbol{r})$,使

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{r})=-\nabla\phi(\boldsymbol{r}). \tag{2.2}$$

在实际的静电学问题中介质常是分区均匀的,每一区内**(1.74)第一式中的** ϵ **为常**数.将(2.2)代入该式右边,将所得的$\mathscr{D}$再代到(2.1)第一式左边即得

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\epsilon}. \tag{2.3}$$

静电势 $\phi(\boldsymbol{r})$满足泊松方程,源为$\dfrac{\rho}{\epsilon}$.(2.1)还决定了 $\phi(\boldsymbol{r})$在两不同均匀介质交界面上的边条件.如图 2-1,s 为均匀介质 1 和 2 的界面,取一穿过界面的闭合回路$a_1b_1b_2a_2a_1$,按(2.1)第二式电场强度$\mathscr{E}$沿此回路的线积分为零.令 a_1b_1 和 a_2b_2 分别从两侧无穷靠近界面,设场强$\mathscr{E}$有界,它在 b_1b_2 段和 a_2a_1 段的线积分因这两线段长趋于零而趋于零.剩下的从 a_1 到 b_1 的线积分和从 b_2 到 a_2 的线积分按(2.2)分别为 $\phi_{a_1}-\phi_{b_1}$和 $\phi_{b_2}-\phi_{a_2}$,其中 ϕ_{a_i}和ϕ_{b_i},$i=1,2$,分别为 a_i 点和b_i 点的静电势.回路积分为零要求

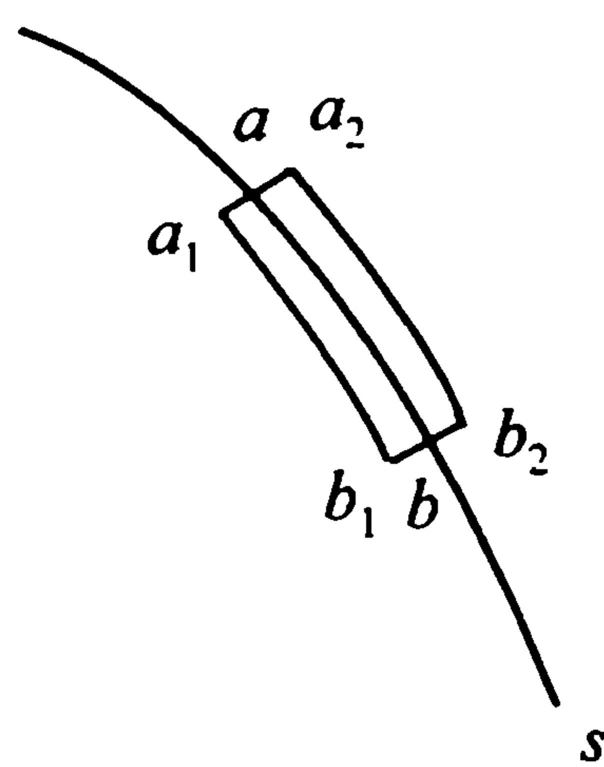


图 2-1　绕边界的回路

$$\phi_{a_1}-\phi_{b_1}=\phi_{a_2}-\phi_{b_2}, \tag{2.4}$$

表明静电势 ϕ 在界面两侧沿界面的变化相同.由于(2.2)定义的静电势可加减一任意常数,(2.4)便表示恒可取静电势 $\phi(\boldsymbol{r})$在界面上处处连续.用 $\phi_i(\boldsymbol{r})$表示第 i 均匀介质中的静电势,在 1、2 两介质的界面上

$$\phi_1(\boldsymbol{r})=\phi_2(\boldsymbol{r}). \tag{2.5}$$

又如图 2-2,取一封闭曲面,它包括界面两侧平行界面的面元 Δs_1 和 Δs_2 和联结此二面元周线的环面.将(2.1)第一式的积分形式(1.14)用于此封闭曲面.令 Δs_1 和 Δs_2 从两侧分别无穷靠近界面,联结它们的环面面积趋于零.设$\mathscr{D}$有界,它在此环面上的面积分也就趋于零.在这一极限过程中面元 Δs_1 和 Δs_2 都趋于界面上的面元 Δs.称垂直于界面由介质 1 指向介质 2 的法向为 n,介质 i 中标势 ϕ_i 沿此法向坐标的微商为$\frac{\partial \phi_i}{\partial n}$,介电常数为 ϵ_i, $i=1,2$,在面元 Δs_1 和 Δs_2 上用积分的中值定理,由(1.14)得

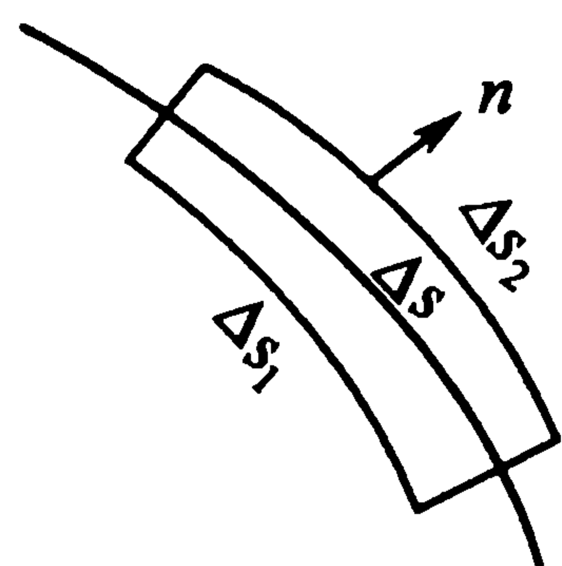


图 2-2 包围界面元 Δs 的封闭面

$$-\left(\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n}\right)\Delta s = \Delta Q,$$

ΔQ 为界面元 Δs 上的电荷.这里$\frac{\partial \phi_1}{\partial n}$和$\frac{\partial \phi_2}{\partial n}$分别在 Δs_1 和 Δs_2 上某处取值.在此式两边除以 Δs 后令 $\Delta s \to 0$,于是在界面上一点得到

$$\epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = \sigma, \tag{2.6}$$

其中

$$\sigma \equiv \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} \equiv \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta s} \tag{2.7}$$

为界面上该点的面电荷密度.(2.5)和(2.6)为不同均匀介质交界面上静电势$\phi(\boldsymbol{r})$的边条件.它们和泊松方程(2.3)一起组成静电学的基本方程.在实际问题中介质占据的空间总是有限的,介质之外便是真空.因此要考虑介质与真空的界面.这只须将真空看作介电常数为 ϵ_0 的介质,泊松方程(2.3)和边条件(2.5)、(2.6)便分别适用于真空和真空与介质的界面.由于任何电场都会在导体中诱发电流,在静电平衡条件下(没有电流)导体中电场强度$\mathscr{E}$必处处为零.按(2.2),这使每一孤立导体内静电势 ϕ 必处处相同.是为静电学中的导体边条件.在静电系统未被封闭导体表面完全屏蔽的条件下静电场可向无穷远处延伸.在此条件下需无穷远处的边条件才能为泊松方程(2.3)定解.将电荷分布看成点电荷的集合,以它们为源的泊松方程应有一特解可表成点电荷库仑势(1.59)的叠加,相应的静电场强可表为库仑场(1.9)的叠加.这样的静电势和静电场在无穷远处均趋于零:

$$\phi(\boldsymbol{r}) \xrightarrow[r \to \infty]{} 0, \qquad \mathscr{E}(\boldsymbol{r}) \xrightarrow[r \to \infty]{} 0. \tag{2.8}$$

这便是**无穷远处静电势和静电场的边条件**.对一给定的电荷分布解得的符合此边条件的静电场称为**此电荷分布产生的静电场**.如果静电系统被一封闭导体表面包围,则用此表面上的导体边条件代替无穷远处的边条件(2.8),即要求在此表面上静电势 ϕ 为常数.由于恒可在静电势上加减一任意常数,可将封闭导体表面上的静电势置零,称为接地.代替(2.8)的边条件便是在封闭导体表面上

$$\phi = 0. \tag{2.9}$$

考虑一个静电系统，其中各绝缘介质上的电荷分布，介质表面和介质间界面上的面电荷分布，和各导体上的电势均给定．静电学问题便成为前述各边条件下求解泊松方程(2.3)的问题．这是一个明确的数学问题．现证明

惟一性定理　在上述边条件下泊松方程(2.3)的解是惟一的．

证　设 $\phi(\boldsymbol{r})$ 和 $\phi'(\boldsymbol{r})$ 是此问题的两个解．定义

$$F(\boldsymbol{r}) = \phi(\boldsymbol{r}) - \phi'(\boldsymbol{r}). \tag{2.10}$$

由于 ϕ 和 ϕ' 在界面都连续，其差 F 在界面也连续．将 ϕ 和 ϕ' 满足的边条件(2.6)相减得

$$\epsilon_1 \frac{\partial F_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial F_2}{\partial n} = 0, \tag{2.11}$$

其中 $F_1 = \phi_1 - \phi_1'$，$F_2 = \phi_2 - \phi_2'$．此式为 $F(\boldsymbol{r})$ 在介质间界面上的边条件．在导体上由于 ϕ 和 ϕ' 被置为同一值，$F = 0$．最后将 ϕ 和 ϕ' 满足的泊松方程相减得

$$\nabla^2 F = 0, \tag{2.12}$$

F 满足拉普拉斯方程．设 $\psi_1(\boldsymbol{r})$ 和 $\psi_2(\boldsymbol{r})$ 为任意两个二阶可微函数，对矢量 $\psi_1 \nabla \psi_2$ 在封闭曲面 s 上的面积分用矢量分析的高斯定理，得格林公式

$$\oint_s \psi_1(\nabla \psi_2) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\mathscr{V}} [\psi_1 \nabla^2 \psi_2 + (\nabla \psi_1) \cdot (\nabla \psi_2)] \mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{2.13}$$

体积分区域 $\mathscr{V}$ 为 s 所包围的空间．在第 i 均匀介质所占据的体积 $\mathscr{V}_i$ 中用此公式，置

$$\psi_1 = \epsilon_i F, \qquad \psi_2 = F,$$

注意拉普拉斯方程(2.12)，得

$$\oint_{s_i} \epsilon_i F(\nabla F) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\mathscr{V}_i} \epsilon_i (\nabla F)^2 \mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{2.14}$$

s_i 为 $\mathscr{V}_i$ 的表面．设 i 和 i' 两介质有共同界面 $s_{ii'}$，此式左边在此界面上属于介质 i 和 i' 的两项面积分之和为

$$\int_{s_{ii'}} F\left(\epsilon_i \frac{\partial F_i}{\partial n} - \epsilon_{i'} \frac{\partial F_{i'}}{\partial n}\right) \mathrm{d}s = 0, \tag{2.15}$$

这里用了边条件(2.11)和界面上 F 的连续性，法向 $\boldsymbol{n}$ 由界面的 i 侧指向 i' 侧．将(2.14)对所有介质，包括真空，求和，左边由于(2.15)只剩下在导体表面和无穷远处的面积分．在有限导体表面上的积分由于被积函数中的因子 $F = 0$ 而为零．在无穷远处的面积分略为复杂．设 ϕ 和 ϕ' 都按库仑势(1.59)的 $\frac{1}{r}$ 方式在无穷远处趋于零，F 也以同样的方式趋于零，∇F 则应按 $\frac{1}{r^2}$ 的方式趋于零．(2.14)左边面积分的被积函数在无穷远处以 $\frac{1}{r^3}$ 的方式趋于零，而积分面积则按 r^2 方式在无穷远处趋于无穷．二者相乘，可见面积分在无穷远处以 $\frac{1}{r}$ 的方式趋于零．(2.14)左边对所有介

质的和为零，使得右边的和

$$\sum_i \int_{\mathcal{V}_i} \epsilon_i (\nabla F)^2 \mathrm{d}\mathcal{V} = 0. \tag{2.16}$$

介质中 $\epsilon_i \neq 0$ 恒正，此式成立的充分兼必要条件为处处$\nabla F = 0$，F 为常数. 由于无穷远处 $F = 0$，或者在被封闭导体面屏蔽的条件下屏蔽导体上 $F = 0$，此常数为零. 处处 $F = 0$，即处处

$$\phi = \phi'. \tag{2.17}$$

静电问题的任意两个解彼此全同，解是惟一的. 证毕.

§2.2 电荷分布、静电势与静电场的多极展开

考虑均匀介质中的电荷分布、静电势和静电场. 将库仑势(1.59)改写为

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \mid}, \tag{2.18}$$

$\boldsymbol{r}'$为点电荷q 所在位置的径矢量. 将此点电荷移到 $\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{l}$ 处，在 $\boldsymbol{r}'$处放一$-q$ 点电荷. 在位移 $\boldsymbol{l}$ 很小的条件下两点电荷静电势之和可表为

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \boldsymbol{l} \cdot \nabla' \frac{1}{\mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \mid} = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \boldsymbol{l} \cdot \nabla \frac{1}{\mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \mid}, \tag{2.19}$$

$\nabla' = -\nabla$为对 $\boldsymbol{r}'$坐标的梯度算符. 令 $\boldsymbol{l} \to 0$ 却保持矢量

$$\mathscr{P} \equiv q\boldsymbol{l} \tag{2.20}$$

不变，并再置 $\boldsymbol{r}' = 0$，得

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathscr{P} \cdot \boldsymbol{r}_0}{4\pi\epsilon r^2}, \tag{2.21}$$

$\boldsymbol{r}_0 \equiv \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$为$\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量. 这种由两个相反点电荷组成的系统称为电偶极子. 它的总电荷为零，电性质由(2.20)定义的电偶极矩 $\mathscr{P}$表示. (2.21)为电偶极子的静电势，它的静电场为

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla \phi(\boldsymbol{r}) = \frac{3(\mathscr{P} \cdot \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}_0 - \mathscr{P}}{4\pi\epsilon r^3}. \tag{2.22}$$

仍称偶极子所在处的径矢量为 $\boldsymbol{r}'$，(2.21)成为

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathscr{P} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{4\pi\epsilon \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \mid^3}. \tag{2.23}$$

将此偶极子移到 $\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{l}'$处，在 $\boldsymbol{r}'$处放一电偶极矩为$-\mathscr{P}$的电偶极子. 在位移 $\boldsymbol{l}'$很小的条件下两偶极子电势之和可表为

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{l}' \cdot \nabla \frac{\mathscr{P} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{4\pi\epsilon \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \mid^3}. \tag{2.24}$$

令 $l' \to 0$ 却保持张量

$$Q \equiv \frac{1}{2}(\mathscr{P}l' + l'\mathscr{P}) \tag{2.25}$$

不变,并再置 $r' = 0$,得

$$\phi(r) = \frac{3r_0 \cdot Q \cdot r_0 - \mathrm{tr}Q}{4\pi\epsilon r^3}, \tag{2.26}$$

其中 $\mathrm{tr}Q \equiv Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz}$ 为二阶张量 Q 的阵迹.这种由两个相反电偶极子组成的系统称为电四极子.它的总电荷为零,总电偶极矩也是零,电性质由(2.25)定义的电四极矩 Q 表示.(2.26)为电四极子的静电势,它的静电场为

$$\mathscr{E}(r) = -\nabla\phi(r) = \frac{(15r_0 \cdot Q \cdot r_0 - 3\mathrm{tr}Q)r_0 - 6Q \cdot r_0}{4\pi\epsilon r^4}. \tag{2.27}$$

类似地,可定义电八极子和电八极矩,电 16 极子和电 16 极矩,……,一般地可定义电 2^l 极子和电 2^l 极矩,l 为自然数.不过这样定义的电多极子都是点状的,而电多极矩则可对任何电荷分布定义.(2.20)定义的电偶极矩和(2.25)定义的电四极矩只是一般定义的特例.

附录一已证明

$$g(r - r') = \frac{1}{4\pi|r - r'|} \tag{2.28}$$

为泊松方程(2.3)的格林函数,满足点源的泊松方程

$$\nabla^2 g(r - r') = -\delta(r - r'). \tag{2.29}$$

由它可得满足泊松方程(2.3)且在无穷远处趋于零的静电势

$$\phi(r) = \int \frac{\rho(r')}{4\pi\epsilon|r - r'|} \mathrm{d}\mathscr{V}', \tag{2.30}$$

r'为体积分 $\int \mathrm{d}\mathscr{V}'$ 的积分变量.由附录二中勒让德[①]多项式的母函数展开式(A2.15)知

$$\begin{aligned} \frac{1}{|r - r'|} &= (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\hat{\theta})^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r_>}\left[1 + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 - 2\frac{r_<}{r_>}\cos\hat{\theta}\right]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\hat{\theta}), \end{aligned} \tag{2.31}$$

$\hat{\theta}$ 为 r 和 r' 的夹角,$\mathrm{P}_l(\zeta)$ 为 ζ 的勒让德多项式,$r_>$ 为 r 与 r' 中的大者,$r_<$ 为其中的小者.用球谐函数的加法定理(A2.19)可将此式进一步分离变量为

---

① Legendre.

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi)\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta'\varphi'),\qquad(2.32)$$

$\theta\varphi$ 为 $\boldsymbol{r}$ 所指方位角，$\theta'\varphi'$ 为 $\boldsymbol{r}'$ 所指方位角. 代入(2.30)；注意体积元的球坐标表达式

$$\mathrm{d}\mathscr{V}'=r'^2\mathrm{d}r'\mathrm{d}\Omega',\qquad(2.33)$$

其中

$$\mathrm{d}\Omega'=\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi'\qquad(2.34)$$

为立体角元；定义

$$\rho_{lm}(r')=\int\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta'\varphi')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\Omega',\qquad(2.35)$$

积分范围为 4π 立体角；得

$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\epsilon}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}\left[\frac{1}{r^{l+1}}\int_0^r\rho_{lm}(r')r'^{l+2}\mathrm{d}r'\right.$$
$$\left.+r^l\int_r^{\infty}\rho_{lm}(r')r'^{1-l}\mathrm{d}r'\right]\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi).\qquad(2.36)$$

设电荷分布在一有限区域，将坐标原点取在此区域内的适当位置. 必存在足够大的数 R，$r>R$ 处 $\rho(\boldsymbol{r})=0$. R 的最小值称为电荷分布半径. 就用 R 表示此半径. $r>R$ 处(2.36)成为

$$\phi(\boldsymbol{r})=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{4\pi\epsilon r^{l+1}}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\sum_{m=-l}^{l}\mathscr{P}_{lm}^*\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi),\qquad(2.37)$$

其中

$$\mathscr{P}_{lm}^*\equiv\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int_0^R\rho_{lm}(r)r^{l+2}\mathrm{d}r$$
$$=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int r^l\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta\varphi)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V},\qquad(2.38)$$

最后的体积分遍及电荷分布的区域. 也可将坐标原点取在电荷分布区域之外，即无源区域的适当位置. 必存在足够小的数 R'，$r<R'$ 处 $\rho(\boldsymbol{r})=0$. R' 的最大值称为无源区半径. 就用 R' 表示此半径. $r<R'$ 处(2.36)成为

$$\phi(\boldsymbol{r})=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{4\pi\epsilon}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\sum_{m=-l}^{l}Q_{lm}^*\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi),\qquad(2.39)$$

其中

$$Q_{lm}^*\equiv\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int_{R'}^{\infty}\rho_{lm}(r)r^{1-l}\mathrm{d}r$$
$$=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int r^{-l-1}\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta\varphi)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V},\qquad(2.40)$$

最后的体积分遍及电荷分布的区域. 由于原点在此区域外，积分区域中 $r\neq0$，被积

函数无奇点.用球谐函数作基底的展开式称为谐和展开或多极展开.(2.36)即静电势的多极展开,(2.37)和(2.39)是它的两种具体情形.其中又以(2.37)最常用.有时静电势的多极展开即指此具体情形.对一给定 l, $m=l,l-1,l-2,\cdots,-l$,共可取 $2l+1$ 个不同值.对应 $\mathscr{P}_{ll},\mathscr{P}_{l\,l-1},\mathscr{P}_{l\,l-2},\cdots,\mathscr{P}_{l\,-l}$ 共 $2l+1$ 个量.以它们为分量的 $2l+1$ 重量称为电 2^l 极矩.这种称谓的合理性在于,$r^l Y_{lm}(\theta\varphi)$ 为笛卡儿坐标 x、y 和 z 的 l 次多项式.它和一分布乘积的体积分符合此分布的 2^l 极矩的习惯含义.由笛卡儿坐标 (x,y,z) 和球坐标 (r,θ,φ) 的关系

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi,\\ y &= r\sin\theta\sin\varphi,\\ z &= r\cos\theta, \end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

和球谐函数的定义(A2.3)知

$$Y_{00}(\theta\varphi)=\sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \tag{2.42}$$

$$\left.\begin{aligned} rY_{10}(\theta\varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}z,\\ rY_{1\,\pm1}(\theta\varphi) &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x\pm \mathrm{i}y), \end{aligned}\right\} \tag{2.43}$$

$$\left.\begin{aligned} r^2Y_{20}(\theta\varphi) &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}r^2\right),\\ r^2Y_{2\,\pm1}(\theta\varphi) &= \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}z(x\pm \mathrm{i}y),\\ r^2Y_{2\,\pm2}(\theta\varphi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}}(x\pm \mathrm{i}y)^2, \end{aligned}\right\} \tag{2.44}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$l=0$, $2^l=1$,对应电单极矩

$$\mathscr{P}_{00}=\int\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}=Q, \tag{2.45}$$

就是此荷电系统的总电荷. $l=1$, $2^l=2$,对应电偶极矩

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{P}_{10} &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int rY_{10}(\theta\varphi)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}=\int z\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}\equiv\mathscr{P}_z,\\ \mathscr{P}_{1\,\pm1} &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int rY_{1\,\pm1}(\theta\varphi)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\int(x\pm \mathrm{i}y)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}\\ &\equiv\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathscr{P}_x\pm \mathrm{i}\mathscr{P}_y), \end{aligned}\right\} \tag{2.46}$$

其中 $\mathscr{P}_x$、$\mathscr{P}_y$ 和 $\mathscr{P}_z$ 为矢量

$$\boldsymbol{\mathscr{P}}\equiv\int\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} \tag{2.47}$$

的 x、y 和 z 分量. 对原点处的点电荷 $-q$ 和径矢为 $\boldsymbol{l}$ 处的点电荷 q 组成的电偶极子,此矢量即(2.20)定义的电偶极矩,(2.47)因此可作为电偶极矩矢量$\mathscr{P}$的一般定义.(2.46)则表明电偶极矩三重量 $\mathscr{P}_{11}$,$\mathscr{P}_{10}$和 $\mathscr{P}_{1-1}$为电偶极矩矢量诸分量的重新组合. $l=2,2^l=4$,对应电四极矩

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{P}_{20} &=\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\int r^2\mathrm{Y}_{20}(\theta\varphi)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}=\int\left(\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}r^2\right)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}\\ &=3Q_{zz}-\mathrm{tr}\boldsymbol{Q},\\ \mathscr{P}_{2\pm1} &=\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\int r^2\mathrm{Y}_{2\pm1}(\theta\varphi)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}=\mp\sqrt{\frac{3}{2}}\int z(x\pm\mathrm{i}y)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}\\ &=\mp\sqrt{6}(Q_{zx}\pm\mathrm{i}Q_{zy}),\\ \mathscr{P}_{2\pm2} &=\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\int r^2\mathrm{Y}_{2\pm2}(\theta\varphi)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}=\sqrt{\frac{3}{8}}\int(x\pm\mathrm{i}y)^2\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}\\ &=\sqrt{\frac{3}{2}}(Q_{xx}-Q_{yy}\pm2\mathrm{i}Q_{xy}),\end{aligned}\right\}\qquad(2.48)$$

其中 Q_{xx}、Q_{yy}、Q_{zz}、Q_{xy}、Q_{yz}和 Q_{zx}为三维二阶对称张量

$$\boldsymbol{Q}\equiv\frac{1}{2}\int\boldsymbol{rr}\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}\qquad(2.49)$$

的诸分量,$\mathrm{tr}\boldsymbol{Q}\equiv Q_{xx}+Q_{yy}+Q_{zz}$为它的阵迹. 对原点和径矢为 $\boldsymbol{l}+\boldsymbol{l}'$两处的点电荷 q 与径矢为$\boldsymbol{l}$ 和$\boldsymbol{l}'$的两处点电荷 $-q$ 组成的电四极子,此张量即(2.25)定义的电四极矩,(2.49)因此可作为电四极矩张量的一般定义.(2.48)则表明电四极矩五重量 $\mathscr{P}_{22}$,$\mathscr{P}_{21}$,$\mathscr{P}_{20}$,$\mathscr{P}_{2-1}$和 $\mathscr{P}_{2-2}$为电四极矩张量诸分量的重新组合.……将(2.37)表为

$$\left.\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty}\phi_l(\boldsymbol{r}),\\ \phi_l(\boldsymbol{r}) &= \sum_{m=-l}^{l}\mathscr{P}_{lm}^{*}\phi_{lm}(\boldsymbol{r}),\\ \phi_{lm}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon r^{l+1}}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi).\end{aligned}\right\}\qquad(2.50)$$

将(2.42)和(2.45)代入得单极静电势

$$\phi_0(\boldsymbol{r})=\frac{Q}{4\pi\epsilon r},\qquad(2.51)$$

可视为原点处点电荷 Q 的静电势;将(2.46)和(2.43)代入得偶极静电势

$$\phi_1(\boldsymbol{r})=\frac{\mathscr{P}\cdot\boldsymbol{r}_0}{4\pi\epsilon r^2},\qquad(2.52)$$

与(2.21)比较知可视之为原点处电偶极子$\mathscr{P}$的静电势;将(2.48)和(2.44)代入得四极静电势

$$\phi_2(\boldsymbol{r}) = \frac{3\boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{r}_0 - \mathrm{tr}\boldsymbol{Q}}{4\pi\epsilon r^3}, \tag{2.53}$$

与(2.26)比较知可视之为原点处电四极子 $\boldsymbol{Q}$ 的静电势.

静电势多极展开的负梯度给出静电场强的多极展开.例如从(2.50)得

$$\left.\begin{aligned}
\mathscr{E}(\boldsymbol{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathscr{E}_l(\boldsymbol{r}), \\
\mathscr{E}_l(\boldsymbol{r}) &= \sum_{m=-l}^{l} \mathscr{P}_{lm}^{*} \mathscr{E}_{lm}(\boldsymbol{r}), \\
\mathscr{E}_{lm}(\boldsymbol{r}) &= -\nabla \phi_{lm}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi(2l+1)}\epsilon} \nabla \left[\frac{1}{r^{l+1}} \mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi) \right],
\end{aligned}\right\} \tag{2.54}$$

$\mathscr{E}_l(\boldsymbol{r})$称为静电 2^l 极场.有多种办法解析地算出末式右边的梯度,其中用球谐函数直线坐标表示式的方法较直观.已用此法算出了 $l \leqslant 2$ 的静电势(2.51)~(2.53),它们的负梯度就是 $l \leqslant 2$ 的静电场强.与从(1.59)到(1.9)、(2.21)到(2.22)、和(2.26)到(2.27)类似的计算得任意电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$产生的电单极场,电偶极场和电四极场分别为

$$\mathscr{E}_0(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\boldsymbol{r}_0, \tag{2.55}$$

$$\mathscr{E}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{3(\mathscr{P} \cdot \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}_0 - \mathscr{P}}{4\pi\epsilon r^3}, \tag{2.56}$$

和

$$\mathscr{E}_2(\boldsymbol{r}) = \frac{(15\boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{r}_0 - 3\mathrm{tr}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{r}_0 - 6\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{r}_0}{4\pi\epsilon r^4}, \tag{2.57}$$

可分别视为原点处的点电荷 Q,电偶极子$\mathscr{P}$,和电四极子 $\boldsymbol{Q}$ 的静电场.

也可将电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$本身作多极展开:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \rho_{lm}(r) \mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi). \tag{2.58}$$

由球谐函数的正交归一性(见附录二)

$$\int \mathrm{Y}_{lm}^{*}(\theta\varphi)\mathrm{Y}_{l'm'}(\theta\varphi)\mathrm{d}\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'} = \begin{cases} 1, & \text{若 } l = l' \text{ 且 } m = m' \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \tag{2.59}$$

得

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{Y}_{lm}^{*}(\theta\varphi)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\Omega &= \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \rho_{l'm'}(r) \int \mathrm{Y}_{lm}^{*}(\theta\varphi)\mathrm{Y}_{l'm'}(\theta\varphi)\mathrm{d}\Omega \\
&= \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \rho_{l'm'}(r)\delta_{ll'}\delta_{mm'} = \rho_{lm}(r).
\end{aligned}$$

这就是(2.35),它规定了多极展开(2.58)的系数,即径向函数 $\rho_{lm}(r)$.

§2.3 有限区域中泊松方程解的边值问题，边条件下的格林函数

如果问题在一有限区域 $\mathscr{V}$ 中，它的表面为 s，则静电场 $\phi(\boldsymbol{r})$ 除满足泊松方程(2.3)外还须满足 s 上的边条件，这个边条件可能不同于(2.30)满足的无穷远处趋于零的条件. s 上的边条件破坏平移对称性. 若加于格林函数则可能使其自变量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 不再只以 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ 的形式出现，而应一般地写为 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$，但仍满足方程

$$\nabla^2 g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{2.60}$$

为求(2.3)在此条件下的解，再次用格林公式(2.13)，由它得

$$\oint_s(\psi_1\nabla\psi_2-\psi_2\nabla\psi_1)\cdot d\boldsymbol{s}=\int_{\mathscr{V}}(\psi_1\nabla^2\psi_2-\psi_2\nabla^2\psi_1)d\mathscr{V}. \tag{2.61}$$

以格林函数 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 代入其中的 $\psi_1(\boldsymbol{r})$，泊松方程(2.3)符合给定边条件的解 $\phi(\boldsymbol{r})$ 代入其中的 $\psi_2(\boldsymbol{r})$，在所得结果中交换符号 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 并经整理得

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r})=&\int_{\mathscr{V}}\frac{1}{\epsilon}\rho(\boldsymbol{r}')g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})d\mathscr{V}'\\&+\int_s\left[\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})-\phi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n'}\right]ds',\end{aligned} \tag{2.62}$$

n' 为 $\boldsymbol{r}'$ 处表面 s 的外向法线坐标. 可以就采用(2.28)作格林函数，(2.62)右边的体积分还可照样用(2.32)作多极展开. 不过在此条件下为算出(2.62)右边的面积分必须同时知道解 ϕ 在表面 s 上的值和法向微商. 而在实际问题中边条件常常只含解 ϕ 在表面 s 上的值(第一类边条件)，或解在表面 s 上的法向微商 $\frac{\partial\phi}{\partial n}$(第二类边条件)，也可能给定它们的一个线性组合

$$\psi(\boldsymbol{r}')=a\phi(\boldsymbol{r}')+b\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'} \tag{2.63}$$

在表面 s 上的值(第三类边条件)，一般不会同时给定 ϕ 和 $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ 在 s 上的值. 在满足方程(2.62)的格林函数 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 上可加一函数 $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$，只要它满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0, \tag{2.64}$$

则和

$$g'(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{2.65}$$

仍满足同一方程

$$\nabla^2 g'(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{2.66}$$

即仍是格林函数. 用此方法可令格林函数满足一定边条件. 若对表面 s 上任一点 $\boldsymbol{r}'$ 和 $\mathscr{V}$ 内的任意点 $\boldsymbol{r}$ 格林函数满足边条件

$$g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) = 0, \tag{2.67}$$

则(2.62)成为

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathscr{V}} \frac{1}{\epsilon}\rho(\boldsymbol{r}')g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}' - \int_s \phi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n'}\mathrm{d}s'. \tag{2.68}$$

此式可用来求解第一类边条件下的泊松方程.一种天真的想法是对表面 s 上的点 $\boldsymbol{r}'$和 $\mathscr{V}$内的点 $\boldsymbol{r}$ 对格林函数加边条件

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n'} = 0, \tag{2.69}$$

以使(2.62)成为

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathscr{V}} \frac{1}{\epsilon}\rho(\boldsymbol{r}')g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}' + \int_s \frac{\partial \phi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\mathrm{d}s', \tag{2.70}$$

用来求解第二类边条件下的泊松方程.然而条件(2.69)却恒不能满足.为了解这一点在(2.60)两边将 $\boldsymbol{r}'$置于 $\mathscr{V}$内一点,对 $\boldsymbol{r}$ 在整个体积 $\mathscr{V}$内积分,用高斯定理将左边的体积分化为面积分.在结果中将符号 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$对调后得

$$\int_s \frac{\partial g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n'}\mathrm{d}s' = -1, \tag{2.71}$$

表明对 $\mathscr{V}$ 内一点表面 s 上 $\frac{\partial g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n'}$ 不可能恒等于零.退而求其次,可要求 $\frac{\partial g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n'}$在表面 s 上为常数,(2.71)表明此常数为

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n'} = -\frac{1}{s}. \tag{2.72}$$

将此边条件代入(2.62)得

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathscr{V}} \frac{1}{\epsilon}\rho(\boldsymbol{r}')g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}' + \int_s \frac{\partial \phi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\mathrm{d}s' + \overline{\phi}_s, \tag{2.73}$$

其中

$$\overline{\phi}_s = \frac{1}{s}\int_s \phi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}s \tag{2.74}$$

为 $\phi(\boldsymbol{r})$在表面 s 上的平均值,它是一常数.由于静电势上恒可加减一任意常数,故在此条件下仍可将它表为(2.70),用于求解第二类边条件下的泊松方程.不过格林函数要求解边条件(2.71)下的方程(2.60)来得到.对 a、b 均非零的第三类边条件可求解边条件

$$ag(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) + b\frac{\partial g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n'} = 0 \tag{2.75}$$

下的方程(2.60).用 $g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$乘(2.63),将右边所得减去此式左边与 $\phi(\boldsymbol{r}')$的积得

$$b\left[\frac{\partial \phi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) - \phi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n'}\right] = \psi(\boldsymbol{r}')g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}). \tag{2.76}$$

代入(2.62)右边得

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathscr{V}} \frac{1}{\epsilon}\rho(\boldsymbol{r}')g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}' + \frac{1}{b}\int_{s}\psi(\boldsymbol{r}')g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\mathrm{d}s'. \tag{2.77}$$

此式可用来求解第三类边条件下的泊松方程.

格林函数只是提供了一个求解泊松方程边值问题的方法.为了求得格林函数仍然要在一定边条件下求解泊松方程.不过它要求解的泊松方程(2.60)具标准形式,与实际问题中的电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$无关.它满足的边条件(2.67)、(2.72)或(2.75)也具标准形式,而与实际问题中边条件的细节无关.格林函数方法只是用标准形式的问题代替实际情形中各式各样的具体问题.一旦这标准形式的解求得,各种具体条件下的解便可由代公式(2.68)、(2.70)或(2.77)求得.以上的推导还只证明了若符合第一、二或三类边条件的泊松方程解存在则可将它表为(2.68)、(2.70)或(2.77).至于这些式子表达的 $\phi(\boldsymbol{r})$是否确为泊松方程满足相应边条件的解则尚待证明.如能证明以上推导的前提,即证明满足这些边条件的泊松方程解确实存在,自然也就证明了它的结果,即(2.68)、(2.70)和(2.77)分别为泊松方程满足第一、二和三类边条件的解 $\phi(\boldsymbol{r})$的表达式.然而泊松方程边值问题解的存在性属专门的数学问题,不可能在本书中讨论.在这种条件下,为谨慎计,必须检验每个解是否真是给定边值问题的解.

可以直接证明(2.68)、(2.70)和(2.77)确为泊松方程的解.这就使最后检验的任务大为简化,即只须检验它们是否符合边条件就可以了.先证明边条件(2.75)下泊松方程格林函数对它的两个自变量是对称的,即

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}). \tag{2.78}$$

为此用 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')$乘(2.60)得

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\nabla^2 g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').$$

将变量 $\boldsymbol{r}'$与$\boldsymbol{r}''$交换位置得

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla^2 g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'') = -g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''). \tag{2.79}$$

两式相减后对变量 $\boldsymbol{r}$ 在体积 $\mathscr{V}$中积分.设 $\boldsymbol{r}'$与$\boldsymbol{r}''$都在 $\mathscr{V}$内,得

$$\int_s \left[g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n} - g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')}{\partial n}\right]\mathrm{d}s = g(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}') - g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''), \tag{2.80}$$

左边用了高斯定理,右边用了 δ 函数的性质.对 $\mathscr{V}$内的点 $\boldsymbol{r}'$和$\boldsymbol{r}''$以及表面s 上的点 $\boldsymbol{r}$ 边条件(2.75)为

$$\left.\begin{aligned} ag(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + b\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n} &= 0, \\ ag(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'') + b\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')}{\partial n} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.81}$$

边条件(2.75)中常数 a 和 b 自然不能全为零.这表明作为 a 和 b 的线性齐次联立

方程,(2.81)的系数行列式为零,从而

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')}{\partial n}-g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}=0. \tag{2.82}$$

对有限区域的表面 s,此式使(2.80)左边为零.它的右边也必为零,从而(2.78)成立.这使(2.77)可表为

$$\phi(\boldsymbol{r})=\int_{\mathscr{V}}\frac{1}{\epsilon}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}'+\frac{1}{b}\int_{s}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}s'. \tag{2.83}$$

边条件(2.67)可视为(2.75)中 $a=1,b=0$ 的特殊情形.对称性(2.78)对此边条件下的格林函数也成立.这使(2.68)也可表为

$$\phi(\boldsymbol{r})=\int_{\mathscr{V}}\frac{1}{\epsilon}g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}'-\int_{s}\frac{\partial g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\phi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}s'. \tag{2.84}$$

在此二式两边用拉普拉斯算符作用,由(2.60)知对体积 $\mathscr{V}$ 内的任一点 $\boldsymbol{r}$,它们定义的 $\phi(\boldsymbol{r})$ 都是泊松方程(2.3)的解.

将边条件(2.72)代入(2.80)的左边得

$$\frac{1}{s}\int_{s}[g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')]\mathrm{d}s=g(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')-g(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''). \tag{2.85}$$

定义

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{s}\int_{s}g(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}')\mathrm{d}s_1, \tag{2.86}$$

面积分对坐标 $\boldsymbol{r}_1$ 进行.由于根本与 $\boldsymbol{r}$ 无关,此函数满足方程(2.64)且 $\frac{\partial f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}=0$.这使得它与原来的格林函数 g 按(2.65)定义的 g' 仍为格林函数,且仍符合边条件(2.72),即

$$\frac{\partial g'(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n'}=-\frac{1}{s}. \tag{2.87}$$

此外它还有性质

$$\int_{s}g'(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}s=0. \tag{2.88}$$

由它代替 g 作为此边值问题的格林函数,代入(2.85)即得

$$g'(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=g'(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}). \tag{2.89}$$

泊松方程符合第二类边条件的解遂可表为

$$\phi(\boldsymbol{r})=\int_{\mathscr{V}}\frac{1}{\epsilon}g'(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}'+\int_{s}g'(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s'. \tag{2.90}$$

按(2.65)将 g' 表为 g 与 f 的和代入此式,由于(2.86)定义的 $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 与 $\boldsymbol{r}$ 无关,它所贡献的

$$\int_{\mathscr{V}}\frac{1}{\epsilon}f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}'+\int_{s}f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s'$$

为常数.静电势是可加减一任意常数的,从(2.90)减去此常数便得

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathscr{V}} \frac{1}{\epsilon} g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}' + \int_s g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \frac{\partial \phi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}s'. \tag{2.91}$$

由(2.60)知对体积 $\mathscr{V}$ 内任一点 $\boldsymbol{r}$,此式定义的 $\phi(\boldsymbol{r})$ 满足泊松方程(2.3).

不要忘记检验所得的解是否符合给定的边条件,除非能证明符合此边条件的解是存在的.泊松方程在有些边条件下的解确实不存在.例如若体积 $\mathscr{V}$ 内总电荷 Q 非零,按高斯定理它的表面 s 上静电势的法向微商 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 就不可能恒为零.若硬加上此边条件泊松方程的解即不存在.当然可按(2.91)算出一个函数 $\phi(\boldsymbol{r})$,它必满足泊松方程,却必不符合所加边条件 $\left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_s = 0$.

泊松方程的格林函数恒可写成

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),$$

其中 f 满足拉普拉斯方程(2.64).将此式代入(2.83)、(2.84)和(2.91),可将这些解都分解成

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_0(\boldsymbol{r}) + \phi_1(\boldsymbol{r}).$$

其中

$$\phi_0(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathscr{V}} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\epsilon|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}' \tag{2.92}$$

即(2.30)表示的解,称为基本解;$\phi_1(\boldsymbol{r})$ 因满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi_1 = 0 \tag{2.93}$$

而为谐和函数.在基本解上加此谐和函数后仍为泊松方程的解.然而通过调节谐和函数可使解符合给定的边条件.也可以说 $\phi_0(\boldsymbol{r})$ 为 $\mathscr{V}$ 内电荷分布产生的静电势,而 $\phi_1(\boldsymbol{r})$ 则包括 $\mathscr{V}$ 以外区域电荷分布产生的静电势,其中含界面 s 上面电荷分布产生的静电势.

§2.4 静电能,静电作用及其多极展开

一静止电荷密度分布 $\rho(\boldsymbol{r})$,伴随有静电势 $\phi(\boldsymbol{r})$ 和静电场强 $\mathscr{E}(\boldsymbol{r})$,因而在体积 $\mathscr{V}$ 中有静电能

$$E = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}} \mathscr{E}\cdot\mathscr{D}\mathrm{d}\mathscr{V} = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}} \epsilon(\nabla\phi)^2\mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{2.94}$$

设介质均匀,ϵ 为常数,作一次部分积分后用泊松方程(2.3)消去 $\nabla^2\phi$ 得

$$E = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}} \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} + \frac{1}{2}\int_s \epsilon\phi(\nabla\phi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{2.95}$$

s 为 $\mathscr{V}$ 的表面.若静电系统被一导体表面屏蔽,s 即为此屏蔽导体面,其上的常数电

势 ϕ 可置零(接地),使此式右边的面积分为零.若系统是敞开的,表面 s 可推向无穷远.从无穷远处看,有限电荷分布可视为点电荷.这使无穷远处 ϕ 按$\frac{1}{r}$的方式趋于零,因而$\nabla\phi$ 以$\frac{1}{r^2}$的方式趋于零,s 的面积则按 r^2 的方式趋于无穷.总的结果是使(2.95)右边的面积分以$\frac{1}{r}$的方式在无穷远处趋于零.适当的边条件使此面积分为零,静电能的表达式(2.95)简化为

$$E = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}}\rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{2.96}$$

体积分遍及电荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$非零的区域.

设有两个电荷密度分布 $\rho_1(\boldsymbol{r})$和 $\rho_2(\boldsymbol{r})$,与伴随它们的静电势 $\phi_1(\boldsymbol{r})$和 $\phi_2(\boldsymbol{r})$间满足泊松方程

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\phi_1(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{\epsilon}\rho_1(\boldsymbol{r}),\\ \nabla^2\phi_2(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{\epsilon}\rho_2(\boldsymbol{r}).\end{aligned}\right\} \tag{2.97}$$

两电荷分布并存时总电荷密度为

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho_1(\boldsymbol{r}) + \rho_2(\boldsymbol{r}). \tag{2.98}$$

将(2.97)中两式相加得泊松方程(2.3),右边的电荷密度即此式表示的总电荷密度,而左边的总静电势便是

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_1(\boldsymbol{r}) + \phi_2(\boldsymbol{r}). \tag{2.99}$$

将此式与(2.98)一起代入(2.96)得总系统的静电能

$$E = E_1 + E_2 + V, \tag{2.100}$$

$$\left.\begin{aligned}E_1 &= \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}}\rho_1(\boldsymbol{r})\phi_1(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V},\\ E_2 &= \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}}\rho_2(\boldsymbol{r})\phi_2(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V},\end{aligned}\right\} \tag{2.101}$$

$$V = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}}\rho_1(\boldsymbol{r})\phi_2(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} + \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}}\rho_2(\boldsymbol{r})\phi_1(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{2.102}$$

其中 $E_i, i=1,2$,为电荷分布 $\rho_i(\boldsymbol{r})$单独存在时的静电能;V 则为两电荷分布同时存在而出现的一份静电能,称为静电作用能,表示两电荷分布间的作用.由(2.97)知

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{V}}\rho_1(\boldsymbol{r})\phi_2(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} &= -\epsilon\int_{\mathscr{V}}[\nabla^2\phi_1(\boldsymbol{r})]\phi_2(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}\\ &= -\epsilon\int_{\mathscr{V}}\phi_1(\boldsymbol{r})\nabla^2\phi_2(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} + \epsilon\int_s(\phi_1\nabla\phi_2 - \phi_2\nabla\phi_1)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\ &= \int_{\mathscr{V}}\phi_1(\boldsymbol{r})\rho_2(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V},\end{aligned} \tag{2.103}$$

第二等号处用了公式(2.61),第三等号处再次用了(2.97)并按前述方式判断面积分为零.于是可将(2.102)两项合并得

$$V=\int_{\mathscr{V}}\rho_1(\boldsymbol{r})\phi_2(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}=\int_{\mathscr{V}}\phi_1(\boldsymbol{r})\rho_2(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{2.104}$$

为了节省书写,略去下标 1 和 2,将此式写成

$$V=\int_{\mathscr{V}}\rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{2.105}$$

只要理解 $\rho(\boldsymbol{r})$表示一个电荷分布而 $\phi(\boldsymbol{r})$则表示另一电荷分布相伴随的静电势,对 $\rho(\boldsymbol{r})$而言代表外电场即可.(2.102)表示的是电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$在外电场作用下的势能.远处电荷分布产生的外电场的静电势 $\phi(\boldsymbol{r})$可作多极展开(2.39).在研究电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$与外电场的作用时并不关心外电场是如何由远处电荷分布产生的,可将(2.39)写成

$$\phi(\boldsymbol{r})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}r^l\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi). \tag{2.106}$$

§2.7 将证明此式正是拉普拉斯方程解的普遍形式.另一方面,由球谐函数的笛卡儿坐标表示(2.42)～(2.44)……,此式又可看作 $\phi(\boldsymbol{r})$在原点 $\boldsymbol{r}=0$ 周围的泰勒展开,因而其中的系数(a_{lm})应能用泰勒展开系数表出.按多元函数的泰勒展开定理

$$\phi(\boldsymbol{r})=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\left.\frac{\partial^{i+j+k}\phi}{\partial x^i\partial y^j\partial z^k}\right|_{r=0}\frac{x^iy^jz^k}{i!j!k!}. \tag{2.107}$$

要求 $\phi(\boldsymbol{r})$满足拉普拉斯方程,此式必可整理成(2.106)的形式.为此可将其中的 i,j,k 次幂项用球谐函数展开成

$$\frac{x^iy^jz^k}{i!j!k!}=\sum_{lm}C_{lm}^{i,j,k}r^{i+j+k}\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi), \tag{2.108}$$

按(A2.14)系数

$$C_{lm}^{i,j,k}=\int\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta\varphi)\frac{\left(\frac{x}{r}\right)^i\left(\frac{y}{r}\right)^j\left(\frac{z}{r}\right)^k}{i!j!k!}\mathrm{d}\Omega, \tag{2.109}$$

$\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ 为立体角元,积分区域为 4π 立体角.将(2.108)代入(2.107)后与(2.106)比较知

$$a_{lm}=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sum_{i+j+k=l}C_{lm}^{i,j,k}\left.\frac{\partial^l\phi}{\partial x^i\partial y^j\partial z^k}\right|_{r=0}. \tag{2.110}$$

对不大的 $l,i+j+k=l$ 的系数 $C_{lm}^{i,j,k}$可一一算出,代入此式即可将系数 a_{lm}用 ϕ 及其微商在 $\boldsymbol{r}=0$ 处的值表达.而 $\phi(\boldsymbol{r})$对坐标的微商正是电场强度及其微商,因而系数 a_{lm} 便可用原点 $\boldsymbol{r}=0$ 处的静电势和静电场强及其对坐标的微商表示.按(2.109)算出的部分 C 系数如下:

$$C_{0\,0}^{0,0,0}=\sqrt{4\pi}, \tag{2.111}$$

$$\left.\begin{aligned}
&C_{1\,\pm1}^{1,0,0}=\mp\sqrt{\frac{2\pi}{3}},\qquad C_{1\,\pm1}^{0,1,0}=\mathrm{i}\sqrt{\frac{2\pi}{3}},\qquad C_{1\,\pm1}^{0,0,1}=0,\\
&C_{1\,0}^{1,0,0}=C_{1\,0}^{0,1,0}=0,\qquad C_{1\,0}^{0,0,1}=\sqrt{\frac{4\pi}{3}},
\end{aligned}\right\}\tag{2.112}$$

$$\left.\begin{aligned}
&C_{2\,\pm2}^{2,0,0}=\sqrt{\frac{\pi}{30}},\qquad C_{2\,\pm2}^{1,1,0}=\mp2\mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{30}},\qquad C_{2\,\pm2}^{1,0,1}=0,\\
&C_{2\,\pm2}^{0,2,0}=-\sqrt{\frac{\pi}{30}},\qquad C_{2\,\pm2}^{0,1,1}=C_{2\,\pm2}^{0,0,2}=0,\\
&C_{2\,\pm1}^{2,0,0}=C_{2\,\pm1}^{1,1,0}=0,\qquad C_{2\,\pm1}^{1,0,1}=\mp\sqrt{\frac{2\pi}{15}},\\
&C_{2\,\pm1}^{0,2,0}=C_{2\,\pm1}^{0,0,2}=0,\qquad C_{2\,\pm1}^{0,1,1}=\mathrm{i}\sqrt{\frac{2\pi}{15}},\\
&C_{2\,0}^{2,0,0}=-\frac{\sqrt{5\pi}}{15},\qquad C_{2\,0}^{1,1,0}=C_{2\,0}^{1,0,1}=0,\\
&C_{2\,0}^{0,2,0}=-\frac{\sqrt{5\pi}}{15},\qquad C_{2\,0}^{0,1,1}=0,\qquad C_{2\,0}^{0,0,2}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}.
\end{aligned}\right\}\tag{2.113}$$

将它们代入(2.110)得

$$a_{00}=\phi(0),\tag{2.114}$$

$$a_{1\,\pm1}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}[\mathscr{E}_x(0)\mp\mathrm{i}\mathscr{E}_y(0)],\qquad a_{1\,0}=-\mathscr{E}_z(0),\tag{2.115}$$

$$\left.\begin{aligned}
&a_{2\,\pm2}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}\left(\frac{\partial\mathscr{E}_x}{\partial x}-\frac{\partial\mathscr{E}_y}{\partial y}\mp2\mathrm{i}\frac{\partial\mathscr{E}_x}{\partial y}\right)\bigg|_{r=0},\\
&a_{2\,\pm1}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}\left[\frac{\partial(\mathscr{E}_x\mp\mathrm{i}\mathscr{E}_y)}{\partial z}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\mp\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathscr{E}_z\right]\bigg|_{r=0},\\
&a_{2\,0}=\left[\frac{1}{6}\left(\frac{\partial\mathscr{E}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathscr{E}_y}{\partial y}\right)-\frac{1}{3}\frac{\partial\mathscr{E}_z}{\partial z}\right]\bigg|_{r=0}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{E}_z}{\partial z}\bigg|_{r=0},
\end{aligned}\right\}\tag{2.116}$$

最后的等式用到原点 $\boldsymbol{r}=0$ 处 $\phi(\boldsymbol{r})$ 符合拉普拉斯方程的性质.

将(2.106)代入(2.105)得静电作用的多极展开

$$\left.\begin{aligned}
V&=\sum_{l=0}^{\infty}V_l,\\
V_l&=\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}\mathscr{P}_{lm},
\end{aligned}\right\}\tag{2.117}$$

V_l 称为 2^l 极静电作用.将(2.114)和(2.45)代入得单极静电作用

$$V_0=Q\phi(0),\tag{2.118}$$

类似原点处的点电荷 Q 与静电场的作用;将(2.115)和(2.46)代入得偶极静电作用

$$V_1 = -\mathscr{P}\cdot\mathscr{E}(0), \tag{2.119}$$

类似原点处的电偶极子$\mathscr{P}$与静电场的作用;将(2.116)和(2.48)代入得四极静电作用

$$V_2 = -(\nabla\cdot \boldsymbol{Q}\cdot\mathscr{E})\mid_{r=0}, \tag{2.120}$$

类似原点处的电四极子与静电场的作用. 推导中反复用到

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\mathscr{E}_x}{\partial y} &= -\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial\mathscr{E}_y}{\partial x},\\
\frac{\partial\mathscr{E}_y}{\partial z} &= -\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y} = \frac{\partial\mathscr{E}_z}{\partial y},\\
\frac{\partial\mathscr{E}_z}{\partial x} &= -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} = \frac{\partial\mathscr{E}_x}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \tag{2.121}$$

和

$$\nabla\cdot\mathscr{E} = \frac{\partial\mathscr{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathscr{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathscr{E}_z}{\partial z} = -\nabla^2\phi = 0. \tag{2.122}$$

§2.5 介质的极化,极化强度,极化率与介电常数

如前所述,只有真空电动力学是基本的,介质中的电动力学可由它导出. 介质中的静电学便可由真空静电学导出. 介质整体自然应是电中性的,其中的正、负电荷相等. 在自然条件下这种电中性还表现在每一宏观区域,包括宏观看来无穷小的区域,即宏观点. 在外电场的影响下,这种局域电中性会被破坏,导致正负电荷分布的不一致,称为极化. 极化介质中可能出现非零的电荷密度分布 $\rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})$,称为束缚电荷密度. 说是束缚电荷是指其中正、负电荷并不能真正分开,任何一方都不能离开介质. 这便不同于自由电荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$. 介质由分子组成,一般地说是由若干(通常是少数)种分子按一定比例和方式组成. 对均匀介质这种比例和方式处处相同. 就电性质而言可将分子区分为极性和非极性两类;极性分子正、负电荷中心不重合,因而有非零电偶极矩;非极性分子正、负电荷中心重合,因而电偶极矩为零. 若加上外电场,分子的正电中心将沿电场方向移动,负电中心将逆电场方向移动. 外电场可改变分子的电偶极矩,使非极性分子的电偶极矩不再为零,称为使分子极化. 在自然条件下极性分子的固有电偶极矩本是各向同性分布的,这使任何宏观区域中各分子电偶极矩的向量和为零,介质并无极性. (2.119)表明,大小一定的电偶极矩方向与电场方向夹角越小能量越低. 可见外电场对极性分子有力矩(广义力)作用,要将它的电偶极矩"扭向"电场方向. 在热平衡介质中外电场会使极性分子电偶极矩方向分布向电场方向集中,又会使非极性分子沿电场方向极化. 其结果是使宏观区域中各分子电偶极矩的向量和不再为零. 一区域中各分子电偶极矩的向量和即该区域介质的电偶极矩. 设某点周围 $\Delta\mathscr{V}$体积中介质的电偶极矩为 $\Delta\mathscr{P}$,极限

$$\boldsymbol{P} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}\mathscr{V}} \equiv \lim_{\Delta\mathscr{V}\to 0} \frac{\Delta\mathscr{P}}{\Delta\mathscr{V}} \tag{2.123}$$

称为该点的极化强度.要不厌其烦地提醒的是,这里 $\Delta\mathscr{V}$趋近的是一个“宏观的零”,$\mathrm{d}\mathscr{V}$是一个宏观看来无穷小的体积,微观看来它仍足够大,以致量子效应可忽略.

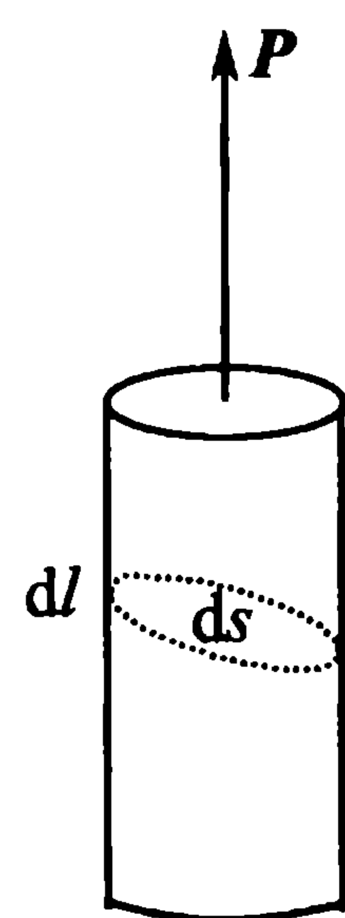


图 2-3 极化强度矢量与体积元内的电偶极矩

如图 2-3,对面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$,

$$\boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = P\mathrm{d}\mathscr{V}/\mathrm{d}l, \tag{2.124}$$

其中 $\mathrm{d}\mathscr{V}$为以此面元在与 $\boldsymbol{P}$ 垂直的面上的投影为横截面,以沿 $\boldsymbol{P}$ 方向的长度 $\mathrm{d}l$ 为高的无穷小柱体积元.此式右边为体积元 $\mathrm{d}\mathscr{V}$内介质电偶极矩的代数值与沿此电偶极矩方向的长度 $\mathrm{d}l$ 之商,即是被面元 $\mathrm{d}s$ 隔开的正、负电荷量.由于未被隔开的电偶极子总电荷为零,被封闭曲面 s 包围的体积 $\mathscr{V}$中介质的束缚电荷量为

$$Q = -\int_s \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_{\mathscr{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{P}\mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{2.125}$$

束缚电荷密度便是

$$\rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}. \tag{2.126}$$

介质的极化是外电场引起的,在线性近似下极化强度 $\boldsymbol{P}$ 应与电场强度$\mathscr{E}$成正比.将这种正比关系表成

$$\boldsymbol{P} = \chi\epsilon_0\mathscr{E}. \tag{2.127}$$

一般说来 χ 可以是一个二阶三维张量,在各向同性介质中它是一个数,是一个比例常数,称为极化率.将有介质的情形用真空电动力学处理,电荷密度分布为

$$\rho_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r}) + \rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}), \tag{2.128}$$

其中 $\rho(\boldsymbol{r})$为自由电荷密度.将(1.70)用于此种情形,其中 $\rho(\boldsymbol{r})$用 $\rho_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})$代,得

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathscr{E} = \rho_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}). \tag{2.129}$$

将(2.128)、(2.126)和(2.127)依次代入,可将此式表为

$$\nabla \cdot \mathscr{D} = \rho(\boldsymbol{r}),$$

其中

$$\mathscr{D} = \epsilon_0(1+\chi)\mathscr{E}. \tag{2.130}$$

将此式与(1.74)第一式比较得介质中的介电常数

$$\epsilon = \epsilon_0(1+\chi), \tag{2.131}$$

它由真空介电常数 ϵ_0 和介质极化率 χ 表出.由于 χ 非负,$\epsilon \geqslant \epsilon_0$.特别地,介电常数不会为零,更不会取负值.

§2.6 若干普遍定理与定性规律,导体系的电势系数与电容系数,电荷在导体上分布的变分原理

静电学有一些形象和有用的定性规律,可表为一系列定理.本节讲述并证明这些定理,阐述它们表达的物理规律.

定理一 均匀介质中无电荷分布的任何区域内的任何一点静电势都不可能取极大或极小值.

证 用反证法.设定理的陈述不真,在不荷电的某区域内的一点 a 静电势 $\phi(\boldsymbol{r})$取极大或极小值 ϕ_a,则必有此区域内包围 a 点的足够小封闭曲面s,其内电荷为零,其上每一点静电势的外法向微商$\frac{\partial \phi}{\partial n}$恒负(若 ϕ_a 为极大值)或恒正(若 ϕ_a 为极小值).在此曲面上作积分

$$\oint_s \mathscr{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint_s \left(-\frac{\partial \phi}{\partial n}\right) \mathrm{d}s.$$

若 ϕ_a 为极大此积分为正,若 ϕ_a 为极小此积分为负,总之其值非零,表明 s 包围的电荷

$$Q = \oint_s \mathscr{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \epsilon \oint_s \mathscr{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \neq 0,$$

不等号处用到介电常数 ϵ 的非零性.这个结果与 a 点所在区域无电荷分布的前提矛盾,可见定理的陈述为真.证毕.

试探电荷 q 在静电场中的势能为

$$V(\boldsymbol{r}) = q\phi(\boldsymbol{r}). \tag{2.132}$$

在均匀介质中的无电荷区域内,此势能无极小.这使得试探电荷在这区域内的每一点都不可能处于稳定静止状态.

导体内的任何电场都会引起载流子的运动.在静电条件下电流应处处为零,因而导体内的电场强度必处处为零,电位移矢量$\mathscr{D} = \epsilon\mathscr{E}$便也处处为零.这进而使电荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}) = \nabla\cdot\mathscr{D}$在导体内部处处为零.在静电条件下导体的电荷只能分布在它的表面.

设有 N 个导体置于介电常数为 ϵ 的均匀介质中.介质有自由电荷密度分布 $\rho(\boldsymbol{r})$,第 i 导体有电荷q_i.对此系统有

定理二(惟一性定理) **静电场与导体**上的电荷分布由各导体电荷 q_i, $i=1, 2, \cdots, N$,和介质中电荷密度分布 $\rho(\boldsymbol{r})$惟一地确定.

证 用 $\phi(\boldsymbol{r})$表介质中的静电势,ϕ_i 表第 i 导体的常数电势,$\sigma_i(\boldsymbol{r})$表第 i 导体表面s_i 上$\boldsymbol{r}$ 处的面电荷密度.自然有

$$\oint_{s_i} \sigma_i \mathrm{d}s_i = q_i \tag{2.133}$$

$\phi(\boldsymbol{r})$在介质中满足泊松方程(2.3),并按(2.6)在导体表面外侧满足边条件

$$\phi|_{s_i} = \phi_i, \qquad \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n}\bigg|_{s_i} = \sigma_i, \tag{2.134}$$

法矢 $\boldsymbol{n}$ 指向导体内部.设另有一静电势 $\phi'(\boldsymbol{r})$满足泊松方程,并与另一组导体面电荷密度 $\sigma_i'(\boldsymbol{r})$满足相当于(2.134)的边条件.定义

$$F(\boldsymbol{r}) = \phi(\boldsymbol{r}) - \phi'(\boldsymbol{r}),$$

它必满足拉普拉斯方程(2.12)和边条件

$$F|_{s_i} = \phi_i - \phi_i', \qquad \epsilon \frac{\partial F}{\partial n}\bigg|_{s_i} = \sigma_i - \sigma_i'. \tag{2.135}$$

此条件中的第一式表明 $F|_{s_i}$在导体 i 上为常数,第二式则表明

$$\epsilon \oint_{s_i} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}s = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,n.$$

这是因为面电荷密度 σ_i'与σ_i 应给出同一电荷q_i.由于 $\epsilon \neq 0$,此式给出

$$\oint_{s_i} \frac{\partial F}{\partial n} \mathrm{d}s = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,N. \tag{2.136}$$

在格林公式(2.13)中置 $\psi_1 = \psi_2 = F$ 得

$$\sum_{i=1}^{N} \oint_{s_i} F \frac{\partial F}{\partial n} \mathrm{d}s = \int_{\mathscr{V}} [F \nabla^2 F + (\nabla F)^2] \mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{2.137}$$

若系统未被一屏蔽导体包围则左边还应加上无穷远处的面积分,不过与(2.16)前面类似的讨论表明此面积分为零.右边体积分的区域 $\mathscr{V}$ 为导体以外的空间.若系统被一屏蔽导体包围,则积分可只在它包围的区域内进行.现在(2.137)左边和号下的每一面积分中因子 F 皆为常数,可提到积分号外,剩下的积分按(2.136)而为零.(2.137)左边为零.它右边体积分被积函数中的第一项由于 F 满足拉普拉斯方程(2.12)而为零.最后得

$$\int_{\mathscr{V}} (\nabla F)^2 \mathrm{d}\mathscr{V} = 0.$$

它要求区域 $\mathscr{V}$ 中处处

$$\nabla F = 0,$$

因而 F 为常数.在系统被屏蔽导体包围的情况下恒可将屏蔽导体上的电势 ϕ 和 ϕ' 置零(接地),从而 $F=0$,在系统未被屏蔽的情况下无穷远处 $\phi = \phi' = 0$,也有 $F=0$.总之常数 $F=0$,因而处处

$$\phi = \phi',$$

静电场被惟一地确定.F 既处处为零$\dfrac{\partial F}{\partial n}$也就在导体表面外侧处处为零,由(2.135)的第二式知

$$\sigma_i(\boldsymbol{r}) = \sigma_i'(\boldsymbol{r})$$

在导体表面处处成立.导体上的面电荷密度也被惟一地确定.定理的陈述得证.证毕.

由于泊松方程(2.3)、关系(2.133)和边条件(2.134)对介质中的电荷密度分布$\rho(\boldsymbol{r})$、静电势$\phi(\boldsymbol{r})$、导体上的电荷q_i、电势ϕ_i和面电荷密度$\sigma_i(\boldsymbol{r})$, $i=1,2,\cdots,N$,都是线性的,由它们惟一确定的静电性质有下述叠加性:若介质中电荷密度为$\rho(\boldsymbol{r})$,第i导体上电荷为q_i, $i=1,2,\cdots,N$的条件下介质中静电势为$\phi(\boldsymbol{r})$,第i导体上电势为ϕ_i面电荷密度为$\sigma_i(\boldsymbol{r})$, $i=1,2,\cdots,N$;介质中电荷密度为$\rho'(\boldsymbol{r})$,第i导体电荷为q_i', $i=1,2,\cdots,N$的条件下介质中静电势为$\phi'(\boldsymbol{r})$,第i导体电势为ϕ_i'面电荷密度为$\sigma_i'(\boldsymbol{r})$, $i=1,2,\cdots,N$;则介质中电荷密度为$\rho(\boldsymbol{r})+\rho'(\boldsymbol{r})$,第$i$导体电荷为$q_i+q_i'$, $i=1,2,\cdots,N$的条件下介质中的静电势为$\phi(\boldsymbol{r})+\phi'(\boldsymbol{r})$,第$i$导体上的电势为$\phi_i+\phi_i'$面电荷密度为$\sigma_i(\boldsymbol{r})+\sigma_i'(\boldsymbol{r})$, $i=1,2,\cdots,N$.这一线性叠加性在介质不荷电条件下的特例是导体上电势与电荷的线性关系.对第i'导体荷电$q_{i'}$其他导体皆不荷电的情形,此线性关系表现为各导体电势均与$q_{i'}$成正比,第i导体的静电势为$\Gamma_{ii'}q_{i'}$, $\Gamma_{ii'}$为比例常数.对各导体均荷电的情形,此线性叠加关系表现为第i导体电势

$$\phi_i = \sum_{i'=1}^{N} \Gamma_{ii'}q_{i'}, \qquad i = 1,2,\cdots,N, \tag{2.138}$$

$\Gamma_{ii'}$称为此导体系的电势系数.

在介质中无电荷,导体上电势又被置零的情形下,泊松方程(2.3)的惟一解为$\phi(\boldsymbol{r})=0$,从而电场强度$\mathscr{E}=-\nabla\phi$处处为零.这表明导体上的电荷

$$q_i = \epsilon\oint_{s_i} \mathscr{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,N. \tag{2.139}$$

可见(2.138)作为导体电荷q_i, $i=1,2,\cdots,N$的线性代数方程组,它的齐次方程组

$$\sum_{i'=1}^{N} \Gamma_{ii'}q_{i'} = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,N, \tag{2.140}$$

有惟一解$q_i=0$, $i=1,2,\cdots,N$.这要求系数矩阵

$$\boldsymbol{\Gamma} = (\Gamma_{ii'})$$

的行列式非零,从而有逆矩阵

$$\boldsymbol{C} \equiv (C_{ii'}) = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}, \tag{2.141}$$

使

$$\boldsymbol{C\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma C} = \boldsymbol{I}, \tag{2.142}$$

$\boldsymbol{I}$为幺矩阵.将(2.138)写成矩阵形式即是

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\Gamma q}, \tag{2.143}$$

其中

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix}$$

皆为 N 维矢量.用 $\boldsymbol{C}$ 左乘(2.143)两边,利用(2.142)得

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}. \tag{2.144}$$

将此式写成分量形式即是

$$q_i = \sum_{i'=1} C_{ii'}\phi_{i'}, \qquad i = 1,2,\cdots,N, \tag{2.145}$$

其中 $C_{ii'}$ 称为此导体系的电容系数.

静电能(2.94)对所论导体系可表为

$$E = \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathscr{V}} \mathscr{E}^2 \, \mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{2.146}$$

积分区域 $\mathscr{V}$ 只含导体外空间.这是因为静电条件下导体内 $\boldsymbol{\mathscr{E}} = 0$.在有屏蔽导体包围的条件下 $\mathscr{V}$ 自然局限在它包围的空间内.对它作变分得

$$\delta E = \epsilon\int_{\mathscr{V}} \boldsymbol{\mathscr{E}} \cdot \delta\boldsymbol{\mathscr{E}} \mathrm{d}\mathscr{V} = -\epsilon\int_{\mathscr{V}} (\nabla \phi) \cdot \delta\boldsymbol{\mathscr{E}} \mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{2.147}$$

导体外空间无电荷,因此 $\nabla\cdot\boldsymbol{\mathscr{E}} = 0, \delta\nabla\cdot\boldsymbol{\mathscr{E}} = 0$,

$$(\nabla \phi) \cdot \delta\boldsymbol{\mathscr{E}} = \nabla \cdot (\phi\delta\boldsymbol{\mathscr{E}}) - \phi \nabla \cdot \delta\boldsymbol{\mathscr{E}} = \nabla \cdot (\phi\delta\boldsymbol{\mathscr{E}}), \tag{2.148}$$

末一等号处用到左边第二项中微分 ∇ 与变分 δ 的可交换性.代入上式,用高斯定理将体积分化作面积分得

$$\delta E = \sum_{i=1}^{N} \oint_{s_i} \phi\delta\boldsymbol{\mathscr{D}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_{i=1}^{N} \phi_i\delta\oint_{s_i} \boldsymbol{\mathscr{D}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_{i=1}^{N} \phi_i\delta q_i. \tag{2.149}$$

可见

$$\frac{\partial E}{\partial q_i} = \phi_i, \qquad i = 1,2,\cdots,N. \tag{2.150}$$

这里静电能 E 被看作独立变量 $q_i, i = 1,2,\cdots,N$,的函数.将(2.138)代入此式右边,对导体电荷 $q_{i'}$ 再微分一次,得

$$\frac{\partial^2 E}{\partial q_i \partial q_{i'}} = \Gamma_{ii'}. \tag{2.151}$$

此式的直接推论是电势系数的对称性

$$\Gamma_{ii'} = \Gamma_{i'i}. \tag{2.152}$$

(2.147)又可按另一种方式演绎为

$$\begin{aligned} \delta E &= -\epsilon\int_{\mathscr{V}} \boldsymbol{\mathscr{E}} \cdot \delta \nabla \phi \mathrm{d}\mathscr{V} = -\epsilon\int_{\mathscr{V}} [\nabla \cdot (\boldsymbol{\mathscr{E}} \delta\phi) - (\nabla \cdot \boldsymbol{\mathscr{E}})\delta\phi] \mathrm{d}\mathscr{V} \\ &= -\int_{\mathscr{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\mathscr{D}}\delta\phi) \mathrm{d}\mathscr{V} = \sum_{i=1}^{N} \oint_{s_i} (\delta\phi) \boldsymbol{\mathscr{D}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_{i=1}^{N} (\delta\phi_i) q_i, \end{aligned} \tag{2.153}$$

末一等号处用到 ϕ_i 在 i 导体上为常数的性质. 可见

$$\frac{\partial E}{\partial \phi_i} = q_i, \qquad i = 1,2,\cdots,N. \tag{2.154}$$

这里 E 被看作独立变量 $\phi_i, i=1,2,\cdots,N$, 的函数. 将(2.145)代入此式右边,对 $\phi_{i'}$ 再微分一次得

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \phi_i \partial \phi_{i'}} = C_{ii'}, \tag{2.155}$$

由此知电容系数亦具对称性

$$C_{ii'} = C_{i'i}. \tag{2.156}$$

将(2.95)用到所论导体系则直接得到

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\phi_i q_i = \frac{1}{2}\sum_{i,i'=1}^{N} C_{ii'}\phi_i\phi_{i'} = \frac{1}{2}\sum_{i,i'=1}^{N}\Gamma_{ii'}q_i q_{i'}. \tag{2.157}$$

物理学常将真实情形与虚假情形比较,通过对比表达真实情形不同于虚假情形的特征. 这种特征常表现为某量取极值. 表达成这种形式的物理规律称为变分原理. 静电学中电荷在导体上分布的规律即可表为如下之变分原理:

定理三(汤姆孙①定理) 电荷在导体上的静态分布恒使静电能取极小值.

证 为将真实情形与虚假情形比较,将导体系静电能(2.146)表为

$$E = \frac{\epsilon}{2}\int \mathscr{E}^2 \, \mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{2.158}$$

未标积分限表示积分遍及全空间而不限于导体外,自然也不受屏蔽导体限制. 对真实情形,电场强度 $\boldsymbol{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r})$ 在导体上为零,此式还原为(2.146). 对此式变分得

$$\begin{aligned}\delta E &= \epsilon\int \boldsymbol{\mathscr{E}}\cdot\delta\boldsymbol{\mathscr{E}}\mathrm{d}\mathscr{V} = -\epsilon\int(\nabla\phi)\cdot\delta\boldsymbol{\mathscr{E}}\mathrm{d}\mathscr{V}\\ &= -\epsilon\int[\nabla\cdot(\phi\delta\boldsymbol{\mathscr{E}}) - \phi\nabla\cdot\delta\boldsymbol{\mathscr{E}}]\mathrm{d}\mathscr{V}\\ &= -\epsilon\oint\phi\delta\boldsymbol{\mathscr{E}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \epsilon\int\phi\delta(\nabla\cdot\boldsymbol{\mathscr{E}})\mathrm{d}\mathscr{V}.\end{aligned}$$

末一等号处用高斯定理将它左边方括号内第一项的体积分化成了面积分,未写积分限表示此面积分在无穷远处包围整个空间的无穷大表面上进行. 将导体电荷产生的电场作多极展开(2.54),其中单极场(2.55)只与总电荷 $Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$ 有关. 与电荷分布方式有关的多极场(2.56)、(2.57)、……等在无穷远处至少按 r^{-3} 趋于零. 这使导体上电荷分布变更引起的无穷远处面积分变分 $\oint\phi\delta\boldsymbol{\mathscr{E}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$,

$$\delta E = \int\phi\delta(\nabla\cdot\mathscr{D})\mathrm{d}\mathscr{V} = \int\phi\delta\rho\mathrm{d}\mathscr{V},$$

---

① Thomson.

第二等号处用了(1.70).介质中的电荷分布是不动的,其中 $\delta\rho=0$,只有导体上的电荷分布可变动,此式成为

$$\delta E = \sum_{i=1}^{N}\int_{\mathscr{V}_i} \phi\delta\rho\mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{2.159}$$

$\mathscr{V}_i$ 为第 i 导体所占区域.对实际电荷分布导体中电场强度为零,电势为常数.仍以 ϕ_i 和 q_i 表第 i 导体上的常数电势和电荷,由此式得

$$\delta E = \sum_{i=1}^{N}\phi_i\int_{\mathscr{V}_i}\delta\rho\mathrm{d}\mathscr{V} = \sum_{i=1}^{N}\phi_i\delta\int_{\mathscr{V}_i}\rho\mathrm{d}\mathscr{V} = \sum_{i=1}^{N}\phi_i\delta q_i = 0. \tag{2.160}$$

最后一等号是由于尽管导体上的电荷分布变更各导体上的电荷 $q_i, i=1,2,\cdots,N$,却是不变的,$\delta q_i=0, i=1,2,\cdots,N$.可见实际电荷分布使静电能 E 取极值.用 $\mathscr{E}(\boldsymbol{r})$表实际电荷分布的实际电场,用 $\delta\mathscr{E}$ 表电荷分布变更引起的电场强度变更.此变更引起的静电能的变化为

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{\epsilon}{2}\int(\mathscr{E}+\delta\mathscr{E})\cdot(\mathscr{E}+\delta\mathscr{E})\mathrm{d}\mathscr{V} - \frac{\epsilon}{2}\int\mathscr{E}\cdot\mathscr{E}\mathrm{d}\mathscr{V}\\ &= \epsilon\int\mathscr{E}\cdot\delta\mathscr{E}\mathrm{d}\mathscr{V} + \frac{\epsilon}{2}\int(\delta\mathscr{E})\cdot(\delta\mathscr{E})\mathrm{d}\mathscr{V}\\ &= \delta E + \frac{1}{2}\delta^2 E;\end{aligned} \tag{2.161}$$

其中

$$\delta E \equiv \epsilon\int\mathscr{E}\cdot\delta\mathscr{E}\mathrm{d}\mathscr{V} \tag{2.162}$$

为 E 的一阶变分,即前面计算的变分,按(2.160)它对实际电荷分布附近的变分为零;

$$\delta^2 E \equiv \epsilon\int(\delta\mathscr{E})\cdot(\delta\mathscr{E})\mathrm{d}\mathscr{V} \tag{2.163}$$

为 E 的二阶变分,它显然恒正.可见实际电荷分布使静电能 E 取的极值为极小值.这就证明了静电能极小为实际电荷分布的必要条件.

另一方面,若电荷分布使静电能取极小值,必使能量的一级变分(2.159)为零.这是对各导体电荷

$$q_i = \int_{\mathscr{V}_i}\rho\mathrm{d}\mathscr{V}, \qquad i = 1,2,\cdots,N \tag{2.164}$$

不变的条件下电荷分布 ρ 的变更而言的.要求解的便是条件

$$\int_{\mathscr{V}_i}\delta\rho\mathrm{d}\mathscr{V} = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,N, \tag{2.165}$$

下的变分问题

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathscr{V}_i}\phi\delta\rho\mathrm{d}\mathscr{V} = 0. \tag{2.166}$$

用拉格朗日乘子 $\phi_i(i=1,2,\cdots,N)$分别乘(2.165)中各式,将结果一一从(2.166)中减去,得

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathscr{V}_i}(\phi-\phi_i)\delta\rho\mathrm{d}\mathscr{V}=0. \tag{2.167}$$

引入拉格朗日乘子便解除了变分的条件(2.165),此式应对任意变分 $\delta\rho$ 成立.这要求在第 i 导体上

$$\phi(\boldsymbol{r})=\phi_i$$

处处成立,每一导体上静电势都是常数,静电场强度处处为零.从定理二的证明中可以看出正是这一条件决定了各导体的电荷分布.静电能极小为实际电荷分布的充分条件.

总之,静电能极小为电荷在导体上静态分布的充分兼必要条件.这就是要证明的.证毕.

考虑将一个中性导体放到 N 个导体的静电场中.放进来之前此中性导体上电荷密度必处处为零.如果维持这种处处为零的电荷密度,将它放进来的过程中它将不受力.将它置于电场中某处后这种处处中性的电荷分布一般不会使静电能达到极小,因而不是静态分布.它上面的载流子将移动以形成电场抵消其内部的外电场,这就是它的极化.极化中其他导体上的电荷分布也会发生变化.总的结果是使静电能降到极小.这表明中性导体靠近一个导体系的静电场时会受到吸引,被拉入静电场中.引力对它作功使它获得动能以补偿静电能的降低,保证总能量守恒.

§2.7 拉普拉斯算符按球坐标分离变量,外静电场中的球形物体

本节和下节用一些例子介绍求解静电学问题的几种方法.本节讲球形物体的静电性质.球对称几何位形宜用球坐标描写.在没有自由电荷的均匀介质中,静电势作为球坐标的函数可一般地表为(2.106).在那里,这个静电势被解释为由远处电荷产生的.为强调场自由度的独立性,强调电磁场不必依赖于电荷电流而存在,静电场不必是什么电荷产生的,现证明(2.106)为拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi=0 \tag{2.168}$$

在有限空间范围内无奇点解的普遍形式.首先由变换(2.41)和它的逆变换

$$\left.\begin{aligned}r&=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\\\theta&=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\\varphi&=\arctan\frac{y}{x},\end{aligned}\right\} \tag{2.169}$$

可经复合函数微分法得拉普拉斯算符的球坐标表示式

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\nabla_{\theta\varphi}^2}{r^2} \quad , \tag{2.170}$$

其中角部分

$$\nabla_{\theta\varphi}^2 \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{2.171}$$

附录二中证明了球谐函数满足方程

$$\nabla_{\theta\varphi}^2 \mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi) + l(l+1)\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi) = 0, \tag{2.172}$$

这其实不难直接验证. 将电势作谐和展开

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} f_{lm}(r)\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi), \tag{2.173}$$

代入拉普拉斯方程(2.168),用(2.170)和(2.172)得

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{r^2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^2\frac{\mathrm{d}f_{lm}}{\mathrm{d}r} - l(l+1)f_{lm}\right]\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi) = 0.$$

球谐函数彼此线性无关,此式左边和为零的充分兼必要条件是各项中与球谐函数相乘的因子为零. 由此得径向函数 $f_{lm}(r)$的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_{lm}}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}f_{lm}}{\mathrm{d}r} - \frac{l(l+1)}{r^2}f_{lm} = 0. \tag{2.174}$$

它的通解为

$$f_{lm}(r) = C_{lm}r^l + C'_{lm}\frac{1}{r^{l+1}}, \tag{2.175}$$

C_{lm}和C'_{lm}为积分常数. 在没有自由电荷分布的均匀介质中电势应无奇点,此式第二项为零. 为此取积分常数 $C'_{lm}=0$. 这使

$$f_{lm}(r) = C_{lm}r^l. \tag{2.176}$$

代入(2.173)得无自由电荷分布的均匀介质中电势的一般形式

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_{lm}r^l\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi). \tag{2.177}$$

将其中的积分常数写作 $C_{lm} = a_{lm}\sqrt{\dfrac{4\pi}{2l+1}}$,此式即成为(2.106).

静电势应是坐标的实函数. 在(2.177)两边取复共轭,用球谐函数性质(见附录二)

$$\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta\varphi) = (-1)^m\mathrm{Y}_{l\,-m}(\theta\varphi) \tag{2.178}$$

得

$$\begin{aligned}\phi^*(r,\theta,\varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_{lm}^* r^l(-1)^m\mathrm{Y}_{l\,-m}(\theta\varphi) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(-1)^m C_{l\,-m}^* r^l\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi).\end{aligned} \tag{2.179}$$

这个复数共轭表达式应与原式(2.177)相等. 两相比较得

$$C_{lm}^{*} = (-1)^{m} C_{l\,-m}. \tag{2.180}$$

由此可知 C_{l0}为实数. 对(2.106)这表现为

$$a_{lm}^{*} = (-1)^{m} a_{l\,-m}, \tag{2.181}$$

a_{l0}为实数. 在(2.106)中 $l=0$ 的项 $a_{00}\sqrt{4\pi}\ \mathrm{Y}_{00} = a_{00}$为常数, 相应电场强度为零. 在局限于 $r=0$ 附近区域的问题中可置 $a_{00}=0$. 用(2.43)可将(2.106)中 $l=1$ 的项表为直线坐标的函数

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sum_{m=-1}^{1} a_{1m} r \mathrm{Y}_{1m}(\theta\varphi) = -\sqrt{2}\mathrm{Re}(a_{11})x + \sqrt{2}\mathrm{Im}(a_{11})y + a_{10}z. \tag{2.182}$$

相应电场强度为

$$\mathscr{E}_1 = -\nabla\phi_1 = \sqrt{2}\mathrm{Re}(a_{11})\boldsymbol{x}_0 - \sqrt{2}\mathrm{Im}(a_{11})\boldsymbol{y}_0 - a_{10}\boldsymbol{z}_0, \tag{2.183}$$

$\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$ 和 $\boldsymbol{z}_0$ 分别为 x、y 和 z 方向的单位矢量. 这是一均匀电场, 是为偶极静电场. 将坐标架转一方向, 使 z 轴沿此电场方向. 经此坐标变换后必有 $a_{11} = a_{1\,-1} = 0$, $\mathscr{E}_1 = -a_{10}\boldsymbol{z}_0$为 z 方向均匀电场. (2.106)中每一 l 对应一 2^l 极静电场. 随着 l 的增加多极场变得越来越复杂.

将一导体放入外电场中, 导体上的荷电载流子在外电场作用下运动. 它们获得的动能耗散为电流的焦尔①热, 自身最后静止下来. 结果是导体上电荷的重新分布, 恢复静电状态. 此时导体表面会感生电荷, 面电荷产生的电场处处抵消外电场, 使导体上处处电场为零, 成为一等势体. 现在的问题是: 新的静电状态下导体上的面电荷分布和导体外的静电场分布如何? 在这个问题中, 外电场是给定的. 导体上的感生电荷只是在外电场上叠加自己产生的电场而不改变外电场本身. 例如, 若(2.106)表示的外电场果是远处电荷所产生, 导体上的感生电荷产生的静电场不至于改变远处电荷的分布. 这要求外电场能用(2.106)表示的空间区域足够大, 远处电荷足够远, 不致受感生静电场的影响. 也要求外电场不太强, 以保证感生电场不至于强到能影响远处电荷分布的程度.

设置入导体为一半径是 a 的球. 以球心为原点建立坐标系, 设在此坐标系中外场电势由(2.106)表示. 用 $\sigma(\theta\varphi)$表示导体球在外场中感生的面电荷密度. 体电荷密度便是

$$\rho(r,\theta,\varphi) = \sigma(\theta\varphi)\delta(r-a). \tag{2.184}$$

将面电荷密度作谐和展开

$$\sigma(\theta\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sigma_{lm}\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi), \tag{2.185}$$

σ_{lm}为展开系数. 代入上式后将结果再代入(2.38)得此电荷分布的 2^l 极矩

---

① Joule.

$$\mathscr{P}_{lm}^{*}=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}a^{l+2}\sum_{l'=0}^{\infty}\sum_{m'=-l'}^{l'}\sigma_{l'm'}\int Y_{lm}^{*}(\theta\varphi)Y_{l'm'}(\theta\varphi)\mathrm{d}\Omega,$$

其中 $\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ 为立体角元，积分区域为 4π 立体角. 用球谐函数的正交归一性(见附录二)

$$\int Y_{lm}^{*}(\theta\varphi)Y_{l'm'}(\theta\varphi)\mathrm{d}\Omega=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

$$\equiv\begin{cases}1, & 若\ l=l'\ 且\ m=m'\\ 0, & 否则\end{cases}, \tag{2.186}$$

得

$$\mathscr{P}_{lm}^{*}=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}a^{l+2}\sigma_{lm}. \tag{2.187}$$

将这个表达式代入(2.37)，得导体上感生的面电荷在导体外产生的静电势

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r})=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^{l+2}}{(2l+1)\epsilon r^{l+1}}\sum_{m=-l}^{l}\sigma_{lm}Y_{lm}(\theta\varphi), \tag{2.188}$$

导体外的总电势遂为

$$\phi(\boldsymbol{r})+\Delta\phi(\boldsymbol{r})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[a_{lm}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}r^{l}+\frac{a^{l+2}}{(2l+1)\epsilon r^{l+1}}\sigma_{lm}\right]Y_{lm}(\theta\varphi). \tag{2.189}$$

由电势的连续性知，导体球表面电势为

$$\phi(a,\theta,\varphi)+\Delta\phi(a,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[a_{lm}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}a^{l}+\frac{a}{(2l+1)\epsilon}\sigma_{lm}\right]Y_{lm}(\theta\varphi). \tag{2.190}$$

此球表面应等势，此式右边应与方位角 θ、φ 无关，换句话说即应可表为 $Y_{00}(\theta\varphi)$ 与常数的积. 由于球谐函数彼此线性独立，这意味着 $l\neq0$ 的球谐函数在此式中的系数为零. 由此得

$$\sigma_{lm}=-\sqrt{4\pi(2l+1)}\epsilon a^{l-1}a_{lm}\quad(对\ l\neq0). \tag{2.191}$$

这便是导体球表面等势的充分兼必要条件. 导体表面等势，内部无电荷，在此条件下导体内泊松方程的惟一解便是电势处处相等，并等于导体表面的常数值. (2.191)保证了导体为等势体. 若导体球接地，导体电势为零，则(2.191)对 $l=0$ 的项也成立，即有

$$\sigma_{00}=-\sqrt{4\pi}\epsilon\frac{a_{00}}{a}. \tag{2.192}$$

由(2.185)得导体电荷

$$Q=\oint\sigma(\theta\varphi)\mathrm{d}s=a^{2}\int\sigma(\theta\varphi)\mathrm{d}\Omega=\sqrt{4\pi}\sigma_{00}a^{2}. \tag{2.193}$$

将(2.192)代入得外电场中接地导体电荷

$$Q=-4\pi\epsilon a a_{00}. \tag{2.194}$$

若导体球不接地而接一电势为 ϕ_0 的远处导体，它上面的电势便不再为零，而为 ϕ_0. 于是有

$$a_{00} + \frac{a}{\sqrt{4\pi}\,\epsilon}\sigma_{00} = \phi_0,$$

由此解得

$$\sigma_{00} = \sqrt{4\pi}\,\epsilon(\phi_0 - a_{00})/a. \tag{2.195}$$

代入(2.193)得导体球电荷

$$Q = 4\pi\epsilon(\phi_0 - a_{00})a. \tag{2.196}$$

若导体球上电荷固定为 Q 并保持孤立，将它放入静电场后上面的电势可由此式解得为

$$\phi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon\, a} + a_{00}. \tag{2.197}$$

代回(2.195)得

$$\sigma_{00} = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}\,a^2}. \tag{2.198}$$

将不同情形中 σ_{00}的表达式(2.192)或(2.195)或(2.198)连同 $l \neq 0$ 的 σ_{lm}的表达式(2.191)代入(2.189)，便得置入导体球后球外静电场的电势.

这里表现出简单的物理关系. (2.191)和(2.187)表示外电场中的 2^l 极场感生面电荷的 2^l 极分布，而这种分布恰正比于感生电荷的 2^l 极矩 $\mathscr{P}^*_{lm}$. (2.189)中的感生 2^l 极场正是来自这感生的电 2^l 极矩.

将导体表面边条件(2.134)第二式用到现在的问题中得

$$-\epsilon\left.\frac{\partial(\phi + \Delta\phi)}{\partial r}\right|_{r=a} = \sigma(\theta\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sigma_{lm}\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi). \tag{2.199}$$

将(2.189)代入此式左边也可得到 σ_{lm}的一组方程. 它的解正好就是(2.191). 从不同的途径得到相同的结果，表现出理论的自洽.

若外电场为均匀电场，取电场方向为 z 方向，多极展开(2.106)中只有 a_{10}不是零，其余系数 $a_{lm}=0$. 外场电势为

$$\phi = \phi_1 = a_{10}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}r\mathrm{Y}_{10}(\theta\varphi) = a_{10}r\cos\theta = a_{10}z. \tag{2.200}$$

由(2.191)知导体球上感生面电荷密度多极展开系数中

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{10} = -\sqrt{12\pi}\epsilon\, a_{10}, \\ &\sigma_{lm} = 0, \qquad \text{若 } l \neq 0,1 \text{ 或 } m \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.201}$$

σ_{00}仍分不同情况按(2.192)或(2.195)或(2.198)取值. 在导体接地的情况下 $\sigma_{00}=0$，导体外电势为

$$\phi + \Delta\phi = \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)a_{10}z. \tag{2.202}$$

其中附加项 $\Delta\phi = -\frac{a^3}{r^3}a_{10}z$ 为感生电偶极矩

$$\mathscr{P}_{10} = -4\pi\epsilon\, a^3 a_{10} \tag{2.203}$$

产生的电偶极势.

现改将一半径为 a、介电常数为 ϵ' 的均匀中性绝缘介质球放入介电常数为 ϵ 的均匀介质内的外电场中.仍取球心为坐标原点,其中外电场电势仍表为(2.106).球内无自由电荷,电势应具拉普拉斯方程一般解(2.177)的形式.将它写作

$$\phi'(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a'_{lm}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, r^l \mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi). \tag{2.204}$$

介质球被外电场极化,在球外会产生附加电场.按(2.37)附加电场的电势为

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{4\pi\epsilon\, r^{l+1}}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\sum_{m=-l}^{l}\mathscr{P}^*_{lm}\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi), \tag{2.205}$$

其中 $\mathscr{P}_{lm}$ 为介质球在外电场中感生的电 2^l 极矩.由于介质球电荷 $Q = \mathscr{P}_{00} = 0$,(2.205)中对 l 的求和从 $l=1$ 开始.介质球表面也没有自由电荷,边条件(2.5)和(2.6)成为

$$\phi'\big|_{r=a} = (\phi + \Delta\phi)\big|_{r=a}, \qquad \epsilon'\frac{\partial\phi'}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \epsilon\frac{\partial(\phi+\Delta\phi)}{\partial r}\bigg|_{r=a}. \tag{2.206}$$

将(2.204)表示的 ϕ',(2.106)表示的 ϕ 和(2.205)表示的 $\Delta\phi$ 代入此二条件得 $a'_{00} = a_{00}$,且对 $l\neq 0$ 的各项有

$$\left.\begin{aligned} a'_{lm} - \frac{1}{4\pi\epsilon\, a^{2l+1}}\mathscr{P}^*_{lm} &= a_{lm}, \\ \epsilon' a'_{lm} + \frac{l+1}{4\pi l a^{2l+1}}\mathscr{P}^*_{lm} &= \epsilon\, a_{lm}. \end{aligned}\right\} \tag{2.207}$$

由此解得

$$a'_{lm} = \frac{\epsilon(2l+1)}{\epsilon(l+1)+\epsilon' l}a_{lm}, \tag{2.208}$$

$$\mathscr{P}^*_{lm} = 4\pi a^{2l+1}a_{lm}\frac{(\epsilon-\epsilon')l\epsilon}{(\epsilon+\epsilon')l+\epsilon}. \tag{2.209}$$

将它们代回(2.204)和(2.205)便分别得到介质球内的电势和介质球外的电势修正.若外场为 z 方向的均匀电场,外场电势多极展开(2.106)的诸系数(a_{lm})中只有 a_{10}不是零.按(2.208),诸系数(a'_{lm})中也只有

$$a'_{10} = \frac{3\epsilon}{2\epsilon+\epsilon'}a_{10} \tag{2.210}$$

非零;按(2.209),诸感生多极矩($\mathscr{P}^*_{lm}$)中只有

$$\mathscr{P}^*_{10} = 4\pi a^3\frac{\epsilon(\epsilon-\epsilon')}{2\epsilon+\epsilon'}a_{10} \tag{2.211}$$

非零. 将它们分别代回(2.204)和(2.205),得此条件下球形绝缘介质中的电势

$$\phi'(\boldsymbol{r}) = \frac{3\epsilon}{2\epsilon + \epsilon'} a_{10} z, \tag{2.212}$$

和球外的电势

$$\phi(\boldsymbol{r}) + \Delta\phi(\boldsymbol{r}) = \left[1 + \frac{\epsilon - \epsilon'}{2\epsilon + \epsilon'}\frac{a^3}{r^3}\right] a_{10} z. \tag{2.213}$$

§2.8 镜像法,一种求解静电问题的直观方法

在全空间求解静电问题并不难,点电荷的电势(1.59)是熟知的,以它为基础建立的格林函数(2.28)将任意电荷分布的电势表成一个积分(2.30),这便被认为是静电问题的解. 多极展开(2.37)~(2.40)把这个解表达得更加具体,更加形象. 只当电荷分布产生的场受边条件限制时才可能出现困难. 然而人们发现边条件的作用常常可由一假想的电荷分布代替,这假想的电荷分布称为实际电荷分布的像. 引进像电荷分布后便可取消边条件,困难便消除了. 这种方法称为镜像法.

考虑一无穷大导体平面屏蔽的点电荷的静电场. 将无穷远处电势定为零,作为等势面此无穷大导体平面上电势必处处为零,这就是边条件. 乍一看这边条件好像不好处理. 然而不难看出,若将导体平面当作镜平面,在与真实点电荷镜像对称的位置上摆一与真实电荷绝对值相等符号相反的点电荷,镜平面上的电势必处处为零. 这是因为镜平面上任一点与真实点电荷及其镜像等距离,它们在该点产生的电势绝对值相等符号相反恰相抵消. 导体平面的作用遂可用镜像电荷代替. 将点电荷到导体平面的垂足作原点,在导体平面上任取两条过原点互相垂直的轴为 x 轴和 y 轴,取原点指向点电荷的轴为 z 轴. 设点电荷与导体平面距离为 a,它的坐标便是 $x=y=0, z=a$. 像电荷的坐标则为 $x=y=0, z=-a$. 设点电荷电量为 q,像电荷的电量便是 $-q$. 两电荷的总电势为

$$\phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right]. \tag{2.214}$$

显然有 $\phi(x,y,0)=0$,表明此势符合导体平面上的边条件. 在导体平面点电荷一侧半无穷大空间内,此势满足点电荷电势的泊松方程

$$\nabla^2\phi = -\frac{q}{\epsilon}\delta(x)\delta(y)\delta(z-a). \tag{2.215}$$

可见它是这个问题的惟一解. 在导体平面的另一侧并无电荷,实际电势应满足拉普拉斯方程(2.168)和在导体平面上为零的边条件,惟一解是 $\phi=0$,而不由(2.214)表示. 镜像法解(2.214)只适用于实际电荷分布的区域. 另一方面,像电荷只能安排

在求解区域之外,以保证求解区域中正确的泊松方程成立.

仍以导体平面为 xy 平面,它的一侧 (x',y',z') 处有一点电荷电量 $q=\epsilon$. 与此点电荷同侧 (x,y,z) 处的电势按上述镜像法求得为

$$g(x,y,z,x',y',z')=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right]. \quad (2.216)$$

显然有 $g(x,y,0,x',y',z')=0$,即它在导体平面上处处为零. 同时它在点电荷所在一侧满足泊松方程

$$\nabla^2 g(x,y,z,x',y',z')=-\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z'). \quad (2.217)$$

这正是泊松方程格林函数满足的方程(2.60).(2.216)是现在给定的边条件(无穷大导体平面一侧)下的格林函数. 设在导体平面一侧的不是一个点电荷而是一电荷密度分布 $\rho(x',y',z')$,它所在一侧的电势即为

$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y'\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}z'\rho(x',y',z')g(x,y,z,x',y',z')$$
$$=\frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y'\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}z'\rho(x',y',z')\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right], \quad (2.218)$$

另一侧的电势则为零.(2.218)可看作两个电荷分布的电势之和. 一个是真实的电荷密度分布 $\rho(x',y',z')$ 产生的电势,另一个则是镜像电荷密度分布 $-\rho(x',y',-z')$ 产生的电势. 镜像电荷密度分布的几何位形恰为真实电荷密度分布几何位形的镜像反演,电荷符号也恰相反. 在电荷所在的一侧镜像电荷的电势等于导体平面上感生电荷的电势,在这种意义上镜像电荷等价于导体平面上的感生电荷.

用两种不同介质的无穷大交界平面代替导体平面,尝试用镜像法计算两不同半无穷大介质中点电荷 q 的静电势. 以交界面为 xy 平面,点电荷到交界面的垂足为原点,从原点指向点电荷的轴为 z 轴. 点电荷坐标遂为 $x=y=0, z=a>0$, a 为点电荷与界面的距离. 用下标 1 和 2 分别表示 $z>0$ 和 $z<0$ 两均匀介质中的量,在界面上有边条件

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(x,y,0)&=\phi_2(x,y,0),\\ \epsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\bigg|_{z=0}&=\epsilon_2\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\bigg|_{z=0}.\end{aligned}\right\} \quad (2.219)$$

在 $z>0$ 一侧电势符合泊松方程

$$\nabla^2\phi_1=-\frac{q}{\epsilon_1}\delta(x)\delta(y)\delta(z-a), \quad (2.220)$$

在 $z<0$ 一侧则符合拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi_2 = 0. \tag{2.221}$$

现在界面上不会感生自由电荷,介质中却可能感生电偶极矩.这使人猜想可用一对正负点电荷等效地表达点电荷 q 在介质中引起的极化.这一对假想的正负点电荷便是点电荷 q 的像.从对称性考虑像电荷应在 z 轴上,整个问题有绕 z 轴的转动对称,z 轴为对称轴.为使边条件(2.219)在界面上处处满足,应设像电荷与界面距离都是 a.设 $x=y=0, z=a$ 处有像电荷 q_1, $x=y=0, z=-a$ 处有像电荷 q_2.介质 1 中的电势应由点电荷 q 和像电荷 q_2 产生,为

$$\phi_1(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right]. \tag{2.222}$$

它在 $z>0$ 的区域显然满足泊松方程(2.220).介质 2 中的电势应由点电荷 q 和像电荷 q_1 产生,为

$$\phi_2(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} + \frac{q_1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\right]. \tag{2.223}$$

它在 $z<0$ 的区域显然满足拉普拉斯方程(2.221).将此二式代入(2.219)的两个边条件中得

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\epsilon_1}(q+q_2) = \frac{1}{\epsilon_2}(q+q_1), \\ &q_2 - q = -q - q_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.224}$$

此二式作为 q_1 与 q_2 的联立方程组有解

$$q_1 = \frac{\epsilon_2-\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2}q, \qquad q_2 = \frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}q. \tag{2.225}$$

将此解代回(2.222)和(2.223)即得欲求的电势

$$\left.\begin{aligned} \phi_1(x,y,z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_1}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\right. \\ &\qquad\left. + \frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right], \\ \phi_2(x,y,z) &= \frac{q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{2.226}$$

现在将点电荷改置于 $x=y=0, z=-a$ 处,重复以上的推导,得到的电势为

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(x,y,z) &= \frac{q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}},\\ \phi_2(x,y,z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_2}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right.\\ &\quad\left.+\frac{\epsilon_2-\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\right].\end{aligned}\right\} \tag{2.227}$$

它与(2.226)的区别只是交换了下标 1 和 2 并将 a 改成了 $-a$. 综合此二式可得此边值问题的格林函数

$$g(x,y,z,x',y',z') = \begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}\left[\dfrac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right. \\ \quad\left.+\dfrac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}\dfrac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right], & \text{若 } z>0, z'>0,\\ \dfrac{\epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}\dfrac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}, & \text{若 } z<0, z'>0,\\ \dfrac{\epsilon_2}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}\dfrac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}, & \text{若 } z>0, z'<0,\\ \dfrac{1}{4\pi}\left[\dfrac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right. \\ \quad\left.-\dfrac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}\dfrac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right], & \text{若 } z<0, z'<0.\end{cases} \tag{2.228}$$

它在 $z=0$ 处是连续的.

镜像法也可用于边界为曲面的边值问题. 将一半径为 a 的接地导体球和一点电荷 q 置于介电常数为 ϵ 的均匀介质中,点电荷距球心 $b>a$,求电势分布. 导体球上和无穷远处均有电势 $\phi=0$. 取球心为坐标原点,球心指向点电荷的轴为 z 轴,导体球外电势应为

$$\phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}} + \Delta\phi(x,y,z).$$

其中 $\Delta\phi$ 为导体球上感生电荷产生的电势. 设此电势可表为球内某点电荷 q' 产生的电势,q' 为一虚假的像电荷. 由对称性考虑,像电荷 q' 应位于 z 轴上,设它与球心的距离为 $b'<a$. 应有

$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\epsilon}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}+\frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b')^2}}\right].$$

(2.229)

此势在导体球外显然满足正确的泊松方程

$$\nabla^2\phi=-\frac{q}{\epsilon}\delta(x)\delta(y)\delta(z-b),$$

问题只是能否找到适当的 q' 和 b' 值使它在导体球面上处处为零.在球面上 $x^2+y^2+z^2=a^2$,(2.229)给出的电势为

$$\phi=\frac{1}{4\pi\epsilon}\left[\frac{q}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}+\frac{q'}{\sqrt{a^2+b'^2-2ab'\cos\theta}}\right],$$

θ 为涉及的球面点径矢与 z 轴的夹角.令它为零得

$$\frac{q}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}=-\frac{q'}{\sqrt{a^2+b'^2-2ab'\cos\theta}},$$

此式要求 q' 与 q 反号.将两边平方,经整理得

$$q^2(a^2+b'^2-2ab'\cos\theta)=q'^2(a^2+b^2-2ab\cos\theta).$$

要此式对每一 θ 都成立,必须也只须

$$\left.\begin{aligned}q^2(a^2+b'^2)&=q'^2(a^2+b^2),\\ q^2b'&=q'^2b.\end{aligned}\right\}\tag{2.230}$$

将此式当作 q'^2 和 b' 的联立代数方程,用第二式消去第一式中的 q^2/q'^2 得

$$b(a^2+b'^2)=b'(a^2+b^2).$$

将此式看作 b' 的二次代数方程,得二根

$$b'=\frac{a^2}{b}\quad 和\quad b'=b.\tag{2.231}$$

由于 $b'<a$ 而 $b>a$,只有第一根是合理的.将它代回(2.230)第二式得

$$q^2a^2=q'^2b^2,$$

可见

$$q'=-\frac{a}{b}q.\tag{2.232}$$

将(2.231)第一式表示的 b' 和此式表示的 q' 代回(2.229)得欲求的电势.将它用矢量形式表出,$\boldsymbol{r}$ 处的电势为

$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\epsilon}\left(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{-1}-\left|\frac{r'}{a}\boldsymbol{r}-\frac{a}{r'}\boldsymbol{r}'\right|^{-1}\right),\tag{2.233}$$

其中 $\boldsymbol{r}'$ 为点电荷的径矢.对事先定好的坐标轴 $\boldsymbol{r}'$ 不一定沿 z 方向.由此式得此边值问题的格林函数

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\left(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{-1}-\left|\frac{r'}{a}\boldsymbol{r}-\frac{a}{r'}\boldsymbol{r}'\right|^{-1}\right).\tag{2.234}$$

镜像法再一次给出了问题的解.

习 题 二

1. 一无限大均匀荷电平面置于均匀介质中,试计算它两侧的电场与电势分布.

2. 一无限长均匀荷电直线置于均匀介质中,试计算它周围的电场与电势分布.

3. 一均匀荷电,半径为 a,介电常数为 ϵ_1 的均匀介质球置于介电常数为 ϵ_2 的均匀介质中,求电场与电势分布.

4. 设在均匀介质内有电荷分布

$$\rho(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} Ar^n Y_{lm}(\theta\varphi), & 若\ r \leqslant a, \\ 0, & 若\ r > a, \end{cases}$$

r,θ,φ 为球坐标,A、a 和 $n > -3$ 为常数,求电势分布.对 $l=0,1$ 两种情形求电场分布.

5. 一均匀荷电,半径为 a,介电常数为 ϵ_1 的无限长均匀介质圆柱体置于介电常数为 ϵ_2 的均匀介质中,求电场与电势分布.

6. 设在均匀介质中有轴对称电荷分布.用 r 表一点与对称轴的垂直距离,电荷密度为

$$\rho(r) = \begin{cases} Ar^n, & 若\ r \leqslant a, \\ 0, & 若\ r > a, \end{cases}$$

A、a 和 $n > -2$ 为常数.求电场与电势分布.

7. 求一荷电导体球的电场、电势与电荷分布.若在此导体球内挖一同心球形空洞,这些分布是否会变.电荷在导体上只能分布于表面,导体朝向空洞的内表面上有否电荷分布,为什么?

8. 若在上题空洞中心处放一电荷,导体内外表面电荷分布将如何变化.电场和电势分布又如何变化.

9. 有 1、2 两导体组成一系统.从导体 1 输运电荷 q 到导体 2,两导体因而分别有电荷 $q_1 = -q$ 和 $q_2 = q$,以及电势 ϕ_1 和 ϕ_2.试证电荷 q 与电势差 $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ 成正比,且比例常数

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + 2C_{12} + C_{22}}, \tag{2.235}$$

$C_{ii'}(i,i'=1,2)$ 为电容系数,C 为系统的电容.

10. 两无穷大导体平面,相互平行,距离为 d,求单位导体面积的电容.

11. 两同心导体球壳,内壳外径为 a_1,外壳内径为 a_2,求其电容.

12. 两无穷长同轴导体圆筒,内筒外径为 a_1,外筒内径为 a_2,求沿轴单位长度的电容.

13. 在无穷大导体平面一侧距导体平面为 a 处有一电偶极子 $\mathscr{P}$,求电势和电场分布.

14. 设介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 的两半无穷大均匀介质界面为一平面.界面一侧距界面为 a 处有一电偶极子 $\mathscr{P}$,求电势和电场分布.

15. 设半径为 a 的接地导体球外距球心为 $b > a$ 处有一电偶极子 $\mathscr{P}$,求电势与电场分布.

16. 设半径为 a 电荷为 Q 的导体球外距球心为 $b > a$ 处有一点电荷 q,求电势与电场分布.

17. 设半径为 a 电势为 ϕ_0 的导体球外距球心为 $b > a$ 处有一点电荷 q,求电势与电场分布.

18. 设半径为 a 的接地导体球壳所围空间中距球心为 $b < a$ 处有一点电荷 q,求电势与电场

分布.

19. 设半径为 a 电荷为 Q 的导体球壳所围空间中距球心为 $b<a$ 处有一点电荷 q,求电势与电场分布.

20. 试直接验证格林函数(2.234)对自变量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 对称.

第三章　静　磁　学

§3.1　静磁学的研究对象,分区均匀介质中磁场的基本方程,边条件和惟一性定理

不随时间变化的电流称稳定电流,不随时间变化的磁场称静磁场.有稳定电流分布的物体内部和周围会形成静磁场,这种物体称为磁体.静磁学研究稳定电流形成的静磁场以及静磁场对电流和磁体的作用.由于麦克斯韦方程对电磁场、电荷和电流都是线性的,在研究静磁学问题时可不顾电荷和电场分布而将它们置零,即有 $\rho=0,\mathscr{E}=\mathscr{D}=0$.静磁场自然还有 $\dfrac{\partial\mathscr{B}}{\partial t}=0$.在这些条件下要考虑的麦克斯韦方程只有两个,即

$$\nabla\cdot\mathscr{B}=0,\qquad\nabla\times\mathscr{H}=\boldsymbol{j}.\tag{3.1}$$

在分区均匀介质内,每一区域中(1.74)第二式中的 μ 为常数.此二式可写成

$$\nabla\cdot\mathscr{H}=0,\qquad\nabla\times\mathscr{H}=\boldsymbol{j},\tag{3.2}$$

作为静磁学的基本方程.为求边条件,再次用图 2-1.现在将磁场强度$\mathscr{H}$沿闭合回路 $a_1b_1b_2a_2a_1$ 积分.当 a_1b_1 和 a_2b_2 从边界两侧趋于界面上的线段 ab 时,线段 b_1b_2 和 a_2a_1 的长度都趋于零,有限磁场强度在它们上面的积分也趋于零.回路上的线积分便趋于

$$\overrightarrow{ab}\cdot(\mathscr{H}_1-\mathscr{H}_2),$$

下标 1 和 2 仍表示所在介质,$\overrightarrow{ab}$为由 a 指向 b 的矢量.用 $\boldsymbol{\iota}$ 表示界面上的面电流密度.它沿界面,方向指该点沿界面流动的电流方向,大小为过界面上与它垂直的单位长度线段的面电流强度.在 a_1b_1 和 a_2b_2 趋于 ab 的条件下,流过回路 $a_1b_1b_2a_2a_1$ 包围的面积的电流趋于极限

$$\boldsymbol{\iota}\cdot(\overrightarrow{ab}\times\boldsymbol{n}),$$

$\boldsymbol{n}$ 为由介质 1 指向介质 2 的界面单位法矢.由安培定律(1.45)知

$$\overrightarrow{ab}\cdot(\mathscr{H}_1-\mathscr{H}_2)=(\overrightarrow{ab}\times\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{\iota}=\overrightarrow{ab}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\iota}).$$

用下标//表示矢量平行于界面的分量,由$\overrightarrow{ab}$在界面上的任意性得

$$(\mathscr{H}_1-\mathscr{H}_2)_{/\!/}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\iota}.\tag{3.3}$$

取 $\boldsymbol{n}$ 与此式两边的矢量积,由于 $\boldsymbol{n}$ 与任何法向矢量的矢量积为零,得

$$\boldsymbol{n} \times (\mathscr{H}_1 - \mathscr{H}_2) = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\iota}).$$

再由恒等式

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{3.4}$$

和 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\iota} = 0$ 得

$$\boldsymbol{n} \times (\mathscr{H}_2 - \mathscr{H}_1) = \boldsymbol{\iota}. \tag{3.5}$$

此式与(3.3)等价.再看图 2-2.现在将磁感应强度 $\mathscr{B} = \mu\mathscr{H}$ 在界面两侧的小面积 Δs_1 和 Δs_2 以及联结它们的矮柱面上积分.当 Δs_1 和 Δs_2 从界面两侧趋于界面上的小面积 Δs 时,联结它们的矮柱面面积趋于零,有限磁感应强度在其上的面积分也趋于零.由(1.43)知在此极限下

$$\Delta s(\boldsymbol{n} \cdot \mathscr{B}_2 - \boldsymbol{n} \cdot \mathscr{B}_1) = 0,$$

$\mathscr{B}_1$ 与 $\mathscr{B}_2$ 为界面上两侧磁感应强度在 Δs 上某点的值.令 $\Delta s \to 0$ 得

$$\boldsymbol{n} \cdot \mathscr{B}_1 = \boldsymbol{n} \cdot \mathscr{B}_2 \tag{3.6}$$

或

$$\mu_1 \boldsymbol{n} \cdot \mathscr{H}_1 = \mu_2 \boldsymbol{n} \cdot \mathscr{H}_2 \tag{3.7}$$

在界面上处处成立.(3.3)或(3.5)与(3.7)一起构成静磁学基本方程(3.2)的边条件.为在全空间求解(3.2),还需 $\mathscr{H}$ 在无穷远处的边条件.设只在有限区域内有电流分布.按(1.25),径矢为 $\boldsymbol{r}$ 的点上的磁场强度 $\mathscr{H}(\boldsymbol{r})$ 在无穷远处以 $\frac{1}{r^2}$ 的方式趋于零.

若分区均匀的介质中磁导率和电流分布已知,介质界面上的面电流分布已知,电流只分布在有限区域内,静磁学问题即是在上述边条件下从方程组(3.2)中求解未知函数 $\mathscr{H}(\boldsymbol{r})$ 的问题.这是一个明确的数学问题.现证明

惟一性定理 若各区磁导率 $\mu_i > 0$,在上述边条件下方程组(3.2)的解是惟一的.

证 设(3.2)有两个解 $\mathscr{H}(\boldsymbol{r})$ 和 $\mathscr{H}'(\boldsymbol{r})$,都满足无穷远处的边条件和边条件(3.3)与(3.7).定义其差

$$\boldsymbol{H} = \mathscr{H} - \mathscr{H}'. \tag{3.8}$$

将 $\mathscr{H}$ 满足的方程(3.2)与 $\mathscr{H}'$ 满足的同一方程

$$\nabla \cdot \mathscr{H}' = 0, \qquad \nabla \times \mathscr{H}' = \boldsymbol{j}$$

相减,得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = 0. \tag{3.9}$$

其中第二式表明,存在标量函数 $F(\boldsymbol{r})$,使

$$\boldsymbol{H} = -\nabla F \tag{3.10}$$

在介质的每一均匀区域成立.将它代入(3.9)第一式得拉普拉斯方程

$$\nabla^2 F = 0. \tag{3.11}$$

将 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{H}'$ 满足的边条件(3.3)相减,由(3.8)和(3.10)得 F 的边条件

$$(\nabla F_1)_{/\!/} = (\nabla F_2)_{/\!/}. \tag{3.12}$$

它表明 F 在界面两侧沿界面的变化相同.由于在每一均匀区域中都可在 F 上加减一任意常数,因而可使 F 在界面两侧取值相同,F 便是一连续函数.将$\mathscr{H}$和$\mathscr{H}'$满足的边条件(3.7)相减,由(3.8)和(3.10)得 F 的相应边条件

$$\mu_1 \frac{\partial F_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial F_2}{\partial n}, \tag{3.13}$$

$\frac{\partial}{\partial n} \equiv \boldsymbol{n} \cdot \nabla$为沿界面法向 $\boldsymbol{n}$ 的梯度.在第 i 均匀介质所占体积 $\mathscr{V}_i$ 中用格林公式(2.13).在其中置

$$\psi_1 = \mu_i F, \qquad \psi_2 = F,$$

注意拉普拉斯方程(3.11),得

$$\oint_{s_i} \mu_i F(\nabla F) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\mathscr{V}_i} \mu_i (\nabla F)^2 \mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{3.14}$$

其中 s_i 为 $\mathscr{V}_i$ 的表面.设 i 和 i' 两介质有共同界面 $s_{ii'}$,其上法向单位矢量由 i 侧指向 i' 侧.此式左边在此共同界面上属于 i 和 i' 介质的两项面积分之和为

$$\int_{s_{ii'}} F\left(\mu_i \frac{\partial F_i}{\partial n} - \mu_{i'} \frac{\partial F_{i'}}{\partial n}\right) \mathrm{d}s = 0, \tag{3.15}$$

这里用了边条件(3.13)和 F 的连续性.将(3.14)对所有介质,包括真空,求和.左边由于(3.15)只剩下无穷远处的面积分.由于无穷远处$\mathscr{H}$和$\mathscr{H}'$都以$\frac{1}{r^2}$的方式趋于零,它们的差 $\boldsymbol{H}$ 也以此方式趋于零.(3.10)则表明 F 应以$\frac{1}{r}$的方式在无穷远处趋于零.可见(3.14)左边面积分的被积函数在无穷远处以$\frac{1}{r^3}$的方式趋于零,而积分面积则按 r^2 的方式在无穷远处趋于无穷.二者相乘得此面积分在无穷远处以$\frac{1}{r}$的方式趋于零.(3.14)左边对所有介质的和为零,使右边的和

$$\sum_i \int_{\mathscr{V}_i} \mu_i (\nabla F)^2 \mathrm{d}\mathscr{V} = 0. \tag{3.16}$$

已设介质中 $\mu_i \neq 0$ 恒正,此式成立的充分兼必要条件为处处 $\nabla F = 0$,从而处处

$$\boldsymbol{H} = -\nabla F = 0,$$

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}'. \tag{3.17}$$

所论静磁问题的任意两个解彼此全同,解是惟一的.证毕.

解的惟一性保证解与求解方式无关.这使人们可以最简方式求解,甚至可以猜解.只要验明它确是方程在给定边条件下的解,便是欲求的.解的惟一性还表明了方程组的完备性,即它足以定解.

(3.1)的第一个方程表明静磁场有矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$,使

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}). \tag{3.18}$$

代入(1.74)第二式左边,将解出的$\mathscr{H} = \mathscr{B}/\mu$ 代入(3.1)第二式左边,用向量分析恒

等式(1.111)得,在每一均匀介质中

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{j}. \tag{3.19}$$

取库仑规范,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0, \tag{3.20}$$

(3.19)成为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{j}. \tag{3.21}$$

这是一个矢量泊松方程,未知矢量函数为矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$,非齐次项为电流密度矢量 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$与磁导率 μ 的积.由 $\boldsymbol{A}$ 经(3.18)可得$\mathscr{B}$,再由(1.74)第二式可得$\mathscr{H}$,静磁场可由矢势 $\boldsymbol{A}$ 表示.静磁学的问题归结为矢量泊松方程(3.21)的边值问题,就像静电学问题归结为标量泊松方程(2.3)的边值问题一样.矢量泊松方程的每个分量方程与标量泊松方程形式完全一样,差别只在边条件.上章关于求解泊松方程一般方法的讨论中不涉及具体边条件的部分,特别是§2.3 的大部分内容,可用于静磁学问题的求解.

§3.2 电流分布的磁多极矩与静磁场的多极展开

设磁导率为常数 μ 的均匀介质占据了全空间,其中有恒定电流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$分布在有界区域中.用泊松方程的格林函数(2.28)可从矢量泊松方程(3.21)解得这电流分布的静磁矢势

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}', \tag{3.22}$$

对 $\boldsymbol{r}'$的积分遍及全空间,实际上当然只有 $\boldsymbol{j}\neq 0$ 的有限区域有贡献.在(3.22)两边取散度得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\left(\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}\mathscr{V}'.$$

显然有

$$\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=-\nabla'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \tag{3.23}$$

∇和∇'分别为函数对坐标$\boldsymbol{r}$ 和坐标$\boldsymbol{r}'$的梯度.于是上式成为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})&=-\frac{\mu}{4\pi}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\left(\nabla'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}\mathscr{V}'\\&=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}'-\frac{\mu}{4\pi}\int\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}\mathscr{V}'.\end{aligned}$$

右边第二项可用高斯定理化作无穷远处的面积分.由于无穷远处 $\boldsymbol{j}=0$,这项积分为零.在恒定电流条件下各处电荷密度应保持不变,从而$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$.按连续性方程

(1.31),这导致

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{3.24}$$

可见上式右边第一项积分也是零,从而$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$.(3.22)表达的静磁矢势符合库仑规范条件,因而就是本问题的解.

考虑一点附近无穷小区域中电流分布的磁场.将此点取为坐标原点.(3.22)右边对 $\boldsymbol{r}'$的积分局限在原点附近的无穷小区域中,$\boldsymbol{r}'$为无穷小量.可将被积函数中的因子$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{-1}$展成 $\boldsymbol{r}'$的幂级数且只取到$\boldsymbol{r}'$的一次幂,得

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}'}{r^3} + \cdots. \tag{3.25}$$

代入(3.22),将它简化为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi r}\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}' + \frac{\mu}{4\pi r^3}\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}\mathrm{d}\mathscr{V}'. \tag{3.26}$$

为计算此式右边两个积分,先证明

公式 对任二可微函数 $f_1(\boldsymbol{r})$和 $f_2(\boldsymbol{r})$,以及只在有界区域内非零的无散矢量函数 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$,

$$\int (f_1\boldsymbol{j} \cdot \nabla f_2 + f_2\boldsymbol{j} \cdot \nabla f_1)\mathrm{d}\mathscr{V} = 0, \tag{3.27}$$

积分遍及全空间.

证 作分部积分

$$\begin{aligned}\int f_1\boldsymbol{j} \cdot \nabla f_2\mathrm{d}\mathscr{V} &= \int f_1f_2\boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} - \int [\nabla \cdot (f_1\boldsymbol{j})]f_2\mathrm{d}\mathscr{V} \\ &= -\int f_2\boldsymbol{j} \cdot \nabla f_1\mathrm{d}\mathscr{V} - \int f_1f_2 \nabla \cdot \boldsymbol{j}\mathrm{d}\mathscr{V} \\ &= -\int f_2\boldsymbol{j} \cdot \nabla f_1\mathrm{d}\mathscr{V}.\end{aligned}$$

此式第一等号右边面积分在包围整个空间的无穷大表面上进行,其上 $\boldsymbol{j}=0$,因而积分为零.第三等号处则用到 $\boldsymbol{j}$ 的无散性,即$\nabla \cdot \boldsymbol{j}=0$.将此式最右边的结果移到左边即得公式(3.27).证毕.

用 x_i, $i=1,2,3$,表示互相垂直的三个方向上的笛卡儿坐标.取 $f_1(\boldsymbol{r})=1$, $f_2(\boldsymbol{r})=x_i$,代入(3.27)得

$$\int j_i(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} = 0,$$

其中的 $j_i(\boldsymbol{r})$为 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$的第 i 分量.将各分量的结果合起来即是矢量关系

$$\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} = 0. \tag{3.28}$$

将被积函数 $\boldsymbol{j}$ 认定为(3.26)中的电流密度矢量,此式表明(3.26)右边第一项为零.取 $f_1(\boldsymbol{r})=x_i$, $f_2(\boldsymbol{r})=x_{i'}$,代入(3.27)得

$$\int(x_i j_{i'} + x_{i'} j_i)\mathrm{d}\mathscr{V} = 0.$$

此式左边被积函数的第一项为张量 $\boldsymbol{rj}$ 的第 ii'分量,第二项为张量 $\boldsymbol{jr}$ 的第 ii'分量.由于此式对任何下标对 ii'都成立,故可写为张量形式

$$\int[\boldsymbol{rj}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}]\mathrm{d}\mathscr{V} = 0. \tag{3.29}$$

由此还可得

$$\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\mathrm{d}\mathscr{V} = \frac{1}{2}\int[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - \boldsymbol{rj}(\boldsymbol{r})]\mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{3.30}$$

它表明左边被积张量的对称部分积分为零,只剩下反对称部分的积分.利用这个关系得

$$\begin{aligned}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}\mathscr{V}' &= \int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\mathscr{V}'\cdot\boldsymbol{r}\\ &= \frac{1}{2}\int[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}\mathscr{V}'\cdot\boldsymbol{r}\\ &= \frac{1}{2}\int[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{r}]\mathrm{d}\mathscr{V}'\\ &= \frac{1}{2}\int[\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')]\times\boldsymbol{r}\mathrm{d}\mathscr{V}'\\ &= \frac{1}{2}\int\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}'\times\boldsymbol{r}.\end{aligned} \tag{3.31}$$

代回(3.26)右边第二项,定义

$$\mathscr{M} = \frac{1}{2}\int\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}' \tag{3.32}$$

为此电流分布的磁偶极矩,得

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu\,\mathscr{M}\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}. \tag{3.33}$$

可直接验证此矢势散度为零.对它取旋度即得磁感应强度

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\mathbf{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{3(\mathscr{M}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}_0 - \mathscr{M}}{r^3}. \tag{3.34}$$

这就是磁偶极矩$\mathscr{M}$产生的磁场.此式与表示电偶极矩产生的电场的(2.22)式相似,只是用磁偶极矩$\mathscr{M}$代替了电偶极矩$\mathscr{P}$,用磁导率 μ 代替了介电常数的倒数$\frac{1}{\epsilon}$,用磁感应强度$\mathscr{B}$代替了电场强度$\mathscr{E}$.对一环形无穷细电路

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l}, \tag{3.35}$$

其中 I 为电路中的电流强度,$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为 $\mathrm{d}\mathscr{V}$中沿电路方向的线元.(3.32)可表为

$$\mathscr{M} = \frac{I}{2}\oint\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}, \tag{3.36}$$

变量 $\boldsymbol{r}'$已改写为$\boldsymbol{r}$.式中

$$d\boldsymbol{s} \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{l} \tag{3.37}$$

为以径矢 $\boldsymbol{r}$ 和线元 $d\boldsymbol{l}$ 为两边的三角形面积元矢量.

$$\boldsymbol{s} \equiv \int d\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\oint \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{l} \tag{3.38}$$

便是环形电路包围的矢量面积.(3.36)可表为

$$\boldsymbol{\mathscr{M}} = I\boldsymbol{s}. \tag{3.39}$$

若环形电路在一平面内,$\boldsymbol{s}$ 的长度 s 即它包围的平面面积.磁偶极矩的代数值便是

$$\mathscr{M} = Is. \tag{3.40}$$

将电流分布的范围缩为一点,$s \to 0$,同时令 $I \to \infty$,以保持$\boldsymbol{\mathscr{M}}$不变.这样得到的一个具磁偶极矩的点称为磁偶极子.

若磁偶极子不在原点而在 $\boldsymbol{r}'$处,它在 $\boldsymbol{r}$ 处的磁感应强度应从(3.34)变为

$$\boldsymbol{\mathscr{B}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\left\{\frac{3[\boldsymbol{\mathscr{M}}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')](\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^5} - \frac{\boldsymbol{\mathscr{M}}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\right\}. \tag{3.41}$$

设将磁偶极子$\boldsymbol{\mathscr{M}}$从原点作无穷小位移 $\boldsymbol{l}'$后再在原点放一相反的磁偶极子 $-\boldsymbol{\mathscr{M}}$,两个相反磁偶极子在 $\boldsymbol{r}$ 处产生的磁感应强度到$\boldsymbol{l}'$的一级小为

$$\boldsymbol{\mathscr{B}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{(15\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{Q}^{(\mu)}\cdot\boldsymbol{r}_0 - 3Tr\boldsymbol{Q}^{(\mu)})\boldsymbol{r}_0 - 6\boldsymbol{Q}^{(\mu)}\cdot\boldsymbol{r}_0}{r^4}, \tag{3.42}$$

其中

$$\boldsymbol{Q}^{(\mu)} \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\mathscr{M}} + \boldsymbol{\mathscr{M}}\boldsymbol{l}') \tag{3.43}$$

为此系统的磁四极矩.令位移 $\boldsymbol{l}' \to 0$,磁偶极矩$\boldsymbol{\mathscr{M}} \to \infty$,并保持磁四极矩 $\boldsymbol{Q}^{(\mu)}$固定,可将系统缩成一点.这种具磁四极矩的点称为磁四极子.(3.42)与表示电四极矩电场的(2.27)式也相似,只是用磁四极矩 $\boldsymbol{Q}^{(\mu)}$代替了电四极矩 $\boldsymbol{Q}$,用磁导率 μ 代替了介电常数的倒数$\frac{1}{\epsilon}$,用磁感应强度$\boldsymbol{\mathscr{B}}$代替了电场强度$\boldsymbol{\mathscr{E}}$.磁四极矩的表达式(3.43)与电四极矩的表达式(2.25)也是相似的,只是在它的右边用磁偶极矩$\boldsymbol{\mathscr{M}}$代替了电偶极矩$\boldsymbol{\mathscr{P}}$.

这种作法显然可不断进行下去,每做一次便得到由电流分布位置 $\boldsymbol{r}'$的微分引起的磁感应强度$\boldsymbol{\mathscr{B}}$的新一级微分.这便是一个新磁多极场,极数为原多极场的二倍.一般地可得磁 2^l 极场,l 为自然数 1,2,3,….$\boldsymbol{\mathscr{B}}$对 $\boldsymbol{r}'$多微分一次相当于在展开式(3.25)中多取一项.将所有的项都取全了便是静磁场的多极展开.静磁场也可表为各种磁多极场的叠加.与静电场不同的是没有与单极场(2.55)相当的项,表明没有磁单极子,没有自由磁荷.电结构的基础是点电荷,而磁结构的基础则是磁偶极子.

§3.3 外磁场对电流分布的作用力、力矩和势能

电流,即流动的电荷受洛伦兹力的作用,力密度由(1.15)表示.整个电流系统受力

$$\boldsymbol{F} = \int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} = \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \mathscr{B}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{3.44}$$

对 $\boldsymbol{r}$ 的体积分遍及电流分布的空间. $\mathscr{B}(\boldsymbol{r})$ 为 $\boldsymbol{r}$ 处的外磁场磁感应强度,由远处的电流分布产生; $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 为 $\boldsymbol{r}$ 处被作用的电流密度.若受力的电流系统占据的空间范围小,可将 $\mathscr{B}(\boldsymbol{r})$ 在此小空间范围中的一点附近作展开,成为小量 $\boldsymbol{r}$ 的幂级数

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{r}) = \mathscr{B}(0) + \boldsymbol{r} \cdot \nabla \mathscr{B}(0) + \cdots. \tag{3.45}$$

代入(3.44)得

$$\boldsymbol{F} = \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} \times \mathscr{B}(0) - \int \boldsymbol{r} \cdot (\nabla \mathscr{B}(0)) \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}.$$

由(3.28)知右边第一项为零,

$$\boldsymbol{F} = -\int \boldsymbol{r} \cdot (\nabla \mathscr{B}(0)) \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{3.46}$$

引入三维全反对称张量($\epsilon_{i_1 i_2 i_3}$),下标 i_1、i_2、i_3 的取值范围均为整数 1、2、3,且

$$\epsilon_{i_1 i_2 i_3} = \begin{cases} 1, & 若\ i_1 i_2 i_3\ 为\ 1\ 2\ 3\ 的偶排列, \\ 0, & 若三个下标中有一对相等, \\ -1, & 若\ i_1 i_2 i_3\ 为\ 1\ 2\ 3\ 的奇排列, \end{cases} \tag{3.47}$$

上式可表为分量形式

$$F_{i_1} = \sum_{i_2, i_3 = 1}^{3} \epsilon_{i_1 i_2 i_3} \int \boldsymbol{r} \cdot (\nabla \mathscr{B}_{i_3}(0)) j_{i_2}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{3.48}$$

这里下标值1、2 和 3 分别表示互相垂直的三个方向.用 x_i 表 $\boldsymbol{r}$ 的第 i 分量, ∂_i 表示 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$,用(3.30)的分量形式

$$\int j_{i_1}(\boldsymbol{r}) x_{i_2} \mathrm{d}\mathscr{V} = \frac{1}{2} \int (j_{i_1}(\boldsymbol{r}) x_{i_2} - x_{i_1} j_{i_2}(\boldsymbol{r}))\mathrm{d}\mathscr{V} \tag{3.49}$$

得

$$\begin{aligned} \int \boldsymbol{r} \cdot (\nabla \mathscr{B}_{i_3}(0)) j_{i_2}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} &= \sum_{i=1}^{3} \int x_i j_{i_2}(\boldsymbol{r}) \partial_i \mathscr{B}_{i_3}(0)\mathrm{d}\mathscr{V} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \int (x_i j_{i_2} - x_{i_2} j_i) \partial_i \mathscr{B}_{i_3}(0)\mathrm{d}\mathscr{V} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}\mathrm{d}\mathscr{V} \right) \times \nabla \right]_{i_2} \mathscr{B}_{i_3}(0). \end{aligned}$$

代回(3.48)并将结果写成矢量形式即是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \left[\left(\frac{1}{2}\int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}\mathrm{d}\mathscr{V}\right) \times \nabla\right] \times \mathscr{B}(0) \\
&= (\mathscr{M} \times \nabla) \times \mathscr{B}(0) \\
&= \nabla(\mathscr{M} \cdot \mathscr{B}(0)) - \mathscr{M}(\nabla \cdot \mathscr{B}(0)).
\end{aligned}
$$

注意这里的梯度算符∇只对磁感应强度$\mathscr{B}(\boldsymbol{r})$运算,运算后再将其中的自变量 $\boldsymbol{r}$ 置零.由麦克斯韦方程(1.71),此式进一步简化为

$$
\boldsymbol{F} = \nabla(\mathscr{M} \cdot \mathscr{B}). \tag{3.50}
$$

作用在电流分布上的力矩

$$
\boldsymbol{J} = \int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} = \int \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \mathscr{B}(\boldsymbol{r}))\mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{3.51}
$$

将展开式(3.45)代入,保留最低次项得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J} &= \int \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \mathscr{B}(0))\mathrm{d}\mathscr{V} \\
&= \int [(\boldsymbol{r} \cdot \mathscr{B}(0))\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}))\mathscr{B}(0)]\mathrm{d}\mathscr{V}.
\end{aligned}
$$

在(3.27)中置 $f_1(\boldsymbol{r}) = f_2(\boldsymbol{r}) = r$ 得

$$
\int \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} = 0, \tag{3.52}
$$

因而上式右边第二项积分为零,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J} &= \int (\boldsymbol{r} \cdot \mathscr{B}(0))\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} \\
&= \mathscr{B}(0) \cdot \int \boldsymbol{r}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} \\
&= \mathscr{B}(0) \cdot \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} \\
&= \frac{1}{2}\int [(\mathscr{B}(0) \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) - (\mathscr{B}(0) \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}))\boldsymbol{r}]\mathrm{d}\mathscr{V} \\
&= \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})) \times \mathscr{B}(0)\mathrm{d}\mathscr{V} \\
&= \mathscr{M} \times \mathscr{B}(0).
\end{aligned} \tag{3.53}
$$

当电流分布的空间范围缩小成为一点时,即对磁偶极子,(3.50)和此式都成为严格的.

磁偶极子的组态包括它的空间位置和磁偶极矩.空间位置可由它的三个正交直线坐标 x_1、x_2 和 x_3 表示.以它所在点的磁感应强度$\mathscr{B}$的方向为极轴建立球坐标,磁偶极矩$\mathscr{M}$的方向可用球面坐标 $\theta\varphi$ 表示.于是磁偶极子的广义坐标可选为 x_1、x_2、x_3、θ、φ 和磁偶极矩大小 $\mathscr{M}$本身.(3.50)和(3.53)表明可建立磁偶极子在外磁场$\mathscr{B}(\boldsymbol{r})$中的势函数

$$
V = -\mathscr{M} \cdot \mathscr{B}(\boldsymbol{r}) = -\mathscr{M}\mathscr{B}(\boldsymbol{r})\cos\theta, \tag{3.54}
$$

将 x_i 自由度的广义力表为

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \qquad i = 1,2,3. \tag{3.55}$$

θ 自由度的广义力为

$$J_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\mathscr{M}\mathscr{B}(\boldsymbol{r})\sin\theta, \tag{3.56}$$

φ 自由度的广义力

$$J_\varphi = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \tag{3.57}$$

最后检视 $\mathscr{M}$ 自由度. 如图 3-1, 在电流强度为 I 的平面环形电路的线段 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 上有力 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 作用. 当此线段沿电路平面向外虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 时此力作虚功

$$\mathrm{d}\delta W = I(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{\mathscr{B}})\cdot\delta\boldsymbol{r} = I(\delta\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\mathscr{B}}. \tag{3.58}$$

沿电路积分一周得外力对电路向外虚扩张的虚功

$$\delta W = I\oint(\delta\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\mathscr{B}} = I\delta\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\mathscr{B}}. \tag{3.59}$$

其中

$$\delta\boldsymbol{s} \equiv \oint\delta\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3.60}$$

为虚扩张中的面积变分. 由于此变分中保持磁偶极矩方向不变, $\delta\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{\mathscr{M}}$ 同方向, (3.59)简化为

$$\delta W = I\delta s\mathscr{B}\cos\theta = \delta\mathscr{M}\mathscr{B}\cos\theta = -\frac{\partial V}{\partial\mathscr{M}}\delta\mathscr{M}. \tag{3.61}$$

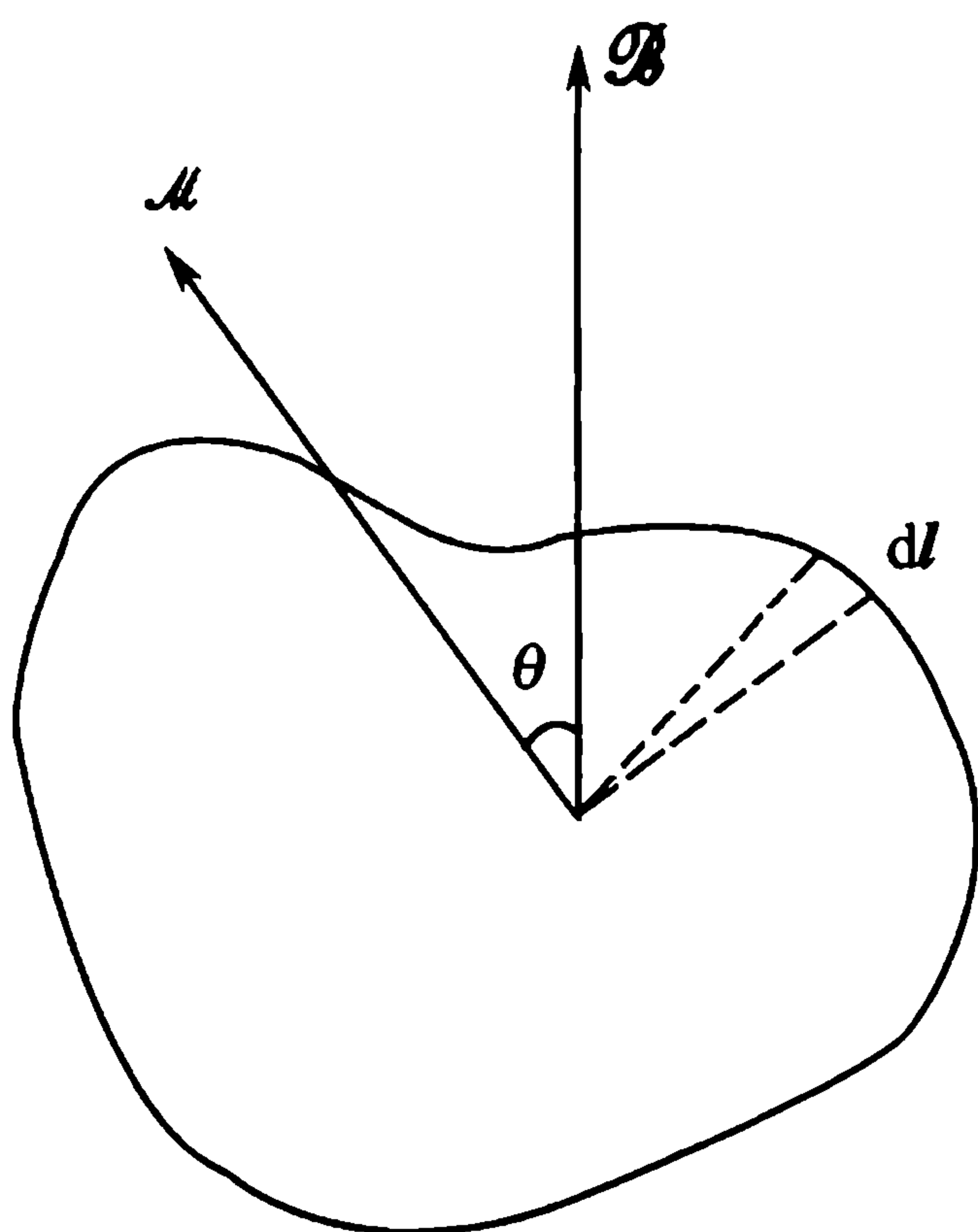


图 3-1　磁场对环形电路的作用

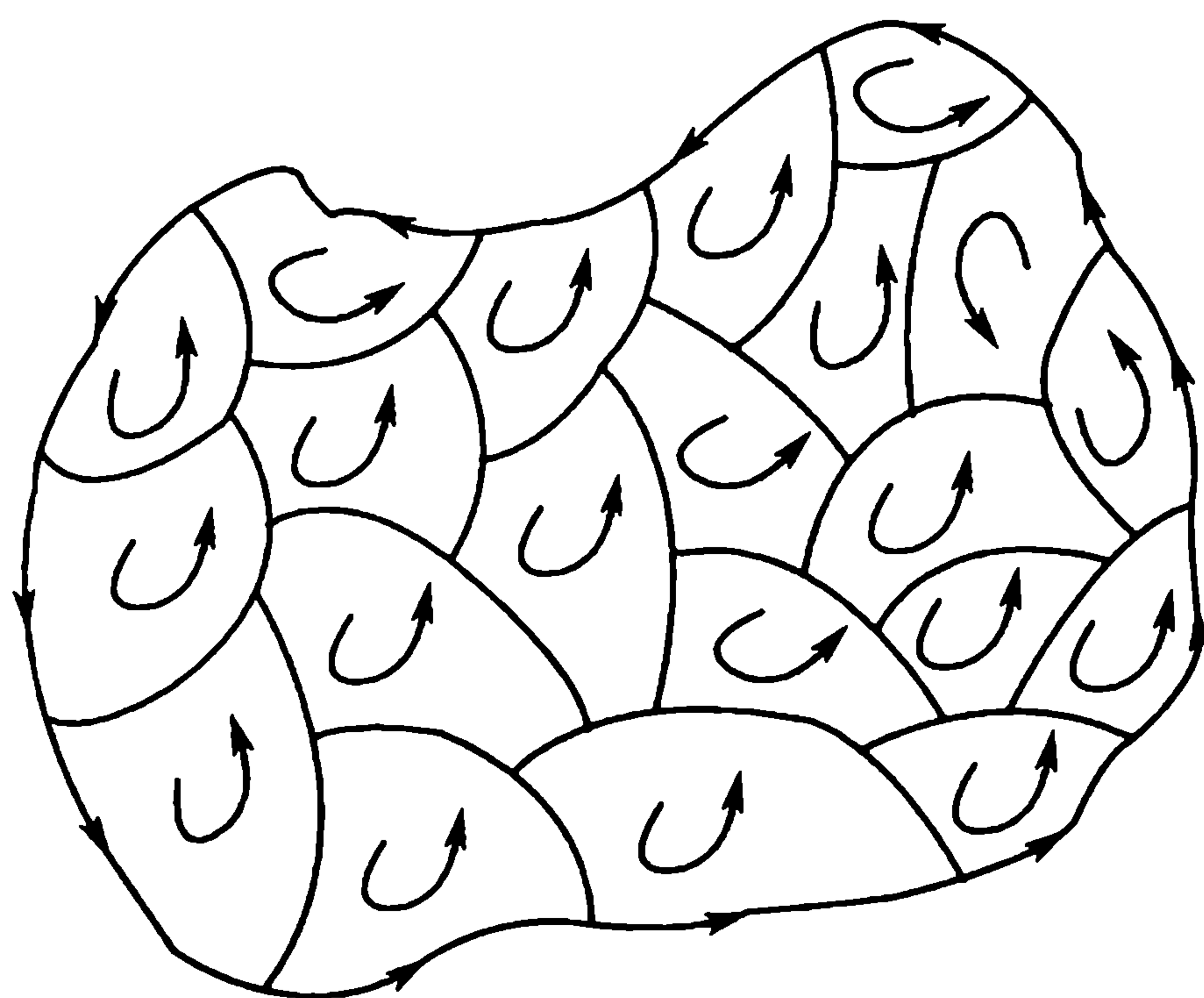


图 3-2　环形电路的微分

可见 $\mathscr{M}$ 自由度的广义力也可表为 $-\frac{\partial V}{\partial\mathscr{M}}$, 这便确证了(3.54)定义的 V 为磁偶极子在外磁场中的势函数. 由于不显含时间 t, 这势函数也就是此系统的势能. 如图 3-2 所示, 一般的电流分布总可分解为许多小环形平面电路组成, 这一结论遂具一般

性.将每一无穷小环形平面电路当作一磁偶极子,一般的电流分布便是磁偶极子的集合.其中每一个磁偶极子的势能都可表为(3.54)的形式.这一势能代表的作用促使磁偶极矩矢量的方向趋于磁感应强度所指的方向,当此二方向形成锐角时则促使磁偶极子向磁感应强度增加的方向运动,且在磁偶极矩大小可变的条件下促其增大.

§3.4 介质的磁化,磁化强度,磁化率与磁导率

介质中的束缚电荷可在介质内局域地流动,形成束缚电流.将束缚电流等同于真空中的电流,可用真空电动力学讨论介质的磁性质,导出介质中静磁学的全部内容.由束缚电流分布可计算介质内每一宏观区域的磁偶极矩.若每一宏观区域磁偶极矩均为零则称此介质未磁化.设介质内某点附近体积为 $\Delta\mathscr{V}$ 的小区域中有磁偶极矩 $\Delta\mathscr{M}$,极限

$$\boldsymbol{M}\equiv\frac{\mathrm{d}\mathscr{M}}{\mathrm{d}\mathscr{V}}\equiv\lim_{\Delta\mathscr{V}\to 0}\frac{\Delta\mathscr{M}}{\Delta\mathscr{V}}\tag{3.62}$$

称为该点的磁化强度.按此定义,磁化强度为 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')$ 的点 $\boldsymbol{r}'$ 附近 $\mathrm{d}\mathscr{V}'$ 体积元中有磁偶极矩

$$\mathrm{d}\mathscr{M}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}'.$$

它按(3.33)在 $\boldsymbol{r}$ 点处产生矢势

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}\mathscr{V}'.$$

由于介质已被还原成束缚电荷电流分布,这里用的是真空电动力学,磁导率已确定为真空磁导率 μ_0.将此式遍及全介质积分,得介质中束缚电流在 $\boldsymbol{r}$ 处产生的矢势

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}\mathscr{V}'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times\nabla'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\nabla'\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}',\end{aligned}\tag{3.63}$$

其中∇'表示对坐标$\boldsymbol{r}'$取梯度.在第三等号处作了部分积分,并设介质大小有限,无穷远处磁化强度为零,因而积得的无穷远处面积分为零.与(3.22)比较知,此矢势可看作束缚电流分布

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})=\nabla\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})\tag{3.64}$$

所产生.束缚电流分布的这个表达式正是(1.38)式.如果磁化是由外磁场引起的,如果磁化强度与磁感应强度间的关系可作线性近似,如果介质是各向同性的,则有(1.39)式,并进而得(1.41)式,即

$$\boldsymbol{M}=\chi_{\mathrm{m}}\mathscr{H},\tag{3.65}$$

其中比例常数 χ_m 称为介质的磁化率,磁场强度定义为

$$\mathscr{H} = \frac{\mathscr{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}, \tag{3.66}$$

符合方程

$$\nabla \times \mathscr{H} = \boldsymbol{j},$$

$\boldsymbol{j}$ 为自由电流密度矢量.由(3.65)和(3.66)得

$$\mathscr{B} = \mu\mathscr{H},$$

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m). \tag{3.67}$$

这便在线性近似下导得了各向同性介质中的静磁学,并将介质磁导率 μ 用真空磁导率 μ_0 和介质磁化率 χ_m 表示出来.

有些介质会自发磁化,称为铁磁体.它的磁化是由于内部作用而不必由外磁场诱导.对这种介质,(3.65)与(3.67)不成立,前面直到(3.64)的讨论则仍成立.一般说来,在两不同介质的界面上,包括介质与真空的界面上,可有束缚面电流密度分布.将(3.64)两边在任一体积 $\mathscr{V}$ 内积分,利用高斯定理

$$\int_{\mathscr{V}} \nabla \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\mathscr{V} = \int_s \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}), \tag{3.68}$$

s 为体积 $\mathscr{V}$ 的表面,得

$$\int_{\mathscr{V}} \boldsymbol{j}_m(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\mathscr{V} = \int_s \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}). \tag{3.69}$$

再次用图 2-2,在界面两侧小面积 Δs_1 和 Δs_2 以及联结它们边缘的矮柱面包围的体积中用此式.在 Δs_1 和 Δs_2 从两侧趋于界面上的小面积 Δs 从而矮柱面高度 δ 趋于零的条件下此式趋于

$$\boldsymbol{j}_m \Delta s \delta = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1)\Delta s,$$

$\boldsymbol{n}$ 为界面由介质 1 指向介质 2 的单位法矢.此式左边为小体积 $\Delta s\delta$ 中的电流,在 $\delta \to 0$ 条件下就是小面积 Δs 上的电流.界面上的束缚面电流密度矢量遂为

$$\boldsymbol{\iota}_m = \lim_{\delta \to 0} \boldsymbol{j}_m \delta = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1). \tag{3.70}$$

设介质 1 是磁化的,$\boldsymbol{M}_1 \equiv \boldsymbol{M} \neq 0$,介质 2 没有磁化,$\boldsymbol{M}_2 = 0$,则磁化介质表面有束缚面电流密度

$$\boldsymbol{\iota}_m = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n}, \tag{3.71}$$

$\boldsymbol{n}$ 为磁化介质表面的外向单位法矢.

考虑一条均匀磁化柱形磁棒,其上磁化强度为常矢量 $\boldsymbol{M}$ 沿柱轴方向.由(3.64)知其内部束缚电流处处为零.(3.71)则表明有束缚面电流绕柱表面流动,宛如一柱形线圈.

§3.5 等效磁荷与静磁标势,多极展开与电磁对应

考虑一无自由电流分布的磁介质系统,安培定律(1.32)成为

$$\nabla \times \mathscr{H} = 0. \tag{3.72}$$

将此系统当作一束缚电荷电流系统,用真空电动力学研究.由(1.71)和(3.66)得

$$\nabla \cdot \mathscr{H} = \frac{\rho^{(m)}}{\mu_0}, \tag{3.73}$$

其中

$$\rho^{(m)} = -\mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{M}. \tag{3.74}$$

(3.72)表明存在静磁标势 $\phi^{(m)}(\boldsymbol{r})$,磁场强度可用它表为

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{r}) = -\nabla \phi^{(m)}(\boldsymbol{r}). \tag{3.75}$$

代入(3.73)得

$$\nabla^2 \phi^{(m)} = -\frac{\rho^{(m)}}{\mu_0}. \tag{3.76}$$

与(2.3)比较,可将 $\rho^{(m)}(\boldsymbol{r})$解释为磁荷密度.它的体积分

$$Q^{(m)} = \int_{\mathscr{V}} \rho^{(m)}(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\mathscr{V} \tag{3.77}$$

便可解释为体积 $\mathscr{V}$内的磁荷.这种磁荷只在介质内存在,是介质中束缚电流导致的介质磁化的结果.将(3.74)代入(3.77)且在包含整个介质的体积内积分得

$$Q_t^{(m)} = -\mu_0 \int_{\mathscr{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{M} \mathrm{d}\mathscr{V} = -\mu_0 \oint_s \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{3.78}$$

s 为包围整个介质的表面.由于此表面已在介质之外,磁化强度 $\boldsymbol{M}=0$,右边面积分为零,从而总磁荷

$$Q_t^{(m)} = 0. \tag{3.79}$$

可见称 $Q^{(m)}$为磁荷只是一种数学类比.(1.71)已明确表示并无真实磁荷.$Q^{(m)}$表示的只是一种等效磁荷.$\rho^{(m)}(\boldsymbol{r})$为等效磁荷密度.

磁化强度可能有不连续的变化,例如在磁体内为 $\boldsymbol{M}$,在磁体外的真空或另一介质中为零.一般地考虑磁化强度分别为 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$ 的两介质界面.界面上磁化强度发生不连续的变化.在此界面如图 2-2 所示的扁盒内将(3.74)两边积分.左边得盒内磁荷 $Q^{(m)}$,右边用高斯定理得 $-\mu_0 \boldsymbol{M}$ 的表面积分.当 Δs_1 和 Δs_2 分别从两侧趋于界面上的小面积 Δs,盒的高度 $\delta \to 0$ 时,此关系可表为

$$\sigma^{(m)} = -\mu_0 \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1), \tag{3.80}$$

其中 $\sigma^{(m)}$为界面上的磁荷面密度,$\boldsymbol{n}$ 为界面由介质 1 指向介质 2 的单位法矢.设介质 1 为磁化强度为 $\boldsymbol{M}$ 的磁体,介质 2 没有磁化,从而磁化强度为零.(3.80)表示此磁体表面有等效面磁荷密度

$$\sigma^{(m)} = \mu_0 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{M}, \tag{3.81}$$

$\boldsymbol{n}$ 为磁体表面外向单位法矢.在这里不同介质只是磁化强度不同.由于都用真空电动力学讨论,磁导率是相同的,都等于真空磁导率 μ_0.将磁场强度$\mathscr{H}$沿图 2-1 所示跨界面的回路 $a_1b_1b_2a_2a_1$ 作线积分.按(3.75),在 a_1b_1 和 a_2b_2 分别从两侧趋于

界面上的线段 ab 的条件下,此积分为

$$\phi_{a_1}^{(\mathrm{m})} - \phi_{b_1}^{(\mathrm{m})} + \phi_{b_2}^{(\mathrm{m})} - \phi_{a_2}^{(\mathrm{m})},$$

其中 $\phi_{a_i}^{(\mathrm{m})}$ 和 $\phi_{b_i}^{(\mathrm{m})}$, $i=1,2$,分别为 a_i 点和 b_i 点的等效静磁标势.另一方面,按(3.72)此积分应为零,因此

$$\phi_{a_1}^{(\mathrm{m})} - \phi_{b_1}^{(\mathrm{m})} = \phi_{a_2}^{(\mathrm{m})} - \phi_{b_2}^{(\mathrm{m})}, \tag{3.82}$$

表明等效静磁标势 $\phi^{(\mathrm{m})}$ 在界面两侧沿界面的变化相同.由(3.75)定义的静磁标势可随意加、减一常数,(3.82)便表示恒可取静磁标势 $\phi^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})$ 在界面上处处连续.用 $\phi_i^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})$ 表示第 i 介质中的静磁标势,在1、2两介质交界处

$$\phi_1^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = \phi_2^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}). \tag{3.83}$$

将(3.76)两边在此界面如图2-2所示的扁盒中体积分.用高斯定理将左边化为 $\nabla\phi^{(\mathrm{m})}$ 在盒表面的面积分.在盒高 δ 和盒底面积 Δs 先后趋于零的条件下得界面的另一边条件

$$\frac{\partial \phi_1^{(\mathrm{m})}}{\partial n} - \frac{\partial \phi_2^{(\mathrm{m})}}{\partial n} = \frac{\sigma^{(\mathrm{m})}}{\mu_0}, \tag{3.84}$$

其中 $\dfrac{\partial}{\partial n}$ 为界面上沿由介质1指向介质2的法向 $\boldsymbol{n}$ 的梯度,

$$\sigma^{(\mathrm{m})} \equiv \frac{\mathrm{d}Q^{(\mathrm{m})}}{\mathrm{d}s} \equiv \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta Q^{(\mathrm{m})}}{\Delta s} \tag{3.85}$$

为界面上该点的等效磁荷面密度.用(3.80)可将边条件(3.84)表为

$$\frac{\partial \phi_1^{(\mathrm{m})}}{\partial n} - \frac{\partial \phi_2^{(\mathrm{m})}}{\partial n} = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M}_2). \tag{3.86}$$

这就是用等效磁荷与静磁标势表达的静磁学.它的基本方程(3.76)和边条件(3.83)、(3.84)与静电学的基本方程(2.3)和边条件(2.5)、(2.6)分别完全相似,一一对应.求解静电问题的方法可借用来解对应的静磁问题.只是静磁学中没有磁导体,且由于恒采用真空电动力学,与介电常数对应的磁导率在所有区域中同为真空磁导率 μ_0.这使边条件(3.84)比(2.6)简单.不同介质区域在这里由有效磁荷面密度非零的界面隔开.

例如§2.2的多极展开方法就可完全移用于静磁学.任何几何面的体积为零,面密度非零则体密度为无穷.在实际中这自然只是密度很大情形的理想化表达.面密度非零的界面乃是密度很大的薄层的理想化.按此观点可以认为等效磁荷分布由一密度分布函数 $\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})$ 表示,它很大的薄层自动表达了界面.由于磁导率在整个空间为常数 μ_0,加在泊松方程(3.76)上的只有无穷远处的边条件,要求磁场强度在无穷远处趋于零.按(3.75)静磁标势在无穷远处应趋于常数,且可将此常数置零.用符合此边条件的格林函数(2.28)得方程(3.76)的解

$$\phi^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0}\int \frac{\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}', \tag{3.87}$$

积分遍及等效磁荷非零的区域.再用展开式(2.32)和关系(2.33)、(2.34),以及定义

$$\rho_{lm}^{(\mathrm{m})}(r') = \int Y_{lm}^{*}(\theta'\varphi')\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\Omega', \tag{3.88}$$

其中积分限为 4π 立体角,得

$$\begin{aligned}\phi^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = &\frac{1}{\mu_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}\left[\frac{1}{r^{l+1}}\int_0^r \rho_{lm}^{(\mathrm{m})}(r')r'^{l+2}\mathrm{d}r'\right.\\ &\left.+ r^l\int_r^{\infty}\rho_{lm}^{(\mathrm{m})}(r')r'^{1-l}\mathrm{d}r'\right]Y_{lm}(\theta\varphi).\end{aligned} \tag{3.89}$$

设等效磁荷分布于一有限区域.在此区域内取坐标原点,必存在足够大的数 R, $r>R$处$\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})=0$.符合此条件的 R 的最小值称等效磁荷分布半径.就以 R 表此半径. $r>R$ 处(3.89)成为

$$\phi^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{4\pi\mu_0 r^{l+1}}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\sum_{m=-l}^{l}\mathscr{P}_{lm}^{(\mathrm{m})*}Y_{lm}(\theta\varphi), \tag{3.90}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{lm}^{(\mathrm{m})*} &\equiv \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int_0^R \rho_{lm}^{(\mathrm{m})}(r)r^{l+2}\mathrm{d}r\\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int r^l Y_{lm}^{*}(\theta\varphi)\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V},\end{aligned} \tag{3.91}$$

右边的体积分遍及等效磁荷分布区域.也可将坐标原点取在等效磁荷分布区域之外.必存在足够小的数 R', $r<R'$处 $\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})=0$. R'的最大值称无源区半径.就用 R'表此半径. $r<R'$处(3.89)成为

$$\phi^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{4\pi\mu_0}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\sum_{m=-l}^{l}Q_{lm}^{(\mathrm{m})*}Y_{lm}(\theta\varphi), \tag{3.92}$$

其中

$$\begin{aligned}Q_{lm}^{(\mathrm{m})*} &\equiv \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int_{R'}^{\infty}\rho_{lm}^{(\mathrm{m})}(r)r^{1-l}\mathrm{d}r\\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int r^{-l-1}Y_{lm}^{*}(\theta\varphi)\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V},\end{aligned} \tag{3.93}$$

右边的体积分遍及等效磁荷分布的区域.(3.89)为静磁标势的多极展开,(3.90)和(3.92)为其两种具体情形.对一定的 l, $\mathscr{P}_{lm}^{(\mathrm{m})}$, $m=-l,-l+1,\cdots,l-1,l$,共$2l+1$个量组成等效磁 2^l 极矩.与电多极矩的惟一不同处是由于总等效磁荷为零,等效磁单极矩

$$\mathscr{P}_{00}^{(\mathrm{m})} = \int \rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} = Q^{(\mathrm{m})} = 0. \tag{3.94}$$

用球谐函数的笛卡儿坐标表示式(2.43)得等效磁偶极矩

$$
\left.\begin{aligned}
\mathscr{P}_{10}^{(\mathrm{m})} &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int r\mathrm{Y}_{10}(\theta\varphi)\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} \\
&= \int z\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} \equiv \mathscr{P}_z^{(\mathrm{m})}, \\
\mathscr{P}_{1\,\pm1}^{(\mathrm{m})} &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int r\mathrm{Y}_{1\,\pm1}(\theta\varphi)\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} \\
&= \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\int(x \pm \mathrm{i}y)\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} \\
&\equiv \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathscr{P}_x^{(\mathrm{m})} \pm \mathrm{i}\mathscr{P}_y^{(\mathrm{m})}),
\end{aligned}\right\} \tag{3.95}
$$

其中 $\mathscr{P}_x^{(\mathrm{m})}$、$\mathscr{P}_y^{(\mathrm{m})}$ 和 $\mathscr{P}_z^{(\mathrm{m})}$ 为矢量

$$
\boldsymbol{\mathscr{P}}^{(\mathrm{m})} \equiv \int \boldsymbol{r}\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} \tag{3.96}
$$

的 x、y 和 z 分量.用等效磁荷密度的定义(3.74)可将此式化为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathscr{P}}^{(\mathrm{m})} &= -\mu_0\int \boldsymbol{r}(\nabla\cdot\boldsymbol{M})\mathrm{d}\mathscr{V} = -\mu_0\int(\boldsymbol{r}\,\nabla)\cdot\boldsymbol{M}\mathrm{d}\mathscr{V} \\
&= \mu_0\int\boldsymbol{M}\cdot(\nabla\,\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} = \mu_0\int\boldsymbol{M}\mathrm{d}\mathscr{V} = \mu_0\,\boldsymbol{\mathscr{M}}.
\end{aligned} \tag{3.97}
$$

在第三等号处作了部分积分.由于体积分区域包括了磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 非零的全部空间,它的表面上 $\boldsymbol{M}=0$,这使积得的面积分为零.第四等号处用到

$$
\nabla\,\boldsymbol{r} \equiv \begin{pmatrix}
\frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \\
\frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \\
\frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{z}_0\boldsymbol{z}_0 \tag{3.98}
$$

为幺张量,其中 $\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$ 和 $\boldsymbol{z}_0$ 分别为 x、y 和 z 方向的单位矢量.第五等号处则用到磁化强度的定义(3.62).(3.97)表明矢量$\boldsymbol{\mathscr{P}}^{(\mathrm{m})}$与磁偶极矩矢量$\boldsymbol{\mathscr{M}}$只差一常因子,称为等效磁偶极矩矢量.类似地,用(2.44)可得等效磁四极矩

$$
\left.\begin{aligned}
\mathscr{P}_{2\,0}^{(\mathrm{m})} &= \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\int r^2\mathrm{Y}_{2\,0}(\theta\varphi)\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} = \int\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}r^2\right)\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} \\
&= 3Q_{zz}^{(\mathrm{m})} - \mathrm{tr}\boldsymbol{Q}^{(\mathrm{m})}, \\
\mathscr{P}_{2\,\pm1}^{(\mathrm{m})} &= \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\int r^2\mathrm{Y}_{2\,\pm1}(\theta\varphi)\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} = \mp\sqrt{\frac{3}{2}}\int z(x \pm \mathrm{i}y)\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} \\
&= \mp\sqrt{6}(Q_{zx}^{(\mathrm{m})} \pm \mathrm{i}Q_{zy}^{(\mathrm{m})}), \\
\mathscr{P}_{2\,\pm2}^{(\mathrm{m})} &= \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\int r^2\mathrm{Y}_{2\,\pm2}(\theta\varphi)\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} = \sqrt{\frac{3}{8}}\int(x \pm \mathrm{i}y)^2\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}}(Q_{xx}^{(\mathrm{m})} - Q_{yy}^{(\mathrm{m})} \pm 2\mathrm{i}Q_{xy}^{(\mathrm{m})}).
\end{aligned}\right\} \tag{3.99}
$$

其中 $Q_{xx}^{(\mathrm{m})}$、$Q_{yy}^{(\mathrm{m})}$、$Q_{zz}^{(\mathrm{m})}$、$Q_{xy}^{(\mathrm{m})}$、$Q_{yz}^{(\mathrm{m})}$和$Q_{zx}^{(\mathrm{m})}$为三维二阶对称张量

$$\boldsymbol{Q}^{(\mathrm{m})} \equiv \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} \tag{3.100}$$

的诸分量.这个张量称为等效磁四极矩张量.按(3.96)可将磁偶极子设想为无穷靠近的两个相反等效点磁荷 $\pm q^{(\mathrm{m})}$组成,等效磁偶极矩为

$$\mathscr{P}^{(\mathrm{m})} = q^{(\mathrm{m})}\boldsymbol{l}, \tag{3.101}$$

$\boldsymbol{l}$ 由等效点磁荷 $-q^{(\mathrm{m})}$ 指向 $q^{(\mathrm{m})}$.令 $\boldsymbol{l}$ 的长度趋于零,等效磁荷 $q^{(\mathrm{m})}$的值趋于无穷,保持$\mathscr{P}^{(\mathrm{m})}$不变即得磁偶极子.同样,两个相反磁偶极子 $\pm\mathscr{P}^{(\mathrm{m})}$可组成磁四极子.按(3.100)可算得此四极子的等效磁四极矩张量

$$\boldsymbol{Q}^{(\mathrm{m})} = \frac{1}{2}(\mathscr{P}^{(\mathrm{m})}\boldsymbol{l}' + \boldsymbol{l}'\mathscr{P}^{(\mathrm{m})}), \tag{3.102}$$

$\boldsymbol{l}'$为由 $-\mathscr{P}^{\mathrm{m}}$ 指向$\mathscr{P}^{(\mathrm{m})}$的矢量.令 $\boldsymbol{l}'$的长度趋于零,等效磁偶极矩$\mathscr{P}^{(\mathrm{m})}$的值趋于无穷,保持 $\boldsymbol{Q}^{(\mathrm{m})}$不变即得磁四极子.比较此式与(3.43),由(3.97)知等效磁四极矩 $\boldsymbol{Q}^{(\mathrm{m})}$与原先定义的磁四极矩 $\boldsymbol{Q}^{(\mu)}$间也有正比关系

$$\boldsymbol{Q}^{(\mathrm{m})} = \mu_0\boldsymbol{Q}^{(\mu)}, \tag{3.103}$$

二者间也只差一因子 μ_0.

将多极展开(3.90)表为

$$\left.\begin{aligned}
\phi^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty}\phi_l^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}),\\
\phi_l^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) &= \sum_{m=-l}^{l}\mathscr{P}_{lm}^{(\mathrm{m})*}\phi_{lm}^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}),\\
\phi_{lm}^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\mu_0 r^{l+1}}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi).
\end{aligned}\right\} \tag{3.104}$$

由(3.94)知 $\phi_0^{(\mathrm{m})}=0$,即不存在磁单极场.由(2.43)和(3.95)得等效偶极静磁标势

$$\phi_1^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathscr{P}^{(\mathrm{m})}\cdot\boldsymbol{r}_0}{4\pi\mu_0 r^2}. \tag{3.105}$$

由(2.44)和(3.99)得等效四极静磁标势

$$\phi_2^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = \frac{3\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{Q}^{(\mathrm{m})}\cdot\boldsymbol{r}_0 - \mathrm{tr}\boldsymbol{Q}^{(\mathrm{m})}}{4\pi\mu_0 r^3}. \tag{3.106}$$

静磁标势的多极展开的负梯度给出静磁场强度的多极展开

$$\left.\begin{aligned}
\mathscr{H}(\boldsymbol{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty}\mathscr{H}_l(\boldsymbol{r}),\\
\mathscr{H}_l(\boldsymbol{r}) &= \sum_{m=-l}^{l}\mathscr{P}_{lm}^{(\mathrm{m})*}\mathscr{H}_{lm}(\boldsymbol{r}),\\
\mathscr{H}_{lm}(\boldsymbol{r}) &= -\nabla\phi_{lm}^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi(2l+1)}\mu_0}\nabla\left[\frac{1}{r^{l+1}}\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi)\right],
\end{aligned}\right\} \tag{3.107}$$

$\mathscr{H}_l(\boldsymbol{r})$称为静磁 2^l 极场. 自然有$\mathscr{H}_0(\boldsymbol{r})=0$. 将(3.105)和(3.106)代入,分别得静磁偶极场

$$\mathscr{H}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{3(\mathscr{P}^{(\mathrm{m})}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}_0-\mathscr{P}^{(\mathrm{m})}}{4\pi\mu_0 r^3} = \frac{3(\mathscr{M}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}_0-\mathscr{M}}{4\pi r^3} \tag{3.108}$$

和静磁四极场

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_2(\boldsymbol{r}) &= \frac{(15\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{Q}^{(\mathrm{m})}\cdot\boldsymbol{r}_0-3\mathrm{tr}\boldsymbol{Q}^{(\mathrm{m})})\boldsymbol{r}_0-6\boldsymbol{Q}^{(\mathrm{m})}\cdot\boldsymbol{r}_0}{4\pi\mu_0 r^4}\\ &= \frac{(15\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{Q}^{(\mu)}\cdot\boldsymbol{r}_0-3\mathrm{tr}\boldsymbol{Q}^{(\mu)})\boldsymbol{r}_0-6\boldsymbol{Q}^{(\mu)}\cdot\boldsymbol{r}_0}{4\pi r^4}.\end{aligned} \tag{3.109}$$

将此二式分别与(3.34)和(3.42)比较,注意那里有关系$\mathscr{B}=\mu\mathscr{H}$,可见两种方法得到的结果是一致的.

采用等效磁荷方法使静磁学与静电学有完全的对应关系. 等效磁荷 $q^{(\mathrm{m})}$对应电荷 q;各级等效磁多极矩 $\mathscr{P}_{lm}^{(\mathrm{m})}$对应各级电多极矩 $\mathscr{P}_{lm}$;磁场强度$\mathscr{H}$对应电场强度$\mathscr{E}$;各级磁多极场 $\phi_l^{(\mathrm{m})}$、$\mathscr{H}_l$对应各级电多极场 ϕ_l、$\mathscr{E}_l$;真空磁导率 μ_0 对应介电常数 ϵ. 这最后一点是由于等效磁荷方法恒用真空电动力学讨论静磁学,磁导率便恒用真空磁导率. 在这一对应下静磁学和静电学的场方程和边条件有完全相同的形式,它们的结论便可相互借用,只要用相对应的量彼此替代即可. 这大大节省了工作. 前面看到的是场与源(荷分布)关系的对应. 下面将看到这种对应也存在于场与荷的作用之中.

外磁场在产生它的电流分布区域外有真空中的关系

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0\mathscr{H}(\boldsymbol{r}).$$

被它作用的电流分布可用磁偶极矩分布表达. 它与其中的磁偶极矩元 $\mathrm{d}\mathscr{M}$ 的作用势按(3.54)为

$$\mathrm{d}V = -\mathscr{B}\cdot\mathrm{d}\mathscr{M} = -\mu_0\mathscr{H}\cdot\mathrm{d}\mathscr{M}.$$

它与整个电流分布的作用势即与各磁偶极矩元作用势的和

$$\begin{aligned}V &= -\mu_0\int_{\mathscr{V}}\mathscr{H}\cdot\mathrm{d}\mathscr{M} = -\mu_0\int_{\mathscr{V}}\mathscr{H}\cdot\boldsymbol{M}\mathrm{d}\mathscr{V}\\ &= \mu_0\int_{\mathscr{V}}\boldsymbol{M}\cdot\nabla\phi^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}\mathscr{V} = -\mu_0\int_{\mathscr{V}}(\nabla\cdot\boldsymbol{M})\phi^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}\mathscr{V}\\ &= \int_{\mathscr{V}}\phi^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V},\end{aligned} \tag{3.110}$$

积分区域$\mathscr{V}$为被作用的电流分布所占体积. 在第四等号处作了部分积分;由于$\mathscr{V}$包含了被作用的电流分布,它的表面上磁化强度 $\boldsymbol{M}=0$,积得的表面积分为零. 此式与外电场对电荷分布的作用势在上述对应下完全相似. 由经典力学知,势函数相同,作用在对应自由度的广义力就相同,外场对荷的作用便有相同的形式.

至此已可说在等效磁荷形式中静磁学与静电学的相似,除无磁单极外磁与电

的对应是完全的.如果将自由电流分布也用磁偶极子分布表达,更可将整个静磁学纳入等效磁荷形式,静磁学与静电学的相似,磁与电的对应还是全面的.此外本节未作任何近似,连$\mathscr{B}$与$\mathscr{H}$的线性关系(1.24)也不假设.磁场强度$\mathscr{H}$由(3.66)定义.可见这种相似和对应还是严格的.

历史上人们从自然磁石开始研究磁学.最初就采用了磁荷观点和电磁对比的方法,将磁场强度$\mathscr{H}$作为基本量与电场强度$\mathscr{E}$对应.磁感应强度$\mathscr{B}$是后来引进的.只是在认识电流是磁性的起源和不存在单极磁荷后才知道应以$\mathscr{B}$为基本量.由于已成习惯,仍称$\mathscr{H}$为磁场强度而称$\mathscr{B}$为磁感应强度.现在我们看到这方面研究的成果仍然严格成立,可完全继承下来.

§3.6 圆环电流的磁场

在实际中时常要知道圆柱线圈中电流产生的磁场分布.为此只需先算出圆环电流的磁场,再沿线圈轴向积分,即可算得线圈电流产生的磁场.电磁场方程的线性导致了这种计算的简化.计算圆环电流的磁场便具有了基本重要性.

此问题有轴对称,对称轴过圆心垂直于圆环平面.以此轴为 z 轴建立柱坐标(ρ,θ,z)(图 3-3),它与笛卡儿坐标(x,y,z)的关系为

$$x=\rho\cos\theta,\qquad y=\rho\sin\theta,\qquad z=z \tag{3.111}$$

和

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\qquad \theta=\arctan\frac{y}{x},\qquad z=z. \tag{3.112}$$

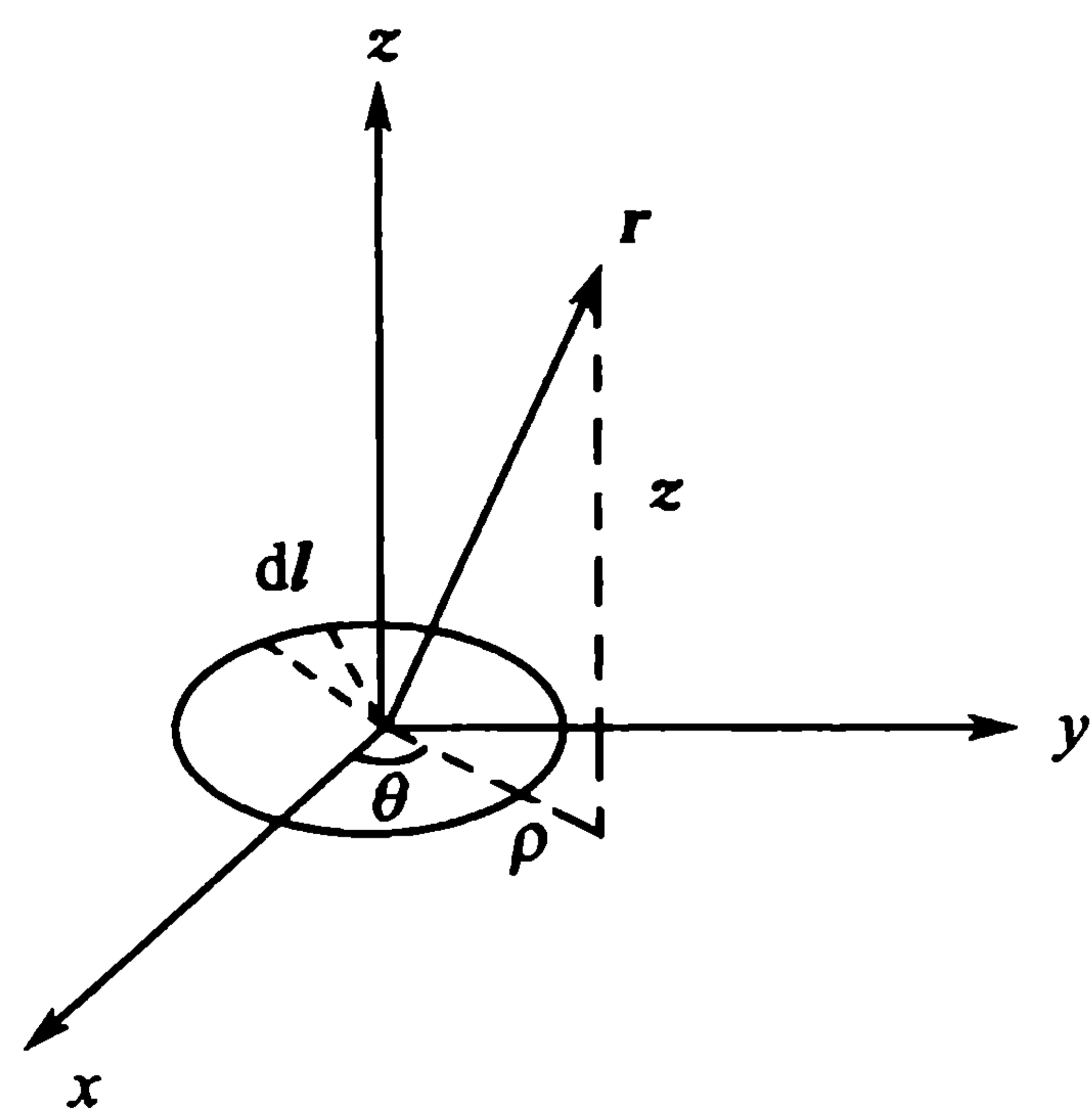


图 3-3 圆环电流的磁场与柱坐标

在任一点(ρ,θ,z)以单位矢量

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_0&=\cos\theta\boldsymbol{x}_0+\sin\theta\boldsymbol{y}_0,\\ \boldsymbol{\theta}_0&=-\sin\theta\boldsymbol{x}_0+\cos\theta\boldsymbol{y}_0,\\ \boldsymbol{z}_0&=\boldsymbol{z}_0\end{aligned}\right\} \tag{3.113}$$

建立正交坐标系,其中 $\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$ 和 $\boldsymbol{z}_0$ 分别为 x、y 和 z 方向的单位矢量. $\boldsymbol{\rho}_0$、$\boldsymbol{\theta}_0$ 和 $\boldsymbol{z}_0$ 分别在该点指向 ρ、θ 和 z 增加的方向.任何矢量可用这组正交单位矢量系展开.例如矢势

$$\boldsymbol{A}(\rho,\theta,z)=A_\rho(\rho,\theta,z)\boldsymbol{\rho}_0+A_\theta(\rho,\theta,z)\boldsymbol{\theta}_0+A_z(\rho,\theta,z)\boldsymbol{z}_0. \tag{3.114}$$

将圆环当作几何圆周,由(3.22)得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu I}{4\pi}\oint\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \tag{3.115}$$

其中 I 为环内的电流强度,$\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$为圆周上的线段微分,并指电流方向.设圆周半径为 a,取它所在平面为 $z=0$ 平面,圆周上 $\boldsymbol{r}'$点的柱坐标遂为$(a,\theta',0)$,该处的线段微分

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}' = a\mathrm{d}\theta'\boldsymbol{\theta}'_0, \tag{3.116}$$

$\boldsymbol{\theta}'_0$ 为 $\boldsymbol{r}'$处 θ 方向的单位矢量.将 $\boldsymbol{r}$ 的柱坐标记为(ρ,θ,z),(3.115)成为

$$\boldsymbol{A}(\rho,\theta,z) = \frac{\mu I a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{\theta}'_0\mathrm{d}\theta'}{\sqrt{a^2+\rho^2+z^2-2a\rho\cos(\theta'-\theta)}}. \tag{3.117}$$

作变换

$$\varphi = \theta' - \theta, \tag{3.118}$$

由简单的几何考虑知

$$\boldsymbol{\theta}'_0 = \cos\varphi\boldsymbol{\theta}_0 - \sin\varphi\boldsymbol{\rho}_0. \tag{3.119}$$

将此式代入(3.117)再将结果与(3.114)比较得

$$A_\rho(\rho,\theta,z) = -\frac{\mu I a}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{a^2+\rho^2+z^2-2a\rho\cos\varphi}},$$

$$A_\theta(\rho,\theta,z) = \frac{\mu I a}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{a^2+\rho^2+z^2-2a\rho\cos\varphi}},$$

$$A_z(\rho,\theta,z) = 0.$$

其中第一式右边被积函数为 φ 的奇函数,积分为零,$A_\rho = A_z = 0$.第二式右边被积函数为偶函数,矢势的柱坐标表示(3.114)中惟一的非零分量为

$$A_\theta(\rho,\theta,z) = \frac{\mu I a}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{a^2+\rho^2+z^2-2a\rho\cos\varphi}}. \tag{3.120}$$

再作变换

$$\alpha = \frac{\varphi-\pi}{2}, \qquad \varphi = 2\alpha+\pi,$$

$$\cos\varphi = -\cos(2\alpha) = 2\sin^2\alpha - 1,$$

$$\mathrm{d}\varphi = 2\mathrm{d}\alpha.$$

代入(3.120)得

$$A_\theta(\rho,\theta,z) = \frac{\mu I a}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{2\sin^2\alpha-1}{\sqrt{(a+\rho)^2+z^2-4a\rho\sin^2\alpha}}\mathrm{d}\alpha$$

$$= \frac{\mu I a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2\alpha-1}{\sqrt{(a+\rho)^2+z^2-4a\rho\sin^2\alpha}}\mathrm{d}\alpha,$$

第二等号由于被积函数为积分变量 α 的偶函数.定义

$$k = \sqrt{\frac{4a\rho}{(a+\rho)^2+z^2}}, \tag{3.121}$$

上式成为

$$A_\theta(\rho,\theta,z) = \frac{\mu I k}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{\rho}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2\alpha-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}\mathrm{d}\alpha$$

$$= \frac{\mu I}{k\pi}\sqrt{\frac{a}{\rho}}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)K(k) - E(k)\right], \tag{3.122}$$

其中

$$K(k)\equiv\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}\tag{3.123}$$

和

$$E(k)\equiv\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha\tag{3.124}$$

分别为第一和第二类完全椭圆积分.显然

$$k\leqslant\frac{2\sqrt{a\rho}}{a+\rho}\leqslant 1,\tag{3.125}$$

其中第一个等号只在 $z=0$ 处,即圆周所在平面上成立,第二个等号则只在 $\rho=a$ 处成立.因此在圆周以外任何点上有 $k<1$.在这些点上可将椭圆积分(3.123)和(3.124)的被积函数作二项式展开再逐项积分得

$$\begin{aligned}K(k)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\alpha\right]\mathrm{d}\alpha\\&=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2k^{2n}\right\}\\&=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\cdots\right],\end{aligned}\tag{3.126}$$

$$\begin{aligned}E(k)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{k^{2n}}{2n-1}\sin^{2n}\alpha\right]\mathrm{d}\alpha\\&=\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}\\&=\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{k^4}{3}-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{k^6}{5}-\cdots\right].\end{aligned}\tag{3.127}$$

按实际需要在此二式中取到 k^2 的足够高次幂便可保证由(3.122)算出的矢势的足够高精度.

为求磁感应强度最好有一个在柱坐标系中求矢量场旋度的公式.现在来推导这个公式,所用方法是普遍的,可用来推导任何曲线坐标系的旋度公式.它的依据是斯托克斯定理.按此定理,矢量场在一点的旋度沿某方向的分量与垂直此方向的微分面元面积的乘积等于矢量场沿此面元周线的线积分.如图 3-4,(ρ,θ,z)处垂直于 $\boldsymbol{\rho}_0$ 的面元为由(ρ,θ,z),$(\rho,\theta+\mathrm{d}\theta,z)$,$(\rho,\theta+\mathrm{d}\theta,z+\mathrm{d}z)$和$(\rho,\theta,z+\mathrm{d}z)$四点联成的四边形,无穷小面积为 $\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.矢量场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$沿它的周线的线积分为

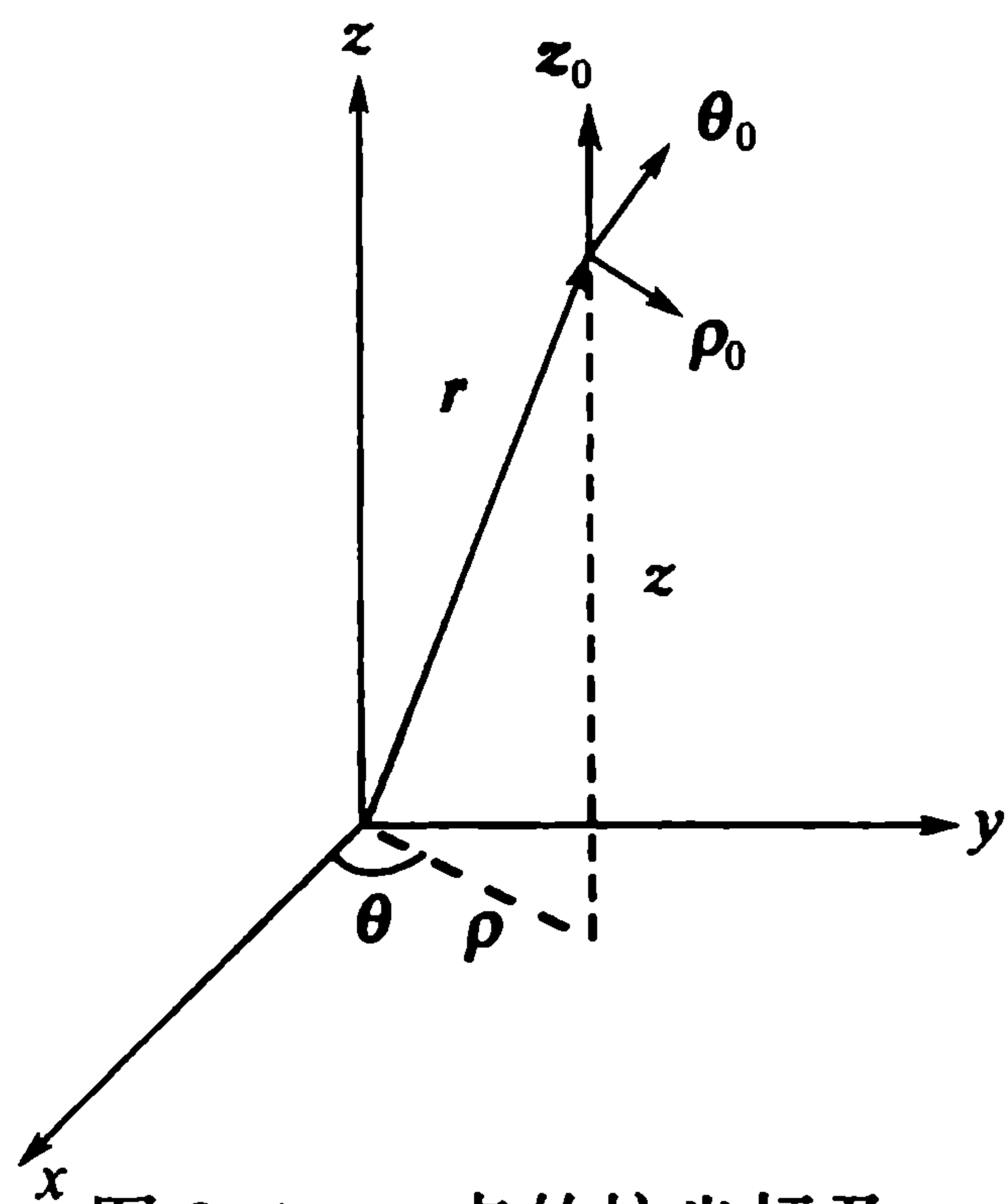


图 3-4 一点的柱坐标及其上的柱坐标架

$$A_\theta(\rho,\theta,z)\rho\mathrm{d}\theta + A_z(\rho,\theta+\mathrm{d}\theta,z)\mathrm{d}z - A_\theta(\rho,\theta,z+\mathrm{d}z)\rho\mathrm{d}\theta - A_z(\rho,\theta,z)\mathrm{d}z$$
$$= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

可见

$$(\nabla\times\mathbf{A})_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}. \tag{3.128}$$

垂直 $\boldsymbol{\theta}_0$ 的面元可由(ρ,θ,z),$(\rho,\theta,z+\mathrm{d}z)$,$(\rho+\mathrm{d}\rho,\theta,z+\mathrm{d}z)$和$(\rho+\mathrm{d}\rho,\theta,z)$四点联线围成,面积为 $\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho$. 矢量 $\mathbf{A}(\boldsymbol{r})$沿此联线的线积分为

$$A_z(\rho,\theta,z)\mathrm{d}z + A_\rho(\rho,\theta,z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}\rho - A_z(\rho+\mathrm{d}\rho,\theta,z)\mathrm{d}z - A_\rho(\rho,\theta,z)\mathrm{d}\rho$$
$$= \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho.$$

可见

$$(\nabla\times\mathbf{A})_\theta = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}. \tag{3.129}$$

垂直 $\boldsymbol{z}_0$ 的面元可由(ρ,θ,z),$(\rho+\mathrm{d}\rho,\theta,z)$,$(\rho+\mathrm{d}\rho,\theta+\mathrm{d}\theta,z)$和$(\rho,\theta+\mathrm{d}\theta,z)$四点联线围成,面积为 $\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$. 矢量 $\mathbf{A}(\boldsymbol{r})$沿此联线的线积分为

$$A_\rho(\rho,\theta,z)\mathrm{d}\rho + A_\theta(\rho+\mathrm{d}\rho,\theta,z)(\rho+\mathrm{d}\rho)\mathrm{d}\theta - A_\rho(\rho,\theta+\mathrm{d}\theta,z)\mathrm{d}\rho - A_\theta(\rho,\theta,z)\rho\mathrm{d}\theta$$
$$= \left(\frac{\partial\rho A_\theta}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta.$$

可见

$$(\nabla\times\mathbf{A})_z = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho A_\theta}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\right). \tag{3.130}$$

将(3.128)~(3.130)合成一矢量式便是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathscr{B}} &= \nabla\times\mathbf{A}\\ &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{\rho}_0 + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{\theta}_0 + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho A_\theta}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{z}_0.\end{aligned} \tag{3.131}$$

由于 $A_\rho = A_z = 0, \mathscr{B}_\theta = 0$,

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\mathscr{B}} = \mathscr{B}_\rho\boldsymbol{\rho}_0 + \mathscr{B}_z\boldsymbol{z}_0,\\ &\mathscr{B}_\rho = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z},\quad \mathscr{B}_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho A_\theta}{\partial\rho} = \frac{\partial A_\theta}{\partial\rho} + \frac{A_\theta}{\rho}.\end{aligned}\right\} \tag{3.132}$$

为计算此式中的微商先算椭圆积分的微商.

$$\frac{\partial K}{\partial k} = k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\alpha}{(1-k^2\sin^2\alpha)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha.$$

用不定积分关系

$$\int\frac{\sin^2\alpha}{(1-k^2\sin^2\alpha)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{(1-k^2)k^2}\int\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$$

$$-\frac{1}{k^2}\int\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}-\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{(1-k^2)\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}},$$

它可由右边对 α 的微商直接验证.代入积分限 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 即可算得上式右边的定积分,从而得

$$\frac{\partial K}{\partial k}=\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{K(k)}{k}. \tag{3.133}$$

再由直接计算得

$$\frac{\partial E}{\partial k}=-k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}\mathrm{d}\alpha=\frac{E(k)-K(k)}{k}, \tag{3.134}$$

$$\frac{\partial k}{\partial z}=-\frac{zk^3}{4a\rho},\qquad \frac{\partial k}{\partial \rho}=\frac{k}{2\rho}\frac{a^2+z^2-\rho^2}{(a+\rho)^2+z^2}. \tag{3.135}$$

利用这些关系便可算出磁感应强度的非零分量

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{B}_\rho&=\frac{\mu I}{2\pi}\frac{z}{\rho\sqrt{(a+\rho)^2+z^2}}\left[\frac{a^2+\rho^2+z^2}{(a-\rho)^2+z^2}E(k)-K(k)\right],\\ \mathscr{B}_z&=\frac{\mu I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(a+\rho)^2+z^2}}\left[\frac{a^2-\rho^2-z^2}{(a-\rho)^2+z^2}E(k)+K(k)\right].\end{aligned}\right\} \tag{3.136}$$

在 $\rho\to0$ 时,$\mathscr{B}_\rho$ 含因子$\frac{1}{\rho}$,好像会趋于无穷.其实不然,由于其后的方括号以更快速度趋于零,$\mathscr{B}_\rho$ 的这一极限是零.从矢势的极限能更容易地看清这一点.将展开式(3.126)和(3.127)代入(3.122)得

$$A_\theta(\rho,\theta,z)=\frac{\mu I}{32}\sqrt{\frac{a}{\rho}}k^3\left(1+\frac{3}{4}k^2+\cdots\right). \tag{3.137}$$

由 k 的表达式(3.121)知 $\rho=0$ 处 $A_\theta=0$.按(3.132)知 $\rho=0$ 处 $\mathscr{B}_\rho=0$,磁感应强度沿轴向.在(3.136)第二式中直接取 $\rho=0$,得对称轴上$\boldsymbol{\mathscr{B}}=\mathscr{B}_z\boldsymbol{z}_0$,

$$\mathscr{B}_z=\frac{\mu I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}. \tag{3.138}$$

§3.7 均匀磁化球的磁场

作为用等效磁荷观点处理静磁问题的例子,考虑一磁化强度为常矢量 $\boldsymbol{M}$ 的均匀磁化永久磁体球.以磁化强度矢量方向为极轴,称为 z 轴,$\boldsymbol{M}=M\boldsymbol{z}_0$,以磁体球心为原点建立球坐标系(图 3-5).既然在球内 $\boldsymbol{M}$ 与位置无关,按(3.74)球内等效磁荷密度 $\rho^{(\mathrm{m})}=0$.球外 $\boldsymbol{M}=0$,等效磁荷密度自然也是零.只有球表面可以分布磁荷,按(3.81)等效磁荷面密度为

$$\sigma^{(\mathrm{m})}=\mu_0M\cos\theta. \tag{3.139}$$

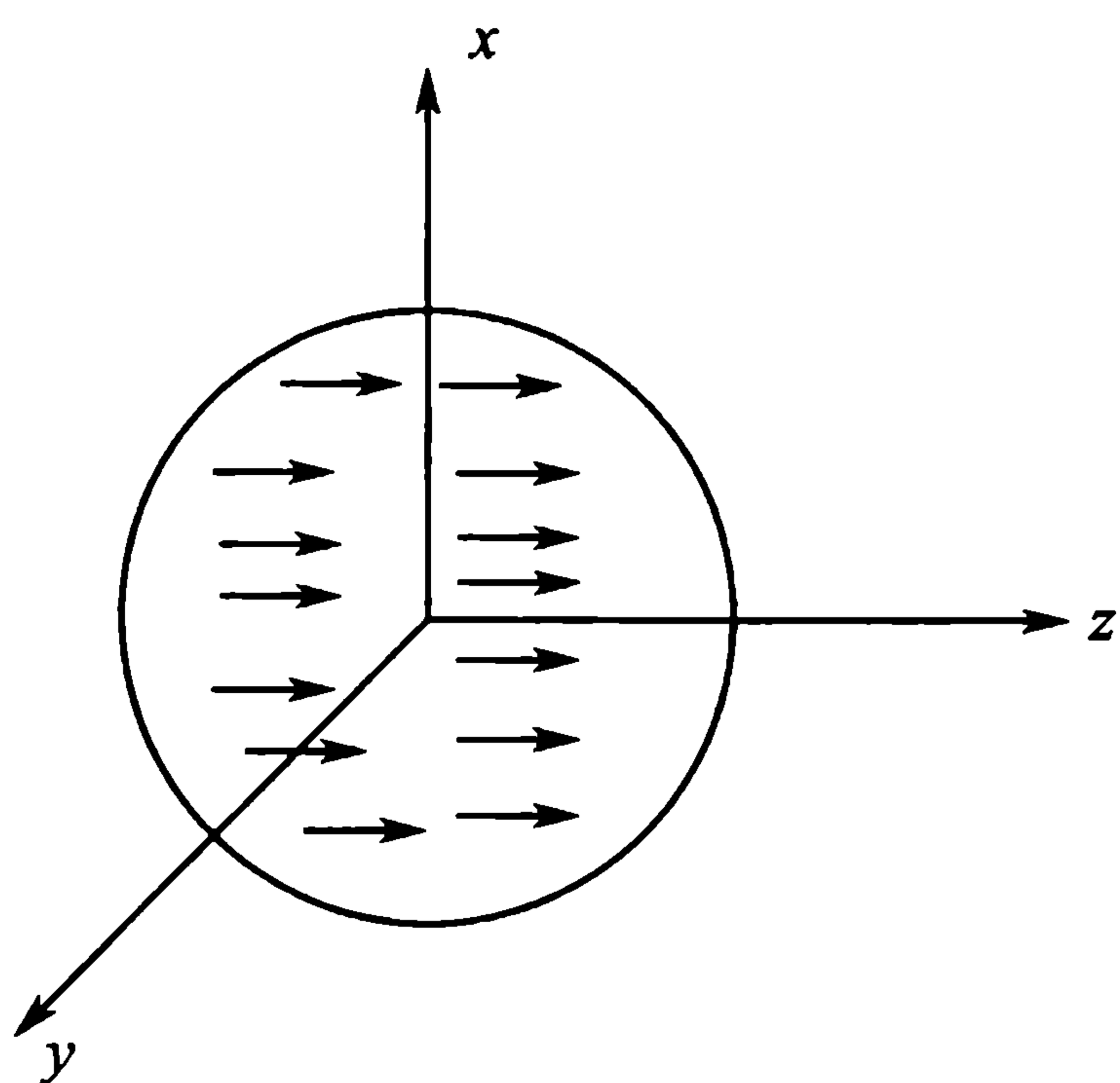


图 3-5　均匀磁化球

θ 为面元外向法矢与 $\boldsymbol{M}$ 的夹角，即其极角. 在球外一点 $\boldsymbol{r}$ 采用静磁标势的多极展开式(3.90). 在用(3.91)计算等效磁多极矩时要将一点附近小区域内的等效磁荷

$$\mathrm{d}q^{(\mathrm{m})} \equiv \rho^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}$$

改为只在球面取值的

$$\mathrm{d}q^{(\mathrm{m})} = \sigma^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}s.$$

这相当于在角分布不变的条件下取磁荷集中于球面的极限. 用 a 表示磁球半径，按(3.91)

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{lm}^{(\mathrm{m})*} &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int a^l \mathrm{Y}_{lm}^*(\theta\varphi)\mu_0 M\cos\theta a^2 \mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{3(2l+1)}} a^{l+2}\mu_0 M\int \mathrm{Y}_{lm}^*(\theta\varphi)\mathrm{Y}_{10}(\theta\varphi)\mathrm{d}\Omega \\ &= \begin{cases}\dfrac{4\pi}{3}a^3\mu_0 M, & \text{若 } l=1 \text{ 且 } m=0, \\ 0, & \text{否则},\end{cases}\end{aligned} \tag{3.140}$$

其中 $\int \mathrm{d}\Omega$ 为 4π 立体角积分，末一等号处用了球谐函数的正交归一性. 代回(3.90)得球外静磁标势

$$\phi^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = \frac{Ma^3}{3r^2}\cos\theta = \frac{\mathscr{M}\cdot \boldsymbol{r}_0}{4\pi r^2}, \tag{3.141}$$

其中

$$\mathscr{M} \equiv \frac{4\pi}{3}a^3\boldsymbol{M} \tag{3.142}$$

为球的磁偶极矩. 与(3.105)比较并注意(3.97)知(3.141)为磁偶极子 $\mathscr{M}$ 的静磁标势. 由此可得球外磁场强度

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = \frac{3(\mathscr{M}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}_0 - \mathscr{M}}{4\pi r^3}. \tag{3.143}$$

球外磁化强度 $\boldsymbol{M}=0$，按(3.66)

$$\mathscr{B} = \mu_0\mathscr{H} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\mathscr{M}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}_0 - \mathscr{M}}{r^3}. \tag{3.144}$$

磁球内 $\boldsymbol{r}$ 点处应用静磁标势的多极展开(3.92). 在(3.93)中用 $\sigma^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}s$ 代替 $\rho^{(\mathrm{m})}\mathrm{d}\mathscr{V}$，得

$$\begin{aligned}Q_{lm}^{(\mathrm{m})*} &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int a^{-l-1}\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta\varphi)\mu_0 M\cos\theta a^2\mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{3(2l+1)}}\frac{\mu_0 M}{a^{l-1}}\int \mathrm{Y}_{lm}^*(\theta\varphi)\mathrm{Y}_{10}(\theta\varphi)\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

$$
=\begin{cases}\frac{4\pi}{3}\mu_0 M, & \text{若 } l=1 \text{ 且 } m=0, \\ 0, & \text{否则}.\end{cases} \tag{3.145}
$$

代回(3.92)得磁球内静磁标势

$$
\phi^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = \frac{M}{3} r\cos\theta = \frac{M}{3} z. \tag{3.146}
$$

磁球内磁场强度就是

$$
\mathscr{H}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\boldsymbol{M}}{3}. \tag{3.147}
$$

由(3.66)得磁球内磁感应强度

$$
\mathscr{B} = \mu_0(\mathscr{H} + \boldsymbol{M}) = \frac{2}{3}\mu_0\boldsymbol{M}. \tag{3.148}
$$

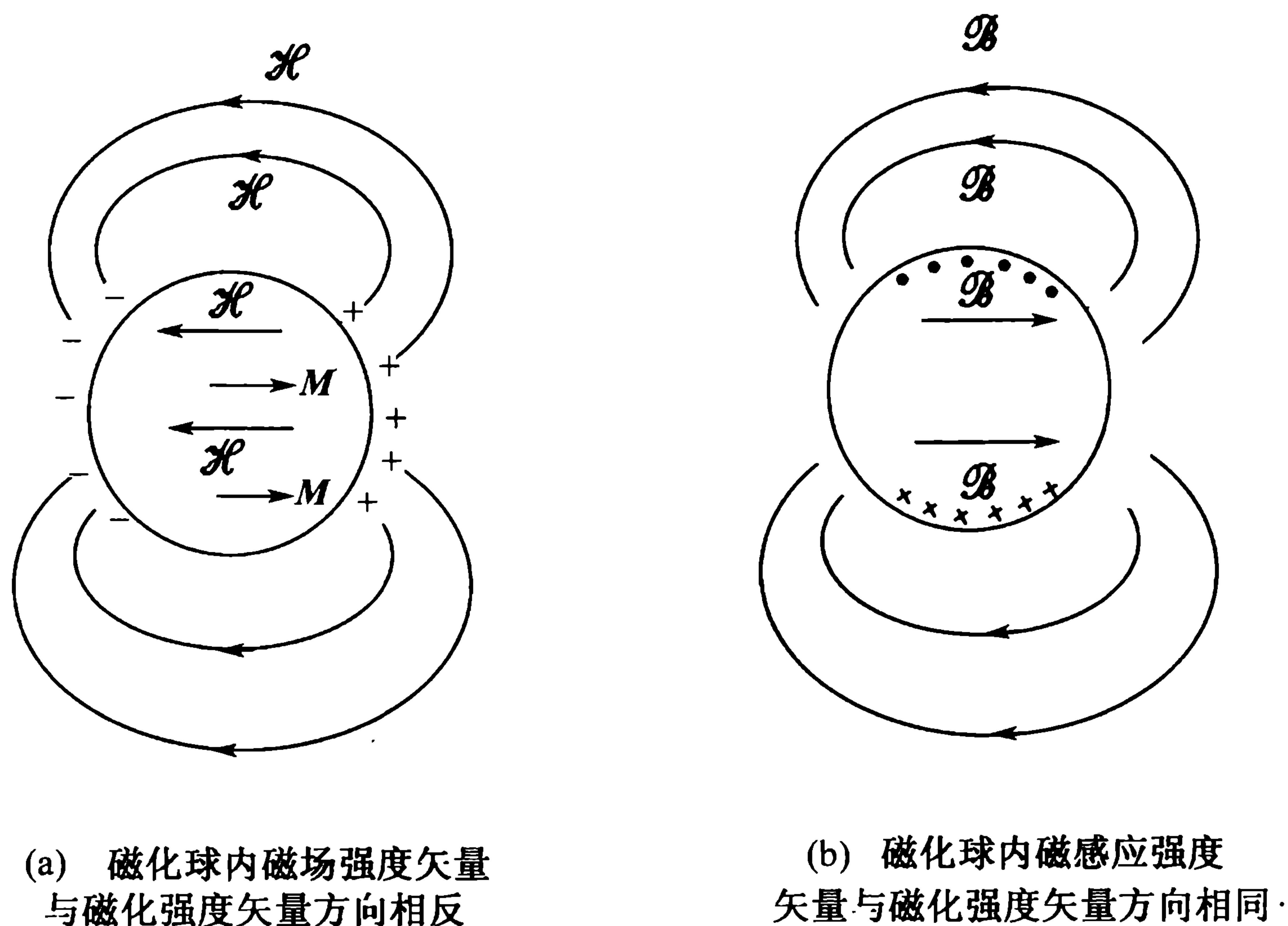
有心人立刻会发现,**这里磁场强度$\mathscr{H}$与磁化强度 $\boldsymbol{M}$** 方向相反,与磁感应强度$\mathscr{B}$的方向也相反. 如果坚持用关系(3.65)和(1.24)则'**磁化率**'

$$
\chi_{\mathrm{m}} = -\frac{1}{3}, \tag{3.149}
$$

而'磁导率'

$$
\mu = -2\mu_0. \tag{3.150}
$$

深入一步的考察会了解这里与§3.4 所考虑情形的区别. 在这里是已磁化的介质产生磁场,而§3.4 考虑的是磁场对介质的磁化. (3.149)和(3.150)右边的负号反映了这种相反的因果关系. 图3-6定性表现出磁球内$\mathscr{H}$与$\mathscr{B}$方向相反的原因.



(a) 磁化球内磁场强度矢量与磁化强度矢量方向相反

(b) 磁化球内磁感应强度矢量与磁化强度矢量方向相同

图 3-6 磁化球内$\mathscr{B}$与$\mathscr{H}$反向的图示

图 3-6(a)表明等效磁荷分布在磁球表面 $\boldsymbol{M}$ 所指方向的首尾两侧，$\boldsymbol{M}$ 所指一侧等效磁荷取正号，相反一侧取负号．磁场强度$\mathscr{H}$以等效磁荷为源，恒从正磁荷出发到负磁荷终结．这就使它在磁球内与磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 反向，而在磁球外离开球表面处与 $\boldsymbol{M}$ 成锐角．磁感应强度$\mathscr{B}$散度为零，是无源的．沿它所指方向联成的线，即磁力线，既无出发点也无终点，成为闭合回路．在磁球外磁化强度为零，它与磁场强度$\mathscr{H}$同向，从外侧靠近磁球表面时方向朝球内磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 的方向靠拢．球面点既不是它的始点也不是它的终点，进入磁球后$\mathscr{B}$的方向与 $\boldsymbol{M}$ 只能成锐角从而与磁场强度$\mathscr{H}$反向．

由于磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 为常矢量，按(3.64)球内束缚电流分布为零，束缚电流分布在磁球表面．按(3.71)表面束缚电流面密度为

$$\boldsymbol{\iota}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n} = M \sin\theta \boldsymbol{\varphi}_0, \tag{3.151}$$

$\boldsymbol{\varphi}_0$ 为表面点 φ 方向的单位矢量．图 3-6(b)分别用点与叉表示垂直纸面向上与向下的束缚电流．它绕 $\boldsymbol{M}$ 右旋，因而产生的磁感应强度在磁球内与 $\boldsymbol{M}$ 的方向一致．

§3.8　分区均匀线性磁介质中的静磁标势方法，均匀球壳在外磁场中的磁性，磁屏蔽效应

线性磁物态方程(1.24)成立的介质称线性磁介质．分区均匀线性磁介质含若干区域，每一区域中磁导率 μ 为常数．若无外电流，静磁场强度满足无旋条件

$$\nabla \times \mathscr{H} = 0,$$

因而可引进静磁标势 $\phi^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})$，使

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{r}) = -\nabla \phi^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}).$$

在(1.24)两边取散度，由于方程(1.71)，在 μ 为常数的每一区域中$\nabla \cdot \mathscr{H} = 0$．将上式代入得

$$\nabla^2 \phi^{(\mathrm{m})} = 0, \tag{3.152}$$

静磁标势因无源而满足拉普拉斯方程．由一模一样的讨论知，两介质区界面上边条件(3.83)依然成立，静磁标势是连续的．将(1.71)两边在界面上图 2-2 所示扁盒中体积分，在盒高 $\delta \to 0$ 和盒底面积 $\Delta s \to 0$ 的极限下得

$$\mathscr{B}_1 \cdot \boldsymbol{n} = \mathscr{B}_2 \cdot \boldsymbol{n}, \tag{3.153}$$

$\mathscr{B}_1$和$\mathscr{B}_2$分别为界面两侧的磁感应强度，$\boldsymbol{n}$ 为界面单位法矢．由于

$$\mathscr{B} = -\mu \nabla \phi^{(\mathrm{m})}, \tag{3.154}$$

上式又可表为

$$\mu_1 \frac{\partial \phi_1^{(\mathrm{m})}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \phi_2^{(\mathrm{m})}}{\partial n}. \tag{3.155}$$

μ_i 和 $\phi_i^{(\mathrm{m})}$，$i = 1, 2$，分别为界面第 i 侧的磁导率和静磁标势．$\dfrac{\partial}{\partial n}$为沿界面法向的梯

度.在界面边条件(3.83)和(3.155)以及无穷远处边条件下求解拉普拉斯方程(3.152)是一个明确的数学问题.由此可解得介质中的磁场分布.

设在磁导率为 μ 的均匀介质中放一半径为 a 的球.此球有两层,中心部分是一半径为 a' 磁导率为 μ' 的均匀介质球,外包一内径为 a' 外径为 a 磁导率为 μ_1 的均匀介质球壳.球外加一均匀恒定磁场 $\mathscr{B}_0$,问它在此分区均匀磁介质中诱导出的磁场分布.

以外磁场磁感应强度 $\mathscr{B}_0$ 的方向为极轴取球坐标.外磁场标势遂为

$$\phi^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mathscr{B}_0}{\mu}z = -\frac{\mathscr{B}_0}{\mu}r\cos\theta. \tag{3.156}$$

它显然满足拉普拉斯方程(3.152).如果磁导率为 μ 的均匀介质充满整个空间,这就是实际的解,静磁场即为均匀磁场 $\mathscr{B}_0$.现在其中放了一个双层球,增加了边条件,导致对(3.156)的修正.由于球的大小有限,离球越远处修正应越小,无穷远处修正应趋于零.(3.156)为静磁标势在无穷远处的渐近形式.(2.41)和(2.43)表明

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\mathrm{Y}_{10}(\theta\varphi). \tag{3.157}$$

§2.7 处理静电势的经验提示我们,具此角变化因子的外场诱导出的场的角变化因子仍由此式表示.(2.173)和(2.175)则告诉我们,具此角变化因子的拉普拉斯方程解的一般形式为

$$\left(C_{10}r + C_{10}'\frac{1}{r^2}\right)\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta.$$

在球外介质中的静磁标势因受渐近形式(3.156)的限制,修正后应为

$$\phi^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) + \Delta\phi^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = \left(-\frac{\mathscr{B}_0}{\mu}r + \frac{b}{r^2}\right)\cos\theta, \tag{3.158}$$

b 为一待定积分常数.在球内的球心部分 $r\leqslant a'$ 处,由于没有磁荷静磁标势不应有奇点,因而只能是

$$\phi'^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = b'r\cos\theta = b'z, \tag{3.159}$$

b' 为另一积分常数.在 $a'\leqslant r\leqslant a$ 的球壳内静磁标势可一般地为

$$\phi_1^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = \left(b_1 r + \frac{b_2}{r^2}\right)\cos\theta, \tag{3.160}$$

b_1 和 b_2 也是积分常数.在球壳外表面 $r = a$ 处对势(3.158)和(3.160)加边条件(3.83)得

$$-\frac{\mathscr{B}_0}{\mu}a + \frac{b}{a^2} = b_1 a + \frac{b_2}{a^2}, \tag{3.161}$$

加边条件(3.155)得

$$-\mathscr{B}_0 - \frac{2\mu b}{a^3} = \mu_1 b_1 - \frac{2\mu_1 b_2}{a^3}. \tag{3.162}$$

在球壳内表面 $r=a'$ 处对势(3.159)和(3.160)加边条件(3.83)得

$$b'a' = b_1 a' + \frac{b_2}{a'^2}, \tag{3.163}$$

加边条件(3.155)得

$$\mu' b' = \mu_1 b_1 - \frac{2\mu_1 b_2}{a'^3}. \tag{3.164}$$

(3.161)～(3.164)是四个未知数 b、b_1、b_2 和 b' 的四个联立线性非齐次方程,可整理为

$$\left.\begin{aligned}
\mu b - \mu a^3 b_1 - \mu b_2 &= \mathscr{B}_0 a^3\\
2\mu b + \mu_1 a^3 b_1 - 2\mu_1 b_2 &= -\mathscr{B}_0 a^3\\
a'^3 b_1 + b_2 - a'^3 b' &= 0\\
\mu_1 a'^3 b_1 - 2\mu_1 b_2 - \mu' a'^3 b' &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3.165}$$

这个方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} \mu & -\mu a^3 & -\mu & 0 \\ 2\mu & \mu_1 a^3 & -2\mu_1 & 0 \\ 0 & a'^3 & 1 & -a'^3 \\ 0 & \mu_1 a'^3 & -2\mu_1 & -\mu' a'^3 \end{vmatrix}$$

$$= \mu a'^3 [2a'^3(\mu_1 - \mu)(\mu_1 - \mu') - a^3(\mu_1 + 2\mu)(2\mu_1 + \mu')]. \tag{3.166}$$

按线性代数的标准方法得它的解

$$b = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \mathscr{B}_0 a^3 & -\mu a^3 & -\mu & 0 \\ -\mathscr{B}_0 a^3 & \mu_1 a^3 & -2\mu & 0 \\ 0 & a'^3 & 1 & -a'^3 \\ 0 & \mu_1 a'^3 & -2\mu_1 & -\mu' a'^3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\mathscr{B}_0 a^3}{\mu} \frac{a^3(\mu_1 - \mu)(2\mu_1 + \mu') - a'^3(\mu_1 - \mu')(2\mu_1 + \mu)}{a^3(\mu_1 + 2\mu)(2\mu_1 + \mu') - 2a'^3(\mu_1 - \mu)(\mu_1 - \mu')}, \tag{3.167}$$

$$b_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \mu & \mathscr{B}_0 a^3 & -\mu & 0 \\ 2\mu & -\mathscr{B}_0 a^3 & -2\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a'^3 \\ 0 & 0 & -2\mu_1 & -\mu' a'^3 \end{vmatrix}$$

$$= -3\mathscr{B}_0 a^3 \frac{2\mu_1 + \mu'}{a^3(\mu_1 + 2\mu)(2\mu_1 + \mu') - 2a'^3(\mu_1 - \mu)(\mu_1 - \mu')},$$

$$b_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \mu & -\mu a^3 & \mathscr{B}_0 a^3 & 0 \\ 2\mu & \mu_1 a^3 & -\mathscr{B}_0 a^3 & 0 \\ 0 & a'^3 & 0 & -a'^3 \\ 0 & \mu_1 a'^3 & 0 & -\mu' a'^3 \end{vmatrix}$$

$$= -3\mathscr{B}_0 a^3 a'^3 \frac{\mu_1 - \mu'}{a^3(\mu_1 + 2\mu)(2\mu_1 + \mu') - 2a'^3(\mu_1 - \mu)(\mu_1 - \mu')}, \quad (3.168)$$

和

$$b' = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \mu & -\mu a^3 & -\mu & \mathscr{B}_0 a^3 \\ 2\mu & \mu_1 a^3 & -2\mu_1 & -\mathscr{B}_0 a^3 \\ 0 & a'^3 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_1 a'^3 & -2\mu_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -9\mathscr{B}_0 a^3 \frac{\mu_1}{a^3(\mu_1 + 2\mu)(2\mu_1 + \mu') - 2a'^3(\mu_1 - \mu)(\mu_1 - \mu')}. \quad (3.169)$$

将这些积分常数代入(3.158)～(3.160)即得各区域的静磁标势.将所得静磁标势取梯度,可按(3.75)和(3.154)分别得各区的磁场强度$\mathscr{H}$和磁感应强度$\mathscr{B}$.

在线性关系(1.24)成立且μ为常数的均匀介质中由$\nabla\cdot\mathscr{B}=0$导致$\nabla\cdot\mathscr{H}=0$.而在无自由电流分布的条件下又由$\nabla\times\mathscr{H}=0$导致$\nabla\times\mathscr{B}=0$.$\mathscr{H}$和$\mathscr{B}$都既无散又无旋.这使磁化强度

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathscr{B}}{\mu_0} - \mathscr{H} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right)\mathscr{B} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\mathscr{H} \quad (3.170)$$

在无自由电流分布的均匀介质中既无散又无旋:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{M} = 0, \qquad \nabla\times\boldsymbol{M} = 0. \quad (3.171)$$

由(3.64)和(3.74)知,这种介质中既无束缚电流也无等效磁荷.然而在两均匀介质的界面上情形则不同.(3.70)表明,若界面两侧磁化强度沿界面的分量不同便会在界面上导致非零束缚面电流密度.边条件(3.83)保证界面两侧磁场强度$\mathscr{H}$沿界面的分量相等.由(3.170)的最后等式知,界面两侧磁导率μ不同的两种介质中磁化强度$\boldsymbol{M}$沿界面的分量必不同,从而必有束缚电流沿界面分布.正是这种束缚面电流改变了原来均匀介质中的磁场分布.这同一物理内容也可用等效磁荷概念来表达.(3.80)表明,若界面两侧磁化强度沿界面法向的分量不同就会在界面上导致非零等效磁荷面密度.边条件(3.155)保证界面两侧磁感应强度$\mathscr{B}$的法向分量相等.由(3.170)的第二等式知,界面两侧磁导率μ不同的两种介质中磁化强度$\boldsymbol{M}$的法向分量必不同,从而必有等效磁荷沿界面分布.正是界面上的这种等效磁荷改变了原先均匀介质中的磁场分布.

(3.170)表明$\boldsymbol{M}$的法向分量正比于$\mathscr{H}$的法向分量.在前面讨论的例子中的两个界面为球壳两侧的两个球面,它们的法向即是球的径向.因此界面两侧$\boldsymbol{M}$的法

向分量以及按(3.80)计算的等效磁荷面密度 $\sigma^{(m)}$ 均可由势(3.158)～(3.160)的径向微分在 $r=a$ 和 $r=a'$ 的界面上取值后线性组合而得.所得结果的角分布均由因子 $\cos\theta=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}(\theta\varphi)$ 表征,可见等效磁荷在两个界面上都作偶极分布.由于 4π 立体角积分

$$\int Y_{10}(\theta\varphi)\mathrm{d}\Omega = 0,$$

每个界面上的总等效磁荷分别为零.由(3.90)～(3.93)知偶极磁荷分布对外产生一偶极磁场,对内产生一均匀磁场.(3.158)中

$$\Delta\phi^{(m)}(\boldsymbol{r}) = \frac{b}{r^2}\cos\theta$$

表示的球外磁场修正即是球壳两侧表面上偶极磁荷分布产生的偶极磁场.(3.159)表示的球内均匀磁场则由外磁场与球壳两侧偶极磁荷分布对内产生的均匀磁场合成.(3.160)第一项表示的球壳内均匀磁场由球壳外侧磁荷分布产生,第二项表示的球壳内偶极磁场则由球壳内侧磁荷分布产生.

固定球壳两侧介质的磁导率 μ 和 μ',令球壳磁导率 $\mu_1\to\infty$.在此极限下 b_1、b_2 和 b' 均趋于零.这使球壳外表面以内的整个球体中静磁标势均为零,作为其负梯度的磁场强度自然也趋于零.这类似于封闭导体面的屏蔽效应,使静电场不能进入封闭导体外表面包围的空间.高磁导率介质阻止磁场进入它所包围的空间,称为磁屏蔽效应.在球壳内侧,即 $r<a'$ 的球心部分,磁导率 μ' 是固定的,$\mathscr{H}\to0$ 导致 $\mathscr{B}=\mu'\mathscr{H}\to0$.这一区域的磁场确实为零,被高磁导率的球壳屏蔽掉了.然而在球壳内部,即在 $a'<r<a$ 的区域,虽然 $\mathscr{H}\to0$ 但磁导率 $\mu_1\to\infty$,磁感应强度 $\mathscr{B}=\mu_1\mathscr{H}$ 未必趋于零.实际上在这一区域中

$$\mathscr{B} = \mu_1\mathscr{H} = -\nabla(\mu_1\phi_1^{(m)}), \tag{3.172}$$

而

$$\lim_{\mu_1\to\infty}(\mu_1\phi_1^{(m)}(\boldsymbol{r})) = -\frac{3\mathscr{B}_0a^3}{a^3-a'^3}\left(r+\frac{a'^3}{2r^2}\right)\cos\theta. \tag{3.173}$$

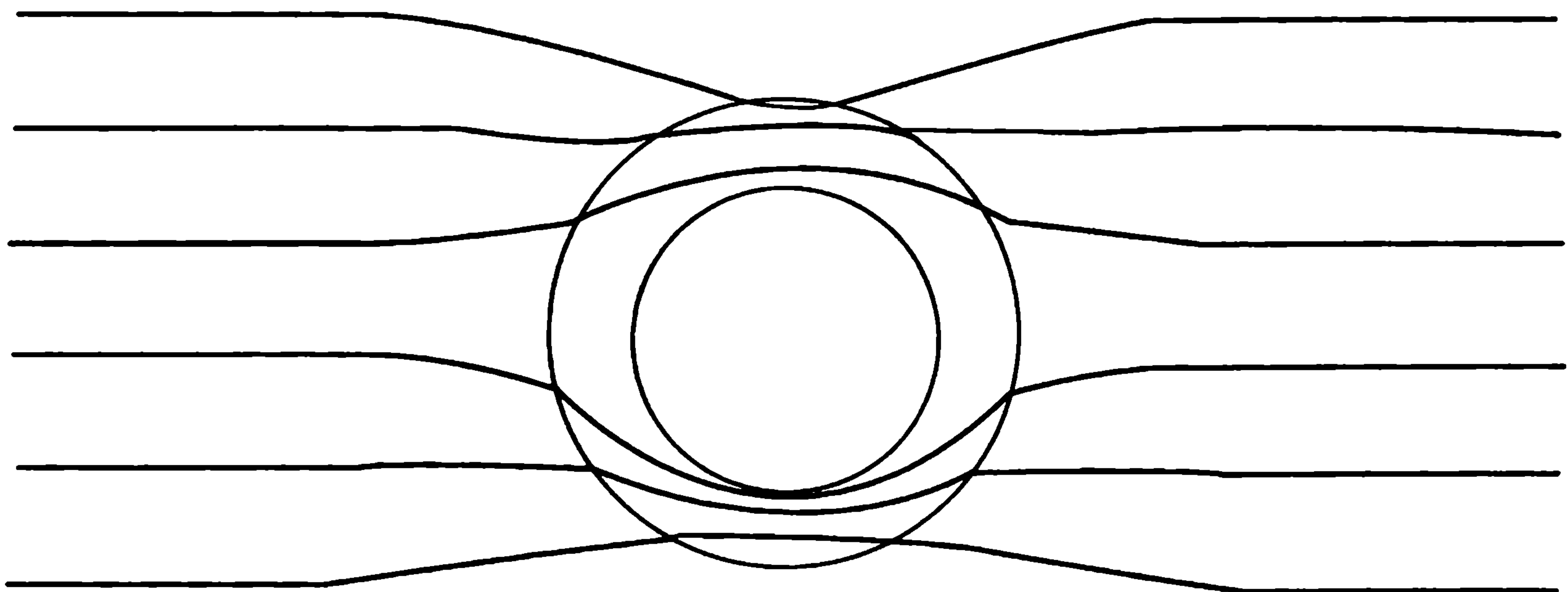


图 3-7　磁力线向高磁导率球壳集中

此二式表明，球壳内的磁感应强度包括一 z 方向的均匀场和一个偶极场，其中均匀场的磁感应强度为外加均匀场的 $\frac{3a^3}{a^3-a'^3}$ 倍. 球壳内磁感应强度的增高与球心部分磁感应强度趋于零相对照，表现出磁力线向高磁导率球壳的集中. 图 3-7 形象地表示了这一点.

习 题 三

1. 无限长薄导体圆筒上有轴向电流均匀分布，电流强度为 I. 筒内充满磁导率为 μ_1 的均匀介质，筒外均匀介质的磁导率为 μ_2. 求空间任一点的磁场强度和磁感应强度.

2. 设上题圆筒中心轴上还有一条无限长细导线，有强度为 I' 的电流通过，求空间任一点的磁场强度和磁感应强度. 这里取导线中的电流方向为轴的正向，I' 恒正. 若 I 与 I' 同向则取正号，反向则取负号.

3. 两条平行细导线相距为 l，分别有电流 I 和 I' 在其中流动，求每条导线上单位长度受的力.

4. 设在第 2 题所述环境中再加一无限长沿轴向的细导线，其中电流强度为 I''，求此导线上单位长度受的力.

5. 试计算第 2 题所设情形中磁化强度和束缚电流的分布.

6. 试证介质中能定义磁化强度的充分兼必要条件是束缚电荷密度分布不随时间变化.

7. 一均匀荷电总电荷为 q 的薄球壳绕过球心的一条固定轴匀速转动. 求它的磁偶极矩以及它产生的磁场强度和磁感应强度的空间分布. 将它与均匀磁化球比较.

8. 由细导线绕制成一圆柱形线圈，圆柱半径为 a，长为 l，线圈单位长度有 n 匝. 求强度为 I 的电流通过线圈时圆柱中心轴上的磁感应强度和磁场强度.

9. 求半径为 a 长为 l 沿轴向均匀磁化的圆柱形永久磁棒在圆柱轴上的磁感应强度和磁场强度.

10. 求外径为 a 内径为 a' 的均匀磁化球壳的束缚电流分布、等效磁荷分布、磁场强度和磁感应强度的空间分布.

11. 将一半径为 a 磁导率为 μ' 的均匀介质球放入磁导率为 μ 的均匀介质内的任意外磁场中，求静磁标势的空间分布.

12. 计算 §3.8 所论球壳内外两侧介质中及球壳内的磁化强度、球壳内外表面上的束缚电流密度和等效磁荷密度. 讨论它们在 $\mu_1 \to \infty$ 条件下的极限. 证明在此极限下球壳内表面上的等效磁荷密度趋于零，磁屏蔽效应完全来自它的外表面的等效磁荷.

13. 磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两半无穷大均匀介质以无穷大平面为界. 在磁导率为 μ_1 的一侧距界面为 a 处有一磁偶极子 $\mathscr{M}$. 求静磁标势的空间分布.

14. 模仿 §2.4 对静电作用势的多极展开将静磁作用势(3.110)作多极展开.

15. 将均匀磁化棒的横截面缩小至零，磁棒便成为一根磁针，它的磁性质可由两端的等效点磁荷代表. 试证

(1) 点磁荷 $q^{(m)}$ 在以它为原点的径矢为 $\boldsymbol{r}$ 处产生的磁场强度为

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{q^{(m)}}{4\pi\mu_0 r^2}\boldsymbol{r}_0, \tag{3.174}$$

$\boldsymbol{r}_0 \equiv \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ 为径向单位矢量;

(2) $\boldsymbol{r}$ 处的点磁荷 $q^{(\mathrm{m})}$ 受的磁力为

$$\boldsymbol{F}^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = q^{(\mathrm{m})}\mathscr{H}(\boldsymbol{r}); \tag{3.175}$$

(3)点磁荷 $q^{(\mathrm{m})}$ 和 $q'^{(\mathrm{m})}$ 相互作用力的方向在它们的联线上,代数值为

$$F^{(\mathrm{m})} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q^{(\mathrm{m})}q'^{(\mathrm{m})}}{r^2}, \tag{3.176}$$

r 为它们之间的距离,此值为正表斥力,此值为负表引力.

可见等效点磁荷间的相互作用力符合库仑定律,也是同性相斥异性相引的距离平方反比力.

16. 试推导距离为 r 的两个磁偶极子 $\mathscr{M}_1$ 和 $\mathscr{M}_2$ 的相互作用力和力矩的表达式.

17. 模仿(3.131)的推导,证明旋度的球坐标表示式

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\sin\theta A_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{r}_0 + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial rA_\varphi}{\partial r}\right)\boldsymbol{\theta}_0 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{\varphi}_0. \tag{3.177}$$

推导(3.131)的思想也可用来求矢量散度的曲线坐标表示式.用无穷小等坐标面包围一点.按高斯定理,矢量在该点的散度等于矢量在这个无穷小封闭曲面上的面积分除以它所包围的微分体积.以球坐标为例(参见图 3-8).矢量 $\boldsymbol{A}$ 在相距 $\mathrm{d}r$ 的两个等 r 面上的面积分为

$$\begin{aligned}&A_r(r+\mathrm{d}r,\theta,\varphi)(r+\mathrm{d}r)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi - A_r(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&= \frac{\partial r^2A_r}{\partial r}\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}$$

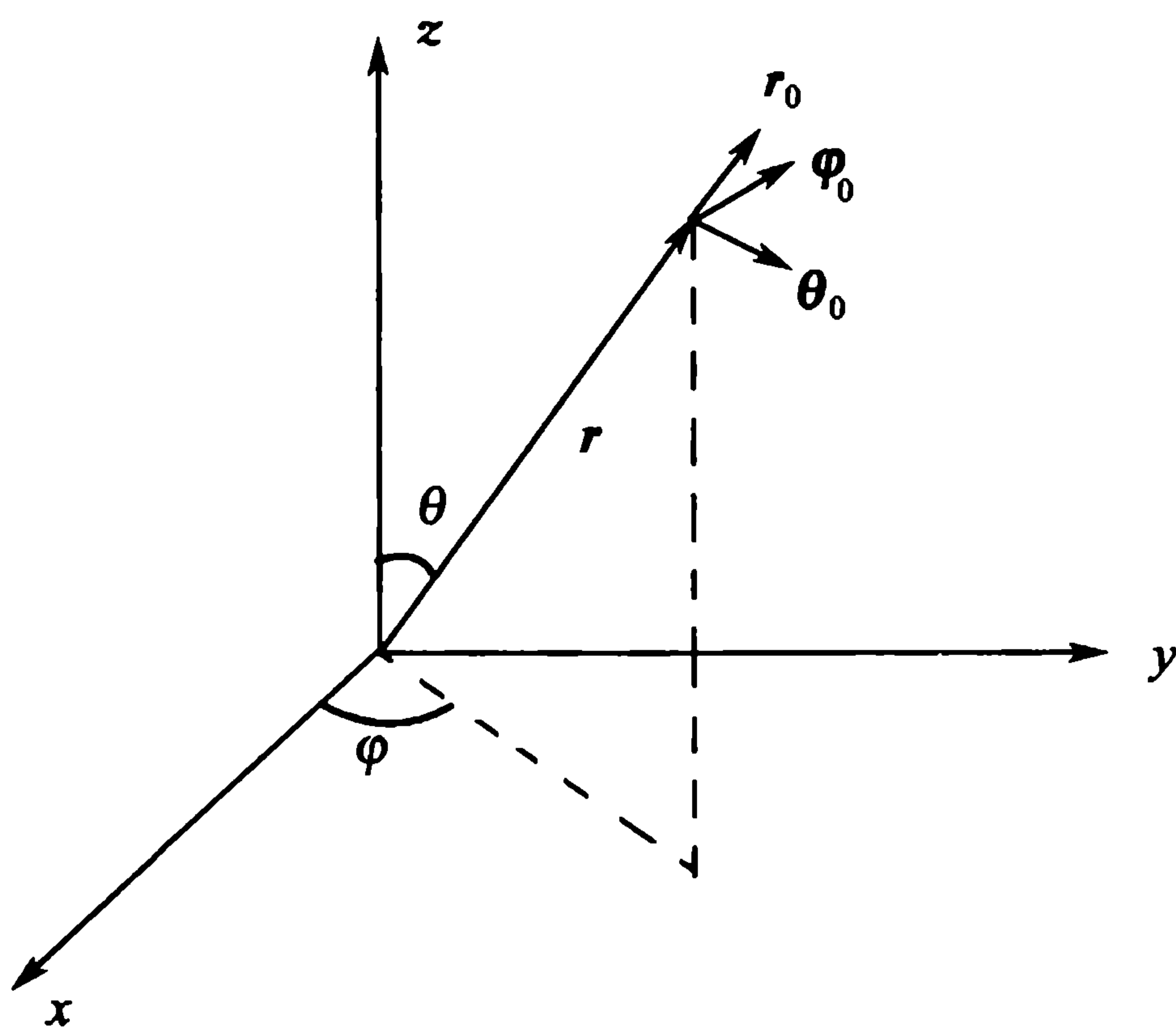


图 3-8 球坐标与球坐标架

在相距 $\mathrm{d}\theta$ 的两个等 θ 面上的面积分为

$$\begin{aligned}&A_\theta(r,\theta+\mathrm{d}\theta,\varphi)r\sin(\theta+\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi - A_\theta(r,\theta,\varphi)r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\\&= \frac{\partial\sin\theta A_\theta}{\partial\theta}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}$$

在相距 $\mathrm{d}\varphi$ 的两个等 φ 面上的面积分为

$$A_\varphi(r,\theta,\varphi+\mathrm{d}\varphi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta - A_\varphi(r,\theta,\varphi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

被包围的体积为 $r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. 可见

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial \sin\theta A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right). \tag{3.178}$$

特别地, 一标量函数 $\Psi(\boldsymbol{r})$的梯度为

$$\nabla \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r}\boldsymbol{r}_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\boldsymbol{\theta}_0 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\boldsymbol{\varphi}_0. \tag{3.179}$$

梯度的散度便是拉普拉斯算符, 将此式代入上式便得

$$\nabla^2\Psi = \nabla \cdot \nabla \Psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}\right]. \tag{3.180}$$

这可作为拉普拉斯算符的球坐标表示式(2.170)和(2.171)的几何证明.

18. 试用这种几何方法证明散度的柱坐标表示式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho A_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{3.181}$$

和拉普拉斯算符的柱坐标表示式

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\ \rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{3.182}$$

第四章　电磁场的动力学,电磁波的发射与吸收

§4.1　给定电荷电流分布条件下电磁场的动力学,拉格朗日量,规范不变性与洛伦兹不变性

电动力学研究电磁场与电荷电流组成的系统的动力学.在经典物理范围内,电荷电流在电磁场作用下的运动由经典力学研究,而电磁场在电荷电流作用下的运动由经典场论研究.实际上这两方面自然是联系在一起的.只是在研究中有时侧重这方面,有时侧重那方面.本节讨论给定电荷电流分布条件下电磁场的动力学.上两章所论静电学和静磁学可视为电磁场的静力学,是动力学在不随时间变化条件下的特例.在对电磁场的动力学有所了解后再俯视静电学和静磁学会有更深的认识.动力学自然有它超出静力学的内容.对电磁场而言,这主要是电磁波的激发、传播和吸收.

在线性均匀介质中电磁场的动力学方程即是麦克斯韦方程(1.75)~(1.78).将电磁场用(1.96)定义的矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$和(1.99)定义的标势 $\phi(\boldsymbol{r},t)$表达,动力学方程则为(1.102)和(1.103).采用电磁势表达电磁场的好处在于可利用规范不变性对不同问题采用不同规范以使动力学方程取最简明的形式.由于真空电动力学为基本理论,本节讨论真空中电磁场的动力学.这意味着介电常数取定为 ϵ_0,磁导率取定为 μ_0,光速取定为 c.作为代价,电荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$必须包含束缚电荷密度,电流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$也必须包含束缚电流密度.这样得到的结果仍可移用于线性均匀介质中的电磁场,只要将 ϵ_0、μ_0 和 c 分别改为ϵ、μ 和 u,将束缚电荷电流分别排除于 $\rho(\boldsymbol{r},t)$和 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$之外即可.

经典力学的动力学方程可由一拉格朗日量按哈密顿原理导出.拉格朗日量通常为广义坐标和广义速度的函数,它对时间的积分得作用量.哈密顿原理称,实际的轨道方程,即广义坐标随时间的实际变化,在固定始末时刻和始末广义坐标的条件下使作用量取极值.由此导出的运动方程即拉格朗日方程.哈密顿原理在经典力学中是普遍适用的,可用于粒子系力学也可用于连续介质力学,如弹性力学和流体力学等.在连续介质力学中广义坐标常取为其中各点的位移.由于其中的点有无穷多,它的广义坐标便有无穷多,是无穷多自由度系统.拉格朗日量为空间各点的拉格朗日量密度的体积分.电磁场的动力学与连续介质的动力学颇为类似,例如都有

波动解等．这诱使人们尝试寻找它的拉格朗日量，从中演绎出全部动力学．采用电磁势表示电磁场，自然会尝试取空间各点的矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ 作为广义坐标，它们对时间的微商便是广义速度．至于拉格朗日量与这些广义坐标和广义速度的关系则应由给出正确的运动方程(1.102)和(1.103)来确定．这倒不一定要从运动方程倒推，而且倒推也不一定是有效的办法．有些原则可帮助寻找拉格朗日量，这主要是一些对称性考虑．例如动力学应在洛伦兹变换下不变，也应在规范变换下不变．下面将看到这已足以确定电磁场的拉格朗日量．

运动方程是由作用量取极值决定的．在一种变换下作用量的不变性可保证运动方程在该变换下的不变性．作用量是拉格朗日量的时间积分，拉格朗日量又是拉格朗日量密度的空间积分，因此作用量是拉格朗日量密度的四维时空积分．以 S 表作用量，L 表拉格朗日量，$\mathscr{L}$表拉格朗日量密度，它们之间的关系是

$$S = \int L\mathrm{d}t = \int \mathscr{L}\,\mathrm{d}^4 x, \tag{4.1}$$

其中积分元 $\mathrm{d}^4 x \equiv \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$．考虑全空间电磁场的整个时间进程，这个积分的区域为整个四维时空．洛伦兹变换将整个四维时空变为整个四维时空，积分区域在洛伦兹变换下不变．从洛伦兹变换(1.147)解出它的逆变换

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \\ y &= y', \qquad z = z', \\ t &= \frac{t' + \dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

与(1.147)相比这只是将 x、y、z 和 t 与 x'、y'、z'和 t'交换了位置，并将 v 换成了 $-v$．可见洛伦兹变换是相互的，S′系相对 S 系以速度 v 沿 x 方向运动即 S 系相对 S′系以速度 $-v$ 沿 x'方向运动．这便是从 S′系到 S 系的洛伦兹变换．两边差分得

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \\ \Delta y &= \Delta y', \qquad \Delta z = \Delta z', \\ \Delta t &= \frac{\Delta t' + \dfrac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

设在 S′系看某过程发生于空间一固定点，因而自始至终 $\Delta x' = 0$，时间经历 Δt_0，因而 $\Delta t' = \Delta t_0$．按洛伦兹变换(4.3)的末式，此过程在 S 系中看经历时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{4.4}$$

比 Δt_0 长.即在静止坐标系中看运动物体的时间进程慢了,时间间隔变大了,这便是著名的时间膨胀.另一方面,(1.182)表明运动物体的体积作洛伦兹收缩,且收缩率$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$与时间膨胀率$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$恰互为倒数.这使四维时空体积

$$\Delta t \mathscr{V} = \Delta t_0 \mathscr{V}_0 \tag{4.5}$$

在洛伦兹变换下不变.可见作用量表达式(4.1)中的积分元 d^4x 也是洛伦兹变换中的不变量.作用量在洛伦兹变换下的不变性取决于拉格朗日量密度 $\mathscr{L}$在该变换下的不变性.$\mathscr{L}$应为一标量.此外,积分区域和积分元均与电磁势无关,自然在规范变换中不变.作用量的规范不变性也取决于拉格朗日量密度 $\mathscr{L}$的规范变换性质.一般说来,标量可由张量组成.由电磁势组成的最简单的规范不变张量就是(1.197)定义的二阶反对称张量($F_{\mu\nu}$),由它组成的最简单的标量则是

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \eta^{\mu\mu'}\eta^{\nu\nu'}F_{\mu\nu}F_{\mu'\nu'}, \tag{4.6}$$

这里重新采用了爱因斯坦求和约定.运动方程(1.102)和(1.103)右边有电荷密度 ρ 和电流密度$\boldsymbol{j}$,它们也应出现在拉格朗日量密度中.在运动方程中它们以线性项出现,在拉格朗日量密度中就应和电磁势相乘.这样构成的最简单的标量为

$$A_\mu j^\mu = \eta_{\mu\mu'}j^\mu A^{\mu'} = \eta^{\mu\mu'}A_\mu j_{\mu'} = A^\mu j_\mu, \tag{4.7}$$

其中四维电磁势(A^μ)或(A_μ)由(1.194)或(1.196)定义,电荷电流密度四矢量(j^μ)由(1.189)定义.这个标量并非规范变换中的不变量.规范变换(1.104)和(1.107)表成四维形式就是

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\psi. \tag{4.8}$$

它将标量(4.7)变为

$$A'_\mu j^\mu = A_\mu j^\mu + j^\mu\partial_\mu\psi. \tag{4.9}$$

用(1.191)可将连续性方程(1.31)表为

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{4.10}$$

可见标量(4.7)在规范变换中多出的一项

$$j^\mu\partial_\mu\psi = \partial_\mu(\psi j^\mu) - \psi\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu(\psi j^\mu) \tag{4.11}$$

为四矢量的四散度,它的四维时空积分可按四维高斯定理化为包围此四维时空的三维超曲面上的积分.作用量取极值即要求它的变分为零:

$$\delta S = 0. \tag{4.12}$$

在经典力学的哈密顿原理中变分是在固定始末时刻和始末时刻的广义坐标的前提下进行的.因此在拉格朗日量上加一时间的全微商不改变变分的结果,因为这一项

的时间积分只与始末时刻有关而不参与变分.这一点向经典场论的推广便是:哈密顿原理(4.12)中变分应在固定包围所论四维时空的三维超表面和表面上作为广义坐标的场值的前提下进行.因此在拉格朗日量密度上加一四矢量的四散度不改变变分的结果,因为这一项的四维时空积分只与超表面有关而不参与变分.可见标量(4.7)虽不是规范变换不变量,将它加入拉格朗日量密度按哈密顿原理导出的贡献仍在规范变换中不变.尝试将标量(4.6)和(4.7)线性组合起来作为电磁场在给定电荷电流分布条件下的拉格朗日量密度.为此要引进两个组合系数.在拉格朗日量密度上乘一任意常数显然不改变作用量的极值条件,从而不改变导出的运动方程.可见只有这两项叠加系数的比是重要的.容易看到,改变电荷符号的定义可改变这个比值的符号,改变单位制可改变这个比的绝对值.总之,这个比也可随意给定,这只相当于改变电荷符号的定义和改变单位制.于是拉格朗日量密度便完全定了下来.将它写为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + A_\mu j^\mu, \tag{4.13}$$

$-\frac{1}{4\mu_0}$为叠加系数比.下面将看到由此导出的恰为熟知的标准单位制中的真空电磁场动力学,μ_0 为真空磁导率.将(4.13)代入(4.1)即得电磁场的作用量.

以 $A_\mu(x^0,x^1,x^2,x^3)\equiv A_\mu(\boldsymbol{r},t)$, $\mu=0,1,2,3$,为 t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 点电磁场的广义坐标.这些广义坐标的变分导致作用量的变分

$$\begin{aligned}\delta S &= \int\left[\frac{1}{\mu_0}F^{\mu\nu}\delta(\partial_\nu A_\mu) + j^\mu\delta A_\mu\right]\mathrm{d}^4x \\ &= \int\left(-\frac{1}{\mu_0}\partial_\nu F^{\mu\nu} + j^\mu\right)\delta A_\mu \mathrm{d}^4x.\end{aligned} \tag{4.14}$$

第一等号处用了 $F^{\mu\nu}$和 $F_{\mu\nu}$的定义,并用它们的反对称性合并了含 $\delta(\partial_\nu A_\mu)$的四项;第二等号处交换了对 A_μ 的变分和微分,然后作了部分积分,积得的三维超表面积分由于被积函数中的因子 $\delta A_\mu=0$ 而为零.在超表面包围的四维时空内部各点上 δA_μ 不受任何限制.为使(4.14)表示的作用量变分为零必须且只须它右边被积函数中与 δA_μ 相乘的因子为零.由此得

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu, \qquad \mu = 0,1,2,3.$$

这正是电磁场运动方程的四维形式(1.221).用(1.189),(1.197),(1.196),(1.175)和(1.88)可将它写成三维形式

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial\nabla\cdot\boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{4.15}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mu_0\boldsymbol{j}. \tag{4.16}$$

这就是运动方程(1.102)和(1.103)在真空中的形式.拉格朗日量密度(4.13)导致

正确的运动方程,也就证实了它自身的正确性.

(4.15)不含 ϕ 对时间的微商,实际上不能算动力学方程.将它表成泊松方程的形式

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\phi &= -\xi(\boldsymbol{r},t),\\ \xi(\boldsymbol{r},t) &= \frac{\rho}{\epsilon_0}+\frac{\partial\nabla\cdot\boldsymbol{A}}{\partial t}.\end{aligned}\right\}\tag{4.17}$$

从中可解出

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\xi(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}',\tag{4.18}$$

它由同时刻的 ρ 和$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$表出,其中 ρ 是给定的,只有$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$是动力学变量.将此解代入(4.16)右边.这样消去 ϕ 后,(4.16)只是矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$的方程,其中 $\boldsymbol{A}$ 对时间的微商最高为二阶,方程是对一定时刻 t 成立的.将这个方程作为电磁场的运动方程,t 时刻的广义坐标便只有空间各点的矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$,方程可看成广义加速度$\frac{\partial^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}$的表达式.被消去的标势 $\phi(\boldsymbol{r},t)$可按(4.18)和(4.17)由广义速度$\frac{\partial\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$表达.即方程组(4.15)和(4.16)中 $\phi(\boldsymbol{r},t)$是"多余的自由度".在消去了标势 ϕ 的动力学中还有多余的自由度.由于理论的规范不变性,由它的一个解经规范变换可得它的另一解,且这个解与原来的解对应同一种实际情况.由于有无穷多种规范变换,理论便有无穷多数学上不同的解对应同一个物理实在.这便是多余自由度的表现.要消除这些多余自由度须为理论选择一种规范.

§4.2 库仑规范,纵场与横场的分离,场方程的傅里叶分解

用(1.201),(1.200),(1.196),(1.189)和(1.88)可将电磁场的拉格朗日量密度(4.13)写成三维形式

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=\frac{1}{2}\left(\epsilon_0\mathscr{E}^2-\frac{1}{\mu_0}\mathscr{B}^2\right)-\phi\rho+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\\ &=\frac{1}{2}(\mathscr{E}\cdot\mathscr{D}-\mathscr{H}\cdot\mathscr{B})-\phi\rho+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j},\end{aligned}\tag{4.19}$$

其中$\mathscr{E}$与$\mathscr{B}$仍按(1.100)和(1.96)由 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 表出,而$\mathscr{D}=\epsilon_0\mathscr{E}$,$\mathscr{H}=\frac{1}{\mu_0}\mathscr{B}$.在此式中分别用 ϵ 和 μ 代替 ϵ_0 和 μ_0 便得到一般线性介质中电磁场的拉格朗日量密度

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=\frac{1}{2}(\mathscr{E}\cdot\mathscr{D}-\mathscr{H}\cdot\mathscr{B})-\phi\rho+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\\ &=\frac{1}{2}\left(\epsilon\mathscr{E}^2-\frac{1}{\mu}\mathscr{B}^2\right)-\phi\rho+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}.\end{aligned}\tag{4.20}$$

代入(4.1),计算这样得到的作用量 S 由标势变分 $\delta\phi$ 引起的变分 δS.要求此变分为零便得麦克斯韦方程(1.70)～(1.73)中的(1.70).要求矢势变分 $\delta\boldsymbol{A}$ 引起的作用量变分 $\delta S=0$ 便得其中的(1.73).至于麦克斯韦方程中的(1.71)和(1.72)早已由定义(1.96)和(1.100)保证.对静态均匀介质,ϵ 与 μ 都和时空坐标无关,(1.70)和(1.73)就分别成为(1.102)和(1.103).

取库仑规范

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0, \tag{4.21}$$

(1.102)和(1.103)变为

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\epsilon} \tag{4.22}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{j}_t. \tag{4.23}$$

这就是(1.124)和(1.133),其中 u 和 $\boldsymbol{j}_t$ 分别由(1.87)和(1.129)定义.(1.130)表明

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}_t=0, \tag{4.24}$$

因而 $\boldsymbol{j}_t$ 称为横电流密度矢量,是电流密度矢量 $\boldsymbol{j}$ 的横分量.标势 ϕ 与电荷密度 ρ 的关系(4.22)与静电势与电荷密度的关系(2.3)是一模一样的泊松方程,利用格林函数(2.28)可得一模一样的解

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi\epsilon\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}'. \tag{4.25}$$

它与静电势解(2.30)的差别只在于电荷密度 ρ 可随时间变化,相应的标势便也随时间变化.(4.25)将一时刻的标势与同时刻的电荷密度分布联系起来,是一种瞬时关系.这种瞬时关系与下面将得到的波动方程解与源之间的推迟或超前关系形成对照.由于库仑规范条件(4.21),电场强度的表达式(1.100)可视为分解

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_l+\mathscr{E}_t. \tag{4.26}$$

其中

$$\mathscr{E}_l=-\nabla\phi \tag{4.27}$$

无旋,为纵电场;

$$\mathscr{E}_t=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{4.28}$$

无散,为横电场.磁场(1.96)自然无散,是横场.电磁场便分解成了纵场与横场两部分.纵场只含纵电场(4.27),横场则含横电场(4.28)和磁场(1.96).将分解(4.26)和(1.128)代入(4.20)右边得

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\left(\epsilon\mathscr{E}_t^2-\frac{1}{\mu}\mathscr{B}^2\right)+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}_t+\epsilon\mathscr{E}_t\cdot\mathscr{E}_l+\frac{\epsilon}{2}\mathscr{E}_l^2-\phi\rho+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}_l. \tag{4.29}$$

后四项与纵场或纵电流密度矢量有关.用(1.131),(4.27),(4.22),(4.28),(4.21)

和(4.25)得这几项对拉格朗日量的贡献,即它们的体积分为

$$\begin{aligned}
&\int\left(\epsilon\,\mathscr{E}_t\cdot\mathscr{E}_l+\frac{\epsilon}{2}\mathscr{E}_l^2-\phi\rho+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}_l\right)\mathrm{d}\mathscr{V}\\
&=\int\left[\epsilon\,\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\nabla\phi+\frac{\epsilon}{2}(\nabla\phi)\cdot(\nabla\phi)-\phi\rho+\epsilon\boldsymbol{A}\cdot\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]\mathrm{d}\mathscr{V}\\
&=-\int\left(\epsilon\phi\,\frac{\partial\nabla\cdot\boldsymbol{A}}{\partial t}+\frac{\epsilon}{2}\phi\nabla^2\phi+\phi\rho+\epsilon\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)\mathrm{d}\mathscr{V}\\
&=-\int\frac{1}{2}\phi\rho\mathrm{d}\mathscr{V}=-\frac{1}{2}\iint\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)\rho(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi\epsilon\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}\mathrm{d}\mathscr{V}'.
\end{aligned}\tag{4.30}$$

在第二等号处作了部分积分,积得的无穷远处表面积分被置零.无穷远处表面积分置零称为周期边条件,它比将场量本身在无穷远处的值置零的边条件广泛.它包括无穷远处场量本身为零的情形,也包括无穷远处场量本身虽非零却由于作周期变化表面积分为零的情形.在讨论电磁波运动的问题中会出现后一种情形.由(4.29)和(4.30)得库仑规范中电磁场的拉格朗日量

$$\begin{aligned}
L&=\int\mathscr{L}\mathrm{d}\mathscr{V}\\
&=\int\left[\frac{1}{2}\left(\epsilon\,\mathscr{E}_t^2-\frac{1}{\mu}\mathscr{B}^2\right)+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}_t\right]\mathrm{d}\mathscr{V}-\frac{1}{2}\iint\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)\rho(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi\epsilon\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}\mathrm{d}\mathscr{V}'\\
&=\int\left\{\frac{1}{2}\left[\epsilon\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{A})^2\right]+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}_t\right\}\mathrm{d}\mathscr{V}-\frac{1}{2}\iint\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)\rho(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi\epsilon\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}\mathrm{d}\mathscr{V}'.
\end{aligned}\tag{4.31}$$

现在广义坐标只剩下空间各点的矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$,且是加了规范条件(4.21)的.在固定四维时空超表面上广义坐标 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$取值的条件下计算它所包围的四维时空中广义坐标变分 $\delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$引起的作用量变分

$$\begin{aligned}
\delta S&=\int\delta L\mathrm{d}t=\int\delta\mathscr{L}\mathrm{d}\mathscr{V}\mathrm{d}t\\
&=\int\left[\epsilon\,\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\delta\boldsymbol{A}}{\partial t}-\frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot(\nabla\times\delta\boldsymbol{A})+\boldsymbol{j}_t\cdot\delta\boldsymbol{A}\right]\mathrm{d}\mathscr{V}\mathrm{d}t\\
&=\int\left[\boldsymbol{j}_t-\epsilon\,\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{\mu}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\right]\cdot\delta\boldsymbol{A}\mathrm{d}\mathscr{V}\mathrm{d}t,
\end{aligned}\tag{4.32}$$

末一等号处作了部分积分,积得的三维超表面积分由于超表面上 $\boldsymbol{A}$ 固定,$\delta\boldsymbol{A}=0$,而为零.在四维时空内部变分 $\delta\boldsymbol{A}$ 也不是任意的.规范条件(4.21)要求

$$\nabla\cdot\delta\boldsymbol{A}=0.\tag{4.33}$$

用 $\delta\boldsymbol{A}_t$ 表示符合此条件的变分,哈密顿原理可表为

$$\int\left[\boldsymbol{j}_t-\epsilon\,\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{\mu}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\right]\cdot\delta\boldsymbol{A}_t\mathrm{d}\mathscr{V}\mathrm{d}t=0.\tag{4.34}$$

考虑广义坐标的任意变分 $\delta\boldsymbol{A}$,它不一定符合条件(4.33),一般地有

$$\nabla \cdot \delta \boldsymbol{A} = \xi, \tag{4.35}$$

ξ 不一定是零.解泊松方程

$$\nabla^2 \eta = -\xi, \tag{4.36}$$

令

$$\delta \boldsymbol{A}_t = \delta \boldsymbol{A} + \nabla \eta, \tag{4.37}$$

它显然符合条件(4.33),即

$$\nabla \cdot \delta \boldsymbol{A}_t = \nabla \cdot \delta \boldsymbol{A} + \nabla^2 \eta = 0.$$

将这样定义的 $\delta \boldsymbol{A}_t$ 代入(4.34),由于该式左边积分号下的方括号是一无散矢量,经部分积分得

$$\begin{aligned} &\int \left[\boldsymbol{j}_t - \epsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) \right] \cdot \nabla \eta \mathrm{d}\mathscr{V} \mathrm{d}t \\ &= -\int \eta \nabla \cdot \left[\boldsymbol{j}_t - \epsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) \right] \mathrm{d}\mathscr{V} \mathrm{d}t = 0, \end{aligned} \tag{4.38}$$

因而得

$$\int \left[\boldsymbol{j}_t - \epsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) \right] \cdot \delta \boldsymbol{A} \mathrm{d}\mathscr{V} \mathrm{d}t = 0. \tag{4.39}$$

此式中 $\delta \boldsymbol{A}$ 已是任意变分,因而成立的充分兼必要条件是被积函数中与 $\delta \boldsymbol{A}$ 相乘的方括号为零,这便得到电磁场的运动方程(4.23).

作傅里叶变换

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \boldsymbol{q}(\boldsymbol{k}, t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k; \tag{4.40}$$

其中$\frac{1}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$为一平面波,$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$为波矢量,它的方向即平面波的传播方向;积分元

$$\mathrm{d}^3 k \equiv \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z, \tag{4.41}$$

积分区域为实矢量 $\boldsymbol{k}$ 变化的整个空间;$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{k}, t)$表示波矢量为 $\boldsymbol{k}$ 的平面波在 t 时刻的波幅,它的方向即该时刻这个平面波的偏振方向. t 时刻 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{k}, t)$由(4.40)表出 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$,又可经它的逆变换

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{k}, t) = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) \mathrm{d}\mathscr{V} \tag{4.42}$$

算得. $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{k}, t)$与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$同样好地表出电磁场,是电磁场的另一套广义坐标.(4.40)和(4.42)是这两套广义坐标间的变换关系.在(4.40)两边取散度得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3} \int \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{q}(\boldsymbol{k}, t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}^3 k. \tag{4.43}$$

库仑规范条件(4.21)便表现为横波条件

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{q}(\boldsymbol{k}, t) = 0, \tag{4.44}$$

即偏振方向恒垂直于波的传播方向.对每一平面波作一直线正交坐标架,它的互相

垂直的三条轴上的单位矢量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 中，$\boldsymbol{e}_3$ 沿传播方向 $\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 在垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的平面内.用它们来表示波幅矢量，

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{k},t) = \sum_{i=1}^{3} q_i(\boldsymbol{k},t)\boldsymbol{e}_i. \tag{4.45}$$

对它加横波条件(4.44)得 $kq_3(\boldsymbol{k},t)=0$，即

$$q_3(\boldsymbol{k},t) = 0. \tag{4.46}$$

将库仑规范条件(4.21)当作对电磁场这个动力学系统的约束.这组约束不含广义速度$\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$，因而是完整约束.横波条件(4.44)或(4.46)分别是这组约束用广义坐标 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{k},t)$或$(q_1(\boldsymbol{k},t),q_2(\boldsymbol{k},t),q_3(\boldsymbol{k},t))$的表示式.$q_3(\boldsymbol{k},t)$被固定为零，已无自由度，或者说是多余自由度.消去此多余自由度后剩下的广义坐标 $q_1(\boldsymbol{k},t)$和 $q_2(\boldsymbol{k},t)$已不再受约束.将

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{k},t) = \sum_{i=1}^{2} q_i(\boldsymbol{k},t)\boldsymbol{e}_i = q_1(\boldsymbol{k},t)\boldsymbol{e}_1 + q_2(\boldsymbol{k},t)\boldsymbol{e}_2 \tag{4.47}$$

代入(4.40)后再将所得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$代回(4.31)右边.同时作横电流密度矢量的傅里叶展开

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \sum_{i=1}^{2} j_i(\boldsymbol{k},t)\boldsymbol{e}_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3 k, \tag{4.48}$$

并代回(4.31)的右边，其中

$$j_i(\boldsymbol{k},t) = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{j}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\mathscr{V}, \quad i = 1,2. \tag{4.49}$$

利用 δ 函数的表达式(证明见附录一)

$$\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\mathscr{V} \tag{4.50}$$

得

$$\begin{aligned}
\int\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}\mathscr{V} &= \frac{1}{(2\pi)^6}\int \mathrm{d}^3 k\int \mathrm{d}^3 k' \sum_{i,i'=1}^{2} \dot{q}_i(\boldsymbol{k},t)\dot{q}_{i'}(\boldsymbol{k}',t)\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{e}_{i'}(\boldsymbol{k}')\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\mathscr{V} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3 k\int \mathrm{d}^3 k' \sum_{i,i'=1}^{2} \dot{q}_i(\boldsymbol{k},t)\dot{q}_{i'}(\boldsymbol{k}',t)\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{e}_{i'}(\boldsymbol{k}')\delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}') \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \sum_{i,i'=1}^{2} \dot{q}_i(\boldsymbol{k},t)\dot{q}_{i'}(-\boldsymbol{k},t)\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{e}_{i'}(-\boldsymbol{k})\mathrm{d}^3 k.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

其中

$$\dot{q}_i(\boldsymbol{k},t) \equiv \frac{\partial q_i(\boldsymbol{k},t)}{\partial t}, \tag{4.52}$$

$\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k})$表示波矢量为 $\boldsymbol{k}$ 的平面波沿 i 方向的单位偏振矢量.进一步的计算需要 $\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k})$和 $\boldsymbol{e}_{i'}(-\boldsymbol{k})$的关系，为此先定义 $\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k})$与 $\boldsymbol{e}_{i'}(\boldsymbol{k})$的关系.对 $\boldsymbol{k}$ 一定的平面波，两个独立的偏振方向可定义为互相正交的.这通常表示为

$$\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}_{i'}(\boldsymbol{k})=\delta_{ii'}=\begin{cases}1, & \text{若 } i=i',\\ 0, & \text{若 } i\neq i',\end{cases}\qquad i,i'=1,2. \tag{4.53}$$

称按几何方式定义的矢量,即有大小有方向的量,为实矢量.两个实矢量 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$ 用实数 a_1 和 a_2 为系数叠加起来得到的

$$\boldsymbol{V}=a_1\boldsymbol{V}_1+a_2\boldsymbol{V}_2 \tag{4.54}$$

仍是一个有大小有方向的量,因而仍是实矢量,有简单的几何含义.然而从代数上讲可以用复数 c_1 和 c_2 为系数将矢量 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$ 叠加起来,这样得到的是一复矢量

$$\boldsymbol{V}=c_1\boldsymbol{V}_1+c_2\boldsymbol{V}_2, \tag{4.55}$$

或称为定义在复数域上的矢量.这种以代数方式定义的复矢量就不能简单地称为有大小有方向的量,它有更丰富的含义.有直接物理意义的矢量,如$\mathscr{E}$、$\mathscr{B}$、A、…等,当然都是实矢量,就像有直接物理意义的数都是实数一样.但在数学演绎中引进复数和复矢量常常是很方便的.在傅里叶展开(4.40)和(4.48)中已引进了平面波的复表示 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$.现在引进复单位偏振矢量 $\boldsymbol{e}_1$和 $\boldsymbol{e}_2$.正交关系(4.53)可推广为

$$\boldsymbol{e}_i^*(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}_{i'}(\boldsymbol{k})=\delta_{ii'}=\begin{cases}1, & \text{若 } i=i',\\ 0, & \text{若 } i\neq i',\end{cases}\qquad i,i'=1,2. \tag{4.56}$$

在 $\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k})$为实矢量时此式还原为(4.53). $-\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 同在一条直线上,垂直 $-\boldsymbol{k}$ 的平面就是垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的平面. $\boldsymbol{e}_i(-\boldsymbol{k})$可用 $\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{k})$和 $\boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{k})$展开.就令

$$\boldsymbol{e}_i(-\boldsymbol{k})=\boldsymbol{e}_i^*(\boldsymbol{k}). \tag{4.57}$$

有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_i^*(-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}_{i'}(-\boldsymbol{k})&=\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}_{i'}^*(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{e}_{i'}^*(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k})\\ &=\delta_{i'i}=\begin{cases}1, & \text{若 } i'=i,\\ 0, & \text{若 } i'\neq i,\end{cases}\qquad i',i=1,2,\end{aligned} \tag{4.58}$$

表明这样定义的偏振矢量 $\boldsymbol{e}_1(-\boldsymbol{k})$和 $\boldsymbol{e}_2(-\boldsymbol{k})$也是一组正交的单位偏振矢量.(4.57)与(4.56)或(4.58)定义了 $\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k})$和 $\boldsymbol{e}_{i'}(-\boldsymbol{k})$的关系

$$\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}_{i'}(-\boldsymbol{k})=\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}_{i'}^*(\boldsymbol{k})=\delta_{i'i}. \tag{4.59}$$

代回(4.51)得

$$\int\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}\mathscr{V}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{i=1}^{2}\dot{q}_i(\boldsymbol{k},t)\dot{q}_i(-\boldsymbol{k},t)\mathrm{d}^3k. \tag{4.60}$$

类似地有

$$\begin{aligned}\int(\nabla\times\boldsymbol{A})^2\mathrm{d}\mathscr{V}=&-\frac{1}{(2\pi)^6}\int\mathrm{d}^3k\int\mathrm{d}^3k'\sum_{i,i'=1}^{2}q_i(\boldsymbol{k},t)q_{i'}(\boldsymbol{k}',t)(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k}))\\ &\cdot(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{e}_{i'}(\boldsymbol{k}'))\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\mathscr{V}\\ =&\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3k\sum_{i,i'=1}^{2}q_i(\boldsymbol{k},t)q_{i'}(-\boldsymbol{k},t)(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k}))\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_{i'}(-\boldsymbol{k})).\end{aligned}$$

由于

$$(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k}))\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_{i'}(-\boldsymbol{k}))=\boldsymbol{k}\cdot[\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k})\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_{i'}(-\boldsymbol{k}))]$$
$$=k^2\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}_{i'}^*(\boldsymbol{k})=k^2\delta_{ii'},$$
$$\int(\nabla\times\boldsymbol{A})^2\mathrm{d}\mathscr{V}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{i=1}^{2}k^2q_i(\boldsymbol{k},t)q_i(-\boldsymbol{k},t)\mathrm{d}^3k. \tag{4.61}$$

还有

$$\int\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{t}}\mathrm{d}\mathscr{V}=\frac{1}{(2\pi)^6}\int\mathrm{d}^3k\int\mathrm{d}^3k'\sum_{i,i'=1}^{2}q_i(\boldsymbol{k},t)j_{i'}(\boldsymbol{k}',t)\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}_{i'}(\boldsymbol{k}')\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\mathscr{V}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3k\sum_{i,i'=1}^{2}q_i(\boldsymbol{k},t)j_{i'}(-\boldsymbol{k},t)\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}_{i'}(-\boldsymbol{k})$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{i=1}^{2}q_i(\boldsymbol{k},t)j_i(-\boldsymbol{k},t)\mathrm{d}^3k. \tag{4.62}$$

将(4.60)～(4.62)代入(4.31)得电磁场的拉格朗日量

$$L=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{\epsilon}{2}[\dot{q}_i(\boldsymbol{k},t)\dot{q}_i(-\boldsymbol{k},t)-\omega^2q_i(\boldsymbol{k},t)q_i(-\boldsymbol{k},t)]\right.$$
$$\left.+q_i(\boldsymbol{k},t)j_i(-\boldsymbol{k},t)\right\}\mathrm{d}^3k-\frac{1}{2}\iint\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)\rho(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi\epsilon|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}\mathrm{d}\mathscr{V}', \tag{4.63}$$

其中

$$\omega\equiv uk \tag{4.64}$$

为具波矢 $\boldsymbol{k}$ 的平面电磁波的角频率,波速 u 由(1.87)定义.广义坐标$[q_i(-\boldsymbol{k},t)]$的变更引起的作用量的变分为

$$\delta S=\int\delta L\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3k\sum_{i=1}^{2}\{\epsilon[\dot{q}_i(\boldsymbol{k},t)\delta\dot{q}_i(-\boldsymbol{k},t)-\omega^2q_i(\boldsymbol{k},t)\delta q_i(-\boldsymbol{k},t)]$$
$$+j_i(\boldsymbol{k},t)\delta q_i(-\boldsymbol{k},t)\}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3k\sum_{i=1}^{2}\{-\epsilon[\ddot{q}_i(\boldsymbol{k},t)+\omega^2q_i(\boldsymbol{k},t)]$$
$$+j_i(\boldsymbol{k},t)\}\delta q_i(-\boldsymbol{k},t). \tag{4.65}$$

在第三等号处作了部分积分,积出部分由于始末时刻广义坐标变分为零而为零.由于 $q_i(-\boldsymbol{k},t)$的变分不受任何限制,电磁场的运动方程按哈密顿原理(4.12)可表示为

$$\ddot{q}_i(\boldsymbol{k},t)+\omega^2q_i(\boldsymbol{k},t)=\frac{1}{\epsilon}j_i(\boldsymbol{k},t). \tag{4.66}$$

在这一形式里各自由度(由 $\boldsymbol{k}$ 与 i 表示)的运动方程分离了变量,每一自由度都在强迫力$\frac{1}{\epsilon}j_i(\boldsymbol{k},t)$作用下作强迫振动.强迫振动方程(4.66)有解析解.将它的解代

回(4.40),利用(4.48)可验证这样得到的矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$满足波方程(4.23).实际上将傅里叶展开式(4.40)和(4.48)代入波方程(4.23)便可直接得到傅里叶系数的方程(4.66).

在实际问题中要求的是波方程(4.23)的特解,其中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$是实的且满足一定边条件.(4.23)的通解恒可表为它的任一特解和它的齐次方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=0 \tag{4.67}$$

的通解的线性组合.所要求的(4.23)的那个特解可表为随意求得的它的一个特解与特别挑选的(4.67)的一个特解的线性组合,一切条件均加在(4.67)的这个特解上.例如要求它抵消掉(4.23)原来特解中的虚部并使叠加所得满足给定的边条件.由于 $\boldsymbol{j}_t$ 是实的,若(4.23)原来的特解是复的,

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\mathrm{i}\boldsymbol{A}_2,$$

$\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 均为实矢量,代入(4.23)并要求左右两边的实部和虚部分别相等,得

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{A}_1-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}_1}{\partial t^2}&=-\mu\boldsymbol{j}_t,\\ \nabla^2\boldsymbol{A}_2-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}_2}{\partial t^2}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{4.68}$$

虚部 $\boldsymbol{A}_2$ 满足齐次方程(4.67),因此可由其特解抵消.至于边条件,将(4.23)原来特解在边界上的值和微商从边条件中扣除后便得齐次方程(4.67)的解的边条件.

这一切自然都可在广义坐标系$[q_i(\boldsymbol{k},t)]$中实现.现要求的是(4.66)的一个特解,它要使 $\boldsymbol{A}$ 为实矢量且满足给定的边条件.(4.66)的通解也可表为它的任一特解与它的齐次方程

$$\ddot{q}_i(\boldsymbol{k},t)+\omega^2 q_i(\boldsymbol{k},t)=0 \tag{4.69}$$

的通解的线性组合.所要求的(4.66)的那个特解便可表为随意求得的它的一个特解与特别挑选的(4.69)的一个特解的线性组合.一切条件均加在(4.69)的这个特解上.将(4.47)代入(4.40)后在两边取复共轭得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{r},t)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{i=1}^{2}q_i^*(\boldsymbol{k},t)\boldsymbol{e}_i^*(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3k\\ &=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{i=1}^{2}q_i^*(\boldsymbol{k},t)\boldsymbol{e}_i(-\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3k\\ &=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{i=1}^{2}q_i^*(-\boldsymbol{k},t)\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3k.\end{aligned} \tag{4.70}$$

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$为实矢量意即 $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$,由此式知

$$q_i^*(\boldsymbol{k},t)=q_i(-\boldsymbol{k},t). \tag{4.71}$$

同理,$\boldsymbol{j}_t$ 为实矢量要求

$$j_i^*(\boldsymbol{k},t)=j_i(-\boldsymbol{k},t). \tag{4.72}$$

此式保证(4.66)有满足实条件(4.71)的解.将此二式代入(4.63)得

$$L = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{\epsilon}{2}\left[\dot{q}_i^*(\boldsymbol{k},t)\dot{q}_i(\boldsymbol{k},t) - \omega^2 q_i^*(\boldsymbol{k},t)q_i(\boldsymbol{k},t)\right] + j_i^*(\boldsymbol{k},t)q_i(\boldsymbol{k},t)\right\}\mathrm{d}^3k - \frac{1}{2}\iint \frac{\rho(\boldsymbol{r},t)\rho(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi\epsilon\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}\mathrm{d}\mathscr{V}'. \tag{4.73}$$

§4.3　电磁场的哈密顿量与电磁能量

作广义坐标变换

$$\xi_i(\boldsymbol{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}q_i(\boldsymbol{k},t). \tag{4.74}$$

相应的广义速度为

$$\dot{\xi}_i(\boldsymbol{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\dot{q}_i(\boldsymbol{k},t). \tag{4.75}$$

拉格朗日量(4.63)用它们表出为

$$L = \int \sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{\epsilon}{2}\left[\dot{\xi}_i(\boldsymbol{k},t)\dot{\xi}_i(-\boldsymbol{k},t) - \omega^2\xi_i(\boldsymbol{k},t)\xi_i(-\boldsymbol{k},t)\right] + \xi_i(\boldsymbol{k},t)\iota_i(-\boldsymbol{k},t)\right\}\mathrm{d}^3k - \frac{1}{2}\iint \frac{\rho(\boldsymbol{r},t)\rho(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi\epsilon\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}\mathrm{d}\mathscr{V}', \tag{4.76}$$

其中

$$\iota_i(\boldsymbol{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}j_i(\boldsymbol{k},t). \tag{4.77}$$

在每一固定时刻将 $\dot{\xi}_i(\boldsymbol{k},t)$和 $\xi_i(\boldsymbol{k},t)$当作彼此独立的变量.由变分 $\delta\dot{\xi}_i(\boldsymbol{k},t)$引起 L 的变分

$$\delta L = \int \sum_{i=1}^{2}\epsilon\dot{\xi}_i(-\boldsymbol{k},t)\delta\dot{\xi}_i(\boldsymbol{k},t)\mathrm{d}^3k. \tag{4.78}$$

因此得变分商

$$\frac{\delta L}{\delta\dot{\xi}_i(\boldsymbol{k},t)} = \epsilon\dot{\xi}_i(-\boldsymbol{k},t). \tag{4.79}$$

同理可得

$$\frac{\delta L}{\delta\xi_i(\boldsymbol{k},t)} = -\epsilon\omega^2\xi_i(-\boldsymbol{k},t) + \iota_i(-\boldsymbol{k},t). \tag{4.80}$$

运动方程(4.66)可用这套坐标表为

$$\ddot{\xi}_i(\boldsymbol{k},t) + \omega^2\xi_i(\boldsymbol{k},t) = \frac{1}{\epsilon}\iota_i(\boldsymbol{k},t). \tag{4.81}$$

将 $\boldsymbol{k}$ 换成 $-\boldsymbol{k}$,利用(4.79)和(4.80)可将此式表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta L}{\delta\dot{\xi}_i(\boldsymbol{k},t)}-\frac{\delta L}{\delta\xi_i(\boldsymbol{k},t)}=0. \tag{4.82}$$

这是以连续变量 $\boldsymbol{k}$ 作坐标标号的拉格朗日方程.定义

$$\eta_i(\boldsymbol{k},t)\equiv\frac{\delta L}{\delta\dot{\xi}_i(\boldsymbol{k},t)} \tag{4.83}$$

为与广义坐标 $\xi_i(\boldsymbol{k},t)$正则共轭的广义动量.(4.79)表明

$$\eta_i(\boldsymbol{k},t)=\epsilon\dot{\xi}_i(-\boldsymbol{k},t). \tag{4.84}$$

构造哈密顿量

$$H=\int\sum_{i=1}^{2}\dot{\xi}_i(\boldsymbol{k},t)\eta_i(\boldsymbol{k},t)\mathrm{d}^3k-L$$

并将其中的广义速度 $\dot{\xi}_i$ 按(4.84)用 η_i 消去,得

$$\begin{aligned}H=&\int\sum_{i=1}^{2}\Big[\frac{1}{2\epsilon}\eta_i(\boldsymbol{k},t)\eta_i(-\boldsymbol{k},t)+\frac{\epsilon}{2}\omega^2\xi_i(\boldsymbol{k},t)\xi_i(-\boldsymbol{k},t)\\&-\xi_i(\boldsymbol{k},t)\iota_i(-\boldsymbol{k},t)\Big]\mathrm{d}^3k+\frac{1}{2}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)\rho(\boldsymbol{r}',t)}{4\pi\epsilon\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathcal{V}\mathrm{d}\mathcal{V}'.\end{aligned} \tag{4.85}$$

显然有

$$\frac{\delta H}{\delta\eta_i(\boldsymbol{k},t)}=\frac{1}{\epsilon}\eta_i(-\boldsymbol{k},t),$$

$$\frac{\delta H}{\delta\xi_i(\boldsymbol{k},t)}=\epsilon\omega^2\xi_i(-\boldsymbol{k},t)-\iota_i(-\boldsymbol{k},t).$$

由(4.84)、(4.81)和此二式知

$$\dot{\xi}_i(\boldsymbol{k},t)=\frac{\delta H}{\delta\eta_i(\boldsymbol{k},t)},\qquad\dot{\eta}_i(\boldsymbol{k},t)=-\frac{\delta H}{\delta\xi_i(\boldsymbol{k},t)}. \tag{4.86}$$

这正是电磁场的哈密顿正则方程.一个电磁场量 F 可以通过与广义坐标和广义动量的关系与时间有关,也可直接与时间有关.不通过广义坐标和广义动量而与时间直接有关称显含时间.这种与时间的显含关系用偏微商$\frac{\partial F}{\partial t}$表示.于是场量 F 对时间的全微商为

$$\begin{aligned}\dot{F}\equiv\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial F}{\partial t}+\int\sum_{i=1}^{2}\Big[\frac{\delta F}{\delta\xi_i(\boldsymbol{k},t)}\dot{\xi}_i(\boldsymbol{k},t)+\frac{\delta F}{\delta\eta_i(\boldsymbol{k},t)}\dot{\eta}_i(\boldsymbol{k},t)\Big]\mathrm{d}^3k\\&=\frac{\partial F}{\partial t}+\int\sum_{i=1}^{2}\Big[\frac{\delta F}{\delta\xi_i(\boldsymbol{k},t)}\frac{\delta H}{\delta\eta_i(\boldsymbol{k},t)}-\frac{\delta F}{\delta\eta_i(\boldsymbol{k},t)}\frac{\delta H}{\delta\xi_i(\boldsymbol{k},t)}\Big]\mathrm{d}^3k.\end{aligned}$$

定义

$$[F_1,F_2]\equiv\int\sum_{i=1}^{2}\Big[\frac{\delta F_1}{\delta\xi_i(\boldsymbol{k},t)}\frac{\delta F_2}{\delta\eta_i(\boldsymbol{k},t)}-\frac{\delta F_1}{\delta\eta_i(\boldsymbol{k},t)}\frac{\delta F_2}{\delta\xi_i(\boldsymbol{k},t)}\Big]\mathrm{d}^3k \tag{4.87}$$

为两个场量 F_1 和 F_2 的泊松括号,上式可表为

$$\dot{F}=\frac{\partial F}{\partial t}+[F,H]. \tag{4.88}$$

按定义(4.87),一个量与自己的泊松括号显然为零.可见$[H,H]=0$,

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{4.89}$$

哈密顿量只通过显含途径与时间有关,不显含时间的哈密顿量守恒,而这种守恒的哈密顿量便称为系统的能量.(4.85)表明,电磁场的哈密顿量只在电荷密度 ρ 和电流密度$\boldsymbol{j}$ 与时间有关的条件下显含时间.在电荷密度 ρ 和电流密度$\boldsymbol{j}$ 均不随时间变化的情形中电磁场的哈密顿量成为守恒能量.这就是电磁能,它包括电磁场能和电磁场与电荷电流分布的作用能.如果电荷电流分布随时间变化,就不存在单独守恒的电磁能.在此情况下要考虑电荷电流分布随时间变化的动力学,建立包括电磁场和电荷电流在内的总动力学系统的哈密顿量.在这个总系统为保守系,哈密顿量不显含时间的条件下,总系统的哈密顿量成为它的守恒能量.

设电荷电流分布不随时间变化,哈密顿量(4.85)成为守恒电磁能

$$E = \int \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{1}{2\epsilon} \eta_i(\boldsymbol{k},t)\eta_i(-\boldsymbol{k},t) + \frac{\epsilon}{2}\omega^2 \xi_i(\boldsymbol{k},t)\xi_i(-\boldsymbol{k},t) - \xi_i(\boldsymbol{k},t)\iota_i(-\boldsymbol{k}) \right] \mathrm{d}^3 k + \frac{1}{2}\iint \frac{\rho(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\epsilon\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|}\mathrm{d}\mathscr{V}\mathrm{d}\mathscr{V}'. \tag{4.90}$$

用(4.84)、(4.74)、(4.75)和(4.77)可将此式表为

$$E = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \sum_{i=1}^{2} \left\{ \frac{\epsilon}{2}\left[\dot{q}_i(\boldsymbol{k},t)\dot{q}_i(-\boldsymbol{k},t) + \omega^2 q_i(\boldsymbol{k},t) q_i(-\boldsymbol{k},t) \right] - q_i(\boldsymbol{k},t) j_i(-\boldsymbol{k}) \right\} \mathrm{d}^3 k + \frac{1}{2}\iint \frac{\rho(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\epsilon\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|}\mathrm{d}\mathscr{V}\mathrm{d}\mathscr{V}'. \tag{4.91}$$

再用(4.47)、(4.42)、(4.40)、(4.49)、(4.64)和(4.61)又可将它表为

$$E = \int \left\{ \frac{1}{2}\left[\epsilon \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{A})^2 \right] - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{t}} \right\} \mathrm{d}\mathscr{V} + \frac{1}{2}\iint \frac{\rho(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\epsilon\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|}\mathrm{d}\mathscr{V}\mathrm{d}\mathscr{V}'. \tag{4.92}$$

(1.126)表明库仑规范下静止电荷分布产生的标势不随时间变化,按(1.131)在此条件之下纵电流密度 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{l}}=0$,按(1.128)

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_{\mathrm{t}}. \tag{4.93}$$

将此式与(4.28)、(1.96)、(1.47)一起代入上式得

$$E = \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{\mathscr{E}}_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{\mathscr{D}}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{\mathscr{H}}\cdot\boldsymbol{\mathscr{B}})\mathrm{d}\mathscr{V} - \int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\mathscr{V} + \frac{1}{2}\iint \frac{\rho(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\epsilon\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|}\mathrm{d}\mathscr{V}\mathrm{d}\mathscr{V}', \tag{4.94}$$

其中$\boldsymbol{\mathscr{D}}_{\mathrm{t}}=\epsilon\boldsymbol{\mathscr{E}}_{\mathrm{t}}$为横电位移矢量.此式中的末项

$$E_{\mathrm{l}} \equiv \frac{1}{2}\iint \frac{\rho(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\epsilon\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|}\mathrm{d}\mathscr{V}\mathrm{d}\mathscr{V}' = \frac{1}{2}\int \phi(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \epsilon\phi(\boldsymbol{r})\nabla^2\phi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} = \frac{1}{2}\int \epsilon(\nabla\phi)^2\mathrm{d}\mathscr{V}$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathscr{E}_1\cdot\mathscr{D}_1\mathrm{d}\mathscr{V} \tag{4.95}$$

为纵场能量,其中$\mathscr{D}_1 = \epsilon\mathscr{E}_1$为纵电位移矢量.此式第三等号处将部分积分积得的无穷远处表面积分置零隐含了电荷只分布于有限区域的假定.而

$$\int \mathscr{E}_t\cdot\mathscr{E}_1\mathrm{d}\mathscr{V} = \int \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\nabla\phi\mathrm{d}\mathscr{V} = -\int \frac{\partial\nabla\cdot\boldsymbol{A}}{\partial t}\phi\mathrm{d}\mathscr{V} = 0 \tag{4.96}$$

第二等号处将部分积分积得的无穷远处表面积分置零则是由于周期性边条件.由此又可得

$$\int \mathscr{E}\cdot\mathscr{D}\mathrm{d}\mathscr{V} = \int(\mathscr{E}_t\cdot\mathscr{D}_t + \mathscr{E}_1\cdot\mathscr{D}_1 + 2\epsilon\mathscr{E}_t\cdot\mathscr{E}_1)\mathrm{d}\mathscr{V}$$

$$= \int(\mathscr{E}_t\cdot\mathscr{D}_t + \mathscr{E}_1\cdot\mathscr{D}_1)\mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{4.97}$$

由此式和(4.95)可将(4.94)改写为

$$E = \frac{1}{2}\int(\mathscr{E}\cdot\mathscr{D} + \mathscr{H}\cdot\mathscr{B})\mathrm{d}\mathscr{V} - \int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{4.98}$$

它表明电磁能包括电磁场能,即右边第一项,和电磁矢势与电流密度的相互作用能,即右边第二项.值得注意的是电场能$\frac{1}{2}\int \mathscr{E}\cdot\mathscr{D}\mathrm{d}\mathscr{V}$中已含电场与电荷的作用能,这就是其中的纵场能(4.95).在静电问题中 $\boldsymbol{A}$ 与时间无关,$\mathscr{E}_t = 0$,纵场能 E_1 就是静电能.这正是§2.4 讨论静电能和静电作用的出发点.而磁场能$\frac{1}{2}\int \mathscr{H}\cdot\mathscr{B}\mathrm{d}\mathscr{V}$却不是磁能的全部,在它之外还有磁作用能 $-\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}\mathscr{V}$.在静磁条件下可用(3.1)第二式将此二项合并为磁能

$$E_m \equiv \frac{1}{2}\int \mathscr{H}\cdot\mathscr{B}\mathrm{d}\mathscr{V} - \int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}\mathscr{V}$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathscr{H}\cdot\mathscr{B}\mathrm{d}\mathscr{V} - \int \boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\mathscr{H}\mathrm{d}\mathscr{V}$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathscr{H}\cdot\mathscr{B}\mathrm{d}\mathscr{V} - \int(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathscr{H}\mathrm{d}\mathscr{V}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \mathscr{H}\cdot\mathscr{B}\mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{4.99}$$

与磁场能恰反号.第二等号处将部分积分积得的无穷远处表面积分置零隐含了产生磁场的电流只分布在有限区域的假定.此式也可表为

$$\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}\mathscr{V} = \int \mathscr{H}\cdot\mathscr{B}\mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{4.100}$$

$$E_m = -\frac{1}{2}\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{4.101}$$

有了此式便可模仿§2.4推导静电作用能的办法推导静磁作用能.设有两个彼此分开的电流密度分布 $\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{r})$ 和 $\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})$,它们分别产生矢势 $\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r})$ 和 $\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r})$.对由它们组成的总系统而言,电流密度矢量和矢势分别为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r}), \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r}). \end{aligned}\right\} \tag{4.102}$$

有磁能

$$E_{\mathrm{m}} = -\frac{1}{2}\int \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\mathscr{V} = E_1 + E_2 + V, \tag{4.103}$$

$$E_1 = -\frac{1}{2}\int \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{j}_1\,\mathrm{d}\mathscr{V}, \qquad E_2 = -\frac{1}{2}\int \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{j}_2\,\mathrm{d}\mathscr{V} \tag{4.104}$$

$$V = -\frac{1}{2}\int \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{j}_2\,\mathrm{d}\mathscr{V} - \frac{1}{2}\int \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{j}_1\,\mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{4.105}$$

从总磁能 E_{m} 中扣除两个电流分布各自的磁能 E_1 和 E_2 后剩下的 V 便是两个电流分布的相互作用磁能.利用(3.21)并作两次部分积分,将积出的无穷远处表面积分置零后得

$$\begin{aligned} \int \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{j}_2\,\mathrm{d}\mathscr{V} &= -\frac{1}{\mu}\int \boldsymbol{A}_1 \cdot \nabla^2 \boldsymbol{A}_2\,\mathrm{d}\mathscr{V} = -\frac{1}{\mu}\int (\nabla^2 \boldsymbol{A}_1) \cdot \boldsymbol{A}_2\,\mathrm{d}\mathscr{V} \\ &= \int \boldsymbol{j}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2\,\mathrm{d}\mathscr{V}. \end{aligned} \tag{4.106}$$

可见

$$V = -\int \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{j}_2\,\mathrm{d}\mathscr{V} = -\int \boldsymbol{j}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2\,\mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{4.107}$$

为简化书写,略去下标 1 和 2,将此式表为

$$V = -\int \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{4.108}$$

只要将它理解为一个电流密度分布 $\boldsymbol{j}$ 与另一个电流分布产生的静磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 的作用能即可.对 $\boldsymbol{j}$ 而言 $\boldsymbol{A}$ 表示的是外磁场.若 $\boldsymbol{j}$ 分布在一无穷小区域内,形成一电流强度为 I 的电流圈,则

$$V = -I\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -I\int_s \mathscr{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\mathscr{B} \cdot \mathscr{M}, \tag{4.109}$$

其中

$$\mathscr{M} = I\boldsymbol{s} \tag{4.110}$$

为电流分布的磁偶极矩,$\boldsymbol{s}$ 为电流包围的无穷小面积矢量.(4.109)正是(3.54).

这三节的分析展示了电磁场的动力学与力学系统的动力学的一致.这种一致表现了自然规律的统一与和谐,使人们可以从一统一的高度俯视各具体领域的具体规律与现象,并可借用一个领域已发展成熟的方法处理另一领域中的问题.

§4.4 广义洛伦兹规范,波动方程与亥姆霍兹[①]方程,格林函数,推迟势与超前势,电磁波辐射

称条件(1.108)规定的规范为广义洛伦兹规范,其中电磁场的动力学表现为波动方程

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon}\rho, \tag{4.111}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu\boldsymbol{j}, \tag{4.112}$$

这就是(1.109)和(1.110),总共有四个分量方程.它们显然是彼此独立的,可分别求解.用 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$表未知函数$(\phi,\boldsymbol{A})$中的任一分量,$\Xi(\boldsymbol{r},t)$表源$\left(\frac{\rho}{\epsilon},\mu\boldsymbol{j}\right)$中的相应分量,这四个分量方程可统一写为

$$\nabla^2\Psi(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\Psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = -\Xi(\boldsymbol{r},t). \tag{4.113}$$

这便是波动方程的一般形式.为解此方程先作傅里叶分解

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\psi(\omega,\boldsymbol{r})\mathrm{d}\omega, \tag{4.114}$$

$$\Xi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\xi(\omega,\boldsymbol{r})\mathrm{d}\omega. \tag{4.115}$$

代入(4.21)得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}[\nabla^2\psi(\omega,\boldsymbol{r}) + k^2\psi(\omega,\boldsymbol{r})]\mathrm{d}\omega = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\xi(\omega,\boldsymbol{r})\mathrm{d}\omega, \tag{4.116}$$

其中

$$k = \frac{\omega}{u}. \tag{4.117}$$

由于对不同 ω,$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$作为 t 的函数彼此线性无关,对每一角频率 ω 上式都给出

$$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r}) + k^2\psi(\boldsymbol{r}) = -\xi(\boldsymbol{r}). \tag{4.118}$$

在此式中 ω 既一定就没有必要标明它是 ψ 和 ξ 的一个自变量.(4.118)是非齐次亥姆霍兹方程,在这里它是具有一定频率的波方程,$\psi(\boldsymbol{r})$为未知场函数,$\xi(\boldsymbol{r})$为给定源函数.为解此方程先求它的格林函数 $g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$,即解点源的亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + k^2 g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{4.119}$$

由于平移对称,实际只需解 $\boldsymbol{r}'=0$ 的情形,即解原点处点源的亥姆霍兹方程

---

① Helmholtz.

$$\nabla^2 g(\boldsymbol{r}) + k^2 g(\boldsymbol{r}) = -\delta(\boldsymbol{r}). \tag{4.120}$$

由泊松方程的格林函数(2.28)可猜测此处的格林函数.例如可猜测

$$g(\boldsymbol{r}) = \frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r}. \tag{4.121}$$

按莱布尼茨①规则

$$\nabla^2 \frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r} = e^{\pm ikr}\nabla^2 \frac{1}{4\pi r} + 2(\nabla e^{\pm ikr})\cdot\left(\nabla \frac{1}{4\pi r}\right) + \frac{1}{4\pi r}\nabla^2 e^{\pm ikr}, \tag{4.122}$$

其中

$$e^{\pm ikr}\nabla^2 \frac{1}{4\pi r} = -e^{\pm ikr}\delta(\boldsymbol{r}) = -\delta(\boldsymbol{r}), \tag{4.123}$$

$$2(\nabla e^{\pm ikr})\cdot\left(\nabla \frac{1}{4\pi r}\right) = \mp 2ik\frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r^2}, \tag{4.124}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi r}\nabla^2 e^{\pm ikr} &= \frac{1}{4\pi r}\nabla\cdot\left[(\pm ik)e^{\pm ikr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right] \\ &= -k^2\frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r} \pm 2ik\frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r^2}.\end{aligned} \tag{4.125}$$

可见

$$\nabla^2 \frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r} = -\delta(\boldsymbol{r}) - k^2\frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r}, \tag{4.126}$$

(4.121)定义的 $g(\boldsymbol{r})$确实是(4.120)的解.这样便找到了非齐次亥姆霍兹方程(4.118)的两个线性独立的格林函数

$$g_+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{4.127}$$

和

$$g_-(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{4.128}$$

它们都满足(4.119),即

$$\nabla^2 g_\pm(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + k^2 g_\pm(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{4.129}$$

方程(4.118)便也有两个线性独立的解

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = \int \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\xi(\boldsymbol{r}')d\mathscr{V}', \tag{4.130}$$

$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = \int \frac{e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\xi(\boldsymbol{r}')d\mathscr{V}'. \tag{4.131}$$

对 $\boldsymbol{r}'$的体积分遍及源$\xi(\boldsymbol{r}')$非零的空间.将 $\psi_+(\boldsymbol{r})$代入(4.114)右边的 $\psi(\omega,\boldsymbol{r})$并将其中的 $\xi(\boldsymbol{r})$重新写为 $\xi(\omega,\boldsymbol{r})$,用(4.115)和(4.117)得

$$\Psi_+(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int\frac{d\mathscr{V}'}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}\right)}\xi(\omega,\boldsymbol{r}')d\omega$$

① Leibniz.

$$=\int \frac{\Xi\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}\right)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}'. \tag{4.132}$$

它满足波动方程(4.113),即

$$\nabla^2\Psi_+(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\Psi_+(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=-\Xi(\boldsymbol{r},t). \tag{4.133}$$

在这个解中 $\boldsymbol{r}$ 点 t 时刻的场值与 $\boldsymbol{r}'$ 点 $t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}$ 时刻的源值相联系,表明源的讯号以速度 u 从 $\boldsymbol{r}'$ 点传到 $\boldsymbol{r}$ 点.结果的时刻比原因的时刻迟了一段时间 $\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}$,这个解 $\Psi_+(\boldsymbol{r},t)$ 因而称为波动方程(4.113)的推迟解.在这里 Ξ 确实表示波源,是形成波的原因,而波 Ψ 的出现则是结果.将 $\psi_-(\boldsymbol{r})$ 代入(4.114)右边的 $\psi(\omega,\boldsymbol{r})$ 并将其中的 $\xi(r)$ 重新写为 $\xi(\omega,\boldsymbol{r})$,用(4.115)和(4.117)得

$$\Psi_-(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}\mathscr{V}'}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}\right)}\xi(\omega,\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\omega$$

$$=\int \frac{\Xi\left(\boldsymbol{r}',t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}\right)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}'. \tag{4.134}$$

它也满足波动方程(4.113),即

$$\nabla^2\Psi_-(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\Psi_-(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=-\Xi(\boldsymbol{r},t). \tag{4.135}$$

在这个解中 $\boldsymbol{r}$ 点 t 时刻的场值与 $\boldsymbol{r}'$ 点 $t'=t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}$ 时刻的"源"值相联系.$t'>t$ 表示较早的场与较晚的"源"相联系,可见场是因,"源"是果,场讯号以速度 u 从 $\boldsymbol{r}$ 点传到"源"所在的 $\boldsymbol{r}'$ 点."源"在这里是场的吸收体而不是发射体,可以理解为负源.这就是在这个源字上加引号的缘故.这一因果联系中场既在先,$\Psi_-(\boldsymbol{r},t)$ 便称为波动方程(4.113)的超前解.超前解表示波的吸收过程.固定波源分布及其随时间变化的条件下,波动方程的超前解表示达到给定吸收效果所需要的波场分布及其随时间的变化.实际中提的不是这种问题,超前解便派不上用场.相反,推迟解表示给定波源产生的波场,正是实际中要解决的问题.推迟解便常被用到.

回到电磁场问题.波动方程(4.111)、(4.112)的推迟解为

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon}\int\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}', \tag{4.136}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}', \tag{4.137}$$

称为推迟势.由于经常用的就是推迟势,下标'+'已省去.(4.111)、(4.112)还有超前解

$$\phi_-(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon}\int\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}',t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}', \tag{4.138}$$

$$\boldsymbol{A}_-(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}',t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}', \tag{4.139}$$

称为超前势,不过很少用到.用分部积分,可从连续性方程(1.31)和关系(1.87)证明,无论推迟势(4.136)、(4.137)还是超前势(4.138)、(4.139),都满足广义洛伦兹规范条件(1.108).考虑一个原先没有电磁场的空间.由于自然或人为的原因在其中激发起随时间变化的电荷电流分布.按(4.136)和(4.137),在这个电荷电流分布的周围会产生随时间变化的标势 $\phi(\boldsymbol{r},t)$ 和矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$,从而按(1.100)和(1.96)产生电场和磁场.这电磁场还会向四周以速度 u 扩展.由§1.4的分析知,在脱离电荷电流分布这个源后,电磁场自身将以波的形式传播.以速度 u 向四周扩展的乃是电荷电流分布这个源发射的电磁波.这就是电磁波的辐射.人们总在离波源很远的地方考察电磁波.考察的位置与波源的距离比波源本身的尺度大得多,可视为无穷远.或者说波源在考察处看来可视为一无穷小区域,乃致可当作点源.这使(4.136)和(4.137)右边被积函数非零的区域中 $r'\ll r$,从而

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{r^2+r'^2-2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}=r\sqrt{1-2\frac{\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}'}{r}+\frac{r'^2}{r^2}}$$
$$\approx r-\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}'\approx r, \tag{4.140}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0\equiv\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 为 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量.(4.136)和(4.137)分别成为

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon r}\int\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{r-\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}'}{u}\right)\mathrm{d}\mathscr{V}', \tag{4.141}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu}{4\pi r}\int\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{r-\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}'}{u}\right)\mathrm{d}\mathscr{V}', \tag{4.142}$$

它们在无穷远处趋于零.以波源为心作一半径 $r\to\infty$ 的球面.定义单位时间流出此球面的电磁波能量为单位时间波源辐射的电磁波能量.它应等于(1.233)定义的坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$ 在此球面上的面积分

$$\mathscr{I}\equiv\oint\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\oint\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{r}_0\mathrm{d}s, \tag{4.143}$$

称为辐射强度.$r\to\infty$ 的球表面积以 r^2 的方式趋于无穷,(1.233)表明只有 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{H}$ 中 $\frac{1}{r}$ 的一次幂项对 $\mathscr{I}$ 有非零贡献,$\frac{1}{r}$ 的任何高次幂项对 $\mathscr{I}$ 的贡献为零.另一方面,按(1.100)

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{r},t)=\mathscr{E}_1(\boldsymbol{r},t)+\mathscr{E}_2(\boldsymbol{r},t), \tag{4.144}$$

$$\mathscr{E}_1=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}, \tag{4.145}$$

$$\mathscr{E}_2 = -\nabla\phi. \tag{4.146}$$

在无穷远处，到$\frac{1}{r}$的一次幂

$$\mathscr{E}_2(\boldsymbol{r},t) = \frac{\boldsymbol{r}_0}{4\pi\epsilon u r}\int\dot{\rho}\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{r-\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}'}{u}\right)\mathrm{d}\mathscr{V}' \tag{4.147}$$

沿径向. 由(1.233)知它对 $\boldsymbol{S}$ 的贡献必垂直于径向，因而按(4.143)对 $\mathscr{I}$ 的贡献为零. 于是

$$\mathscr{I} = \oint\boldsymbol{S}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}, \tag{4.148}$$

$$\boldsymbol{S}_1 = \mathscr{E}_1\times\mathscr{H}. \tag{4.149}$$

$\boldsymbol{S}_1$ 只与矢势 $\boldsymbol{A}$ 有关，因而只与电流密度矢量 $\boldsymbol{j}$ 有关.

设电流密度矢量作角频率为 ω 的简谐振动，

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \boldsymbol{j}^*(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}. \tag{4.150}$$

为节省符号，将一个量和它的时间傅里叶展开系数用同一符号表示. 相应地将矢势写为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}. \tag{4.151}$$

将此二式分别代入(4.112)两边，得非齐次亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + k^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\mu\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}), \tag{4.152}$$

k 仍由(4.117)定义. 用推迟格林函数(4.127)得推迟解

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}'. \tag{4.153}$$

由(4.140)知它在无穷远处的渐近形式

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}', \tag{4.154}$$

其中

$$\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{r}_0. \tag{4.155}$$

将与矢势 $\boldsymbol{A}$ 相关的电场强度和磁场强度分别写为

$$\mathscr{E}_1(\boldsymbol{r},t) = \mathscr{E}_1(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathscr{E}_1^*(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{4.156}$$

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{r},t) = \mathscr{H}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathscr{H}^*(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}. \tag{4.157}$$

由(4.145)、(1.96)和(4.154)分别得无穷远处

$$\mathscr{E}_1(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\omega\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\frac{\mu\omega}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathscr{J}, \tag{4.158}$$

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\frac{k}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\boldsymbol{r}_0\times\mathscr{J}, \tag{4.159}$$

其中

$$\mathscr{J} \equiv \int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}' \tag{4.160}$$

为 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 的空间傅里叶分解系数. 将(4.156)和(4.157)代回(4.149),再将所得 $\boldsymbol{S}_1$ 代回(4.148)得

$$
\begin{aligned}
\mathscr{I} = & \oint [\mathscr{E}_1(\boldsymbol{r}) \times \mathscr{H}(\boldsymbol{r})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t} + \oint [\mathscr{E}_1(\boldsymbol{r}) \times \mathscr{H}^*(\boldsymbol{r})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\
& + \oint [\mathscr{E}_1^*(\boldsymbol{r}) \times \mathscr{H}(\boldsymbol{r})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \oint [\mathscr{E}_1^*(\boldsymbol{r}) \times \mathscr{H}^*(\boldsymbol{r})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t},
\end{aligned}
\tag{4.161}
$$

积分在以源为心的无穷大球表面上进行. 此式右边首末两项含随时间简谐变化的因子,时间平均为零. 时间平均辐射强度遂为

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathscr{I}} &= \oint [\mathscr{E}_1(\boldsymbol{r}) \times \mathscr{H}^*(\boldsymbol{r}) + \mathscr{E}_1^*(\boldsymbol{r}) \times \mathscr{H}(\boldsymbol{r})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\
&= \frac{\mu\omega k}{(4\pi r)^2} \oint [\mathscr{J} \times (\boldsymbol{r}_0 \times \mathscr{J}^*) + \mathscr{J}^* \times (\boldsymbol{r}_0 \times \mathscr{J})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\
&= \frac{\mu\omega k}{(4\pi r)^2} \oint [2\mathscr{J}^* \cdot \mathscr{J} \boldsymbol{r}_0 - (\mathscr{J} \cdot \boldsymbol{r}_0)\mathscr{J}^* - (\mathscr{J}^* \cdot \boldsymbol{r}_0)\mathscr{J}] \cdot \boldsymbol{r}_0 \mathrm{d}s \\
&= \frac{2\mu\omega k}{(4\pi)^2} \int_{4\pi} (|\mathscr{J}|^2 - |\mathscr{J} \cdot \boldsymbol{r}_0|^2) \mathrm{d}\Omega,
\end{aligned}
\tag{4.162}
$$

其中用到 $\mathrm{d}s = r^2 \mathrm{d}\Omega$, $\mathrm{d}\Omega$ 为立体角元,最右边要做的是一个 4π 立体角积分. 为做出这个积分要知道 $\mathscr{J}$ 与方位角的关系,它表现在(4.160)积分号下的 $\boldsymbol{k}$ 中,按(4.155),它与 $\boldsymbol{r}_0$ 有关.

§4.5 电偶极辐射,磁偶极辐射,电四极辐射,电磁辐射的多极分类

(4.156)和(4.157)表明电磁波的频率就是波源振动的频率

$$
\nu = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{4.163}
$$

它的波长为

$$
\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{2\pi u}{\omega} = \frac{2\pi}{k}. \tag{4.164}
$$

(4.160)右边积分的区域实际只是 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 显著不为零的区域,即波源所占的空间. 若此区域的尺度 a_0 比波长小得多,

$$
a_0 \ll \lambda, \tag{4.165}
$$

则在积分区域内

$$
|\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}| \leqslant k a_0 \ll k\lambda = 2\pi.
$$

在长波极限下

$$
k a_0 \to 0, \tag{4.166}
$$

积分区域内便可置 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = 1$,从而有

$$\mathscr{J} = \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{4.167}$$

按(1.183)

$$\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\mathscr{V} = \int \rho(\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\mathscr{V} = \int \boldsymbol{v}\mathrm{d}q$$

$$= \int \dot{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \boldsymbol{r}\mathrm{d}q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \boldsymbol{r}\rho\mathrm{d}\mathscr{V} = \dot{\mathscr{P}}, \tag{4.168}$$

其中 $\mathrm{d}q \equiv \rho\mathrm{d}\mathscr{V}$ 为电荷元，$\boldsymbol{v}$ 为一固定电荷元的速度，$\boldsymbol{r}$ 则为此电荷元的径矢量.末一等号处用了电偶极矩$\mathscr{P}$的定义(2.47).在电荷电流系统作简谐振动的情况下电偶极矩也作简谐振动，

$$\mathscr{P}(t) = \mathscr{P}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathscr{P}^*(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{4.169}$$

$$\dot{\mathscr{P}}(t) = -\mathrm{i}\omega\mathscr{P}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{i}\omega\mathscr{P}^*(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}. \tag{4.170}$$

将(4.150)和此式分别代到(4.168)两边得

$$\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \int \boldsymbol{j}^*(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = -\mathrm{i}\omega\mathscr{P}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{i}\omega\mathscr{P}^*(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

可见

$$\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V} = -\mathrm{i}\omega\mathscr{P}(\omega). \tag{4.171}$$

代入(4.167)，再将所得的$\mathscr{J}$代入(4.162)得

$$\bar{\mathscr{I}} = \frac{2\mu\omega^4}{(4\pi)^2 u}\int_{4\pi}[\,|\mathscr{P}(\omega)|^2 - |\mathscr{P}(\omega)\cdot\boldsymbol{r}_0|^2]\mathrm{d}\Omega. \tag{4.172}$$

将复矢量分解为实部和虚部的叠加，

$$\mathscr{P}(\omega) \equiv \mathscr{P}_1 + \mathrm{i}\mathscr{P}_2, \tag{4.173}$$

$\mathscr{P}_1$与$\mathscr{P}_2$为实矢量.显然

$$|\mathscr{P}(\omega)|^2 = \mathscr{P}^*(\omega)\cdot\mathscr{P}(\omega) = \mathscr{P}_1^2 + \mathscr{P}_2^2, \tag{4.174}$$

$$|\mathscr{P}(\omega)\cdot\boldsymbol{r}_0|^2 = |\mathscr{P}_1\cdot\boldsymbol{r}_0 + \mathrm{i}\mathscr{P}_2\cdot\boldsymbol{r}_0|^2 = (\mathscr{P}_1\cdot\boldsymbol{r}_0)^2 + (\mathscr{P}_2\cdot\boldsymbol{r}_0)^2; \tag{4.175}$$

由于$\mathscr{P}(\omega)$只与波源有关而与所考察的方向 $\boldsymbol{r}_0$ 无关

$$\int_{4\pi}|\mathscr{P}(\omega)|^2\mathrm{d}\Omega = 4\pi|\mathscr{P}(\omega)|^2, \tag{4.176}$$

$$\left.\begin{aligned}\int_{4\pi}(\mathscr{P}_1\cdot\boldsymbol{r}_0)^2\mathrm{d}\Omega &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathscr{P}_1^2\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{4\pi}{3}\mathscr{P}_1^2,\\ \int_{4\pi}(\mathscr{P}_2\cdot\boldsymbol{r}_0)^2\mathrm{d}\Omega &= \frac{4\pi}{3}\mathscr{P}_2^2\end{aligned}\right\} \tag{4.177}$$

$$\int_{4\pi}|\mathscr{P}(\omega)\cdot\boldsymbol{r}_0|^2\mathrm{d}\Omega = \frac{4\pi}{3}|\mathscr{P}(\omega)|^2, \tag{4.178}$$

因此

$$\bar{\mathscr{I}} = \frac{\mu\omega^4}{3\pi u}|\mathscr{P}(\omega)|^2 = \frac{\omega^4}{3\pi\epsilon u^3}|\mathscr{P}(\omega)|^2 = \frac{16\pi^3\nu^4}{3\epsilon u^3}|\mathscr{P}(\omega)|^2. \tag{4.179}$$

长波极限下时间平均辐射强度由电磁波源电偶极矩振动的傅里叶分量决定.这种辐射因而称为电偶极辐射.在真空中(4.179)成为

$$\bar{\mathscr{I}} = \frac{16\pi^3\nu^4}{3\epsilon_0 c^3} \mid \mathscr{P}(\omega) \mid^2. \tag{4.180}$$

将(4.173)代入(4.169)得

$$\mathscr{P}(t) = 2\,\mathscr{P}_1\cos(\omega t) + 2\,\mathscr{P}_2\sin(\omega t), \tag{4.181}$$

表明电偶极矩在$\mathscr{P}_1$与$\mathscr{P}_2$组成的平面内变化,这个平面称为波源的偏振平面.若$\mathscr{P}_1$与$\mathscr{P}_2$共线,必可将它们表为

$$\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_0\sin\delta, \qquad \mathscr{P}_2 = \mathscr{P}_0\cos\delta, \tag{4.182}$$

$\mathscr{P}_0$为常实矢量,δ为实常数.代入(4.181)

$$\mathscr{P}(t) = 2\,\mathscr{P}_0\sin(\omega t + \delta), \tag{4.183}$$

电偶极矩沿一直线方向作简谐振动,称为线偏振.若$\mathscr{P}_1$与$\mathscr{P}_2$不共线,$\mathscr{P}_2$沿反时针方向与$\mathscr{P}_1$的夹角$\beta \neq 0, \pi$,则可在波源偏振平面内任取互相垂直的两个方向作x轴和y轴,y轴沿反时针方向与x轴夹角90°.用α表示$\mathscr{P}_1$与x轴的夹角,电偶极矩(4.181)在此二轴上的投影分别为

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{P}_x(t) &= 2\mathscr{P}_1\cos\alpha\cos(\omega t) + 2\mathscr{P}_2\cos(\alpha+\beta)\sin(\omega t),\\ \mathscr{P}_y(t) &= 2\mathscr{P}_1\sin\alpha\cos(\omega t) + 2\mathscr{P}_2\sin(\alpha+\beta)\sin(\omega t).\end{aligned}\right\} \tag{4.184}$$

定义

$$\left.\begin{aligned}a\cos\delta_1 &\equiv 2\mathscr{P}_1\cos\alpha, \qquad a\sin\delta_1 \equiv -2\mathscr{P}_2\cos(\alpha+\beta),\\ b\sin\delta_2 &\equiv 2\mathscr{P}_1\sin\alpha, \qquad b\cos\delta_2 \equiv 2\mathscr{P}_2\sin(\alpha+\beta),\end{aligned}\right\} \tag{4.185}$$

可将(4.184)表为

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{P}_x(t) &= a\cos(\omega t + \delta_1),\\ \mathscr{P}_y(t) &= b\sin(\omega t + \delta_2).\end{aligned}\right\} \tag{4.186}$$

由(4.185)解得

$$\tan\delta_1 = -\frac{\mathscr{P}_2}{\mathscr{P}_1}\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}, \qquad \tan\delta_2 = \frac{\mathscr{P}_1}{\mathscr{P}_2}\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}. \tag{4.187}$$

要求

$$\tan\delta_1 = \tan\delta_2, \tag{4.188}$$

则有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathscr{P}_2}{\mathscr{P}_1}\right)^2 &= -\frac{\sin(2\alpha)}{\sin[2(\alpha+\beta)]} = -\frac{\sin(2\alpha)}{\sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \cos(2\alpha)\sin(2\beta)}\\ &= -\frac{\tan(2\alpha)}{\sin(2\beta) + \cos(2\beta)\tan(2\alpha)}.\end{aligned}$$

由此解得

$$\tan(2\alpha) = -\frac{\sin(2\beta)}{(\mathscr{P}_1/\mathscr{P}_2)^2 + \cos(2\beta)}. \tag{4.189}$$

此式规定了 α,从而规定了 x 轴相对$\mathscr{P}_1$的取向.按此规定取 x 轴可使(4.188)成立,在 $0\leqslant\delta_2-\delta_1<2\pi$ 的区间内给出相角关系 $\delta_2=\delta_1$ 或 $\delta_2=\delta_1+\pi$.(4.186)因而可写成

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{P}_x(t) &= a\cos(\omega t+\delta_1),\\ \mathscr{P}_y(t) &= b\sin(\omega t+\delta_1).\end{aligned}\right\}\tag{4.190}$$

在 $\delta_2=\delta_1+\pi$ 的情形中,此式的 b 与(4.186)的 b 反号.改变计时的起点,将 $t+\dfrac{\delta_1}{\omega}$ 改记为 t,此式又可改写为

$$\mathscr{P}_x(t) = a\cos(\omega t),\qquad \mathscr{P}_y(t) = b\sin(\omega t).\tag{4.191}$$

这表明可重新将$\mathscr{P}_1$和$\mathscr{P}_2$定义成互相垂直的矢量,令它们分别沿按上述规定选取的 x 轴和 y 轴,同时保持(4.181)成立.电偶极矩的傅里叶分量也可用这样重新定义的实矢量$\mathscr{P}_1$与$\mathscr{P}_2$按(4.173)表达.或者说它按(4.173)表达的实部$\mathscr{P}_1$和虚部$\mathscr{P}_2$可取为互相垂直的两个实矢量.对互相垂直的$\mathscr{P}_1$和$\mathscr{P}_2$(4.181)表示的电偶极矩矢量的末端描绘出一个半轴分别为 $2\mathscr{P}_1$ 和 $2\mathscr{P}_2$ 的椭圆,从$\mathscr{P}_1$方向转 90°到$\mathscr{P}_2$方向,再转 270°回到$\mathscr{P}_1$方向.这种电偶极振动称为椭圆偏振.对 $\mathscr{P}_1=\mathscr{P}_2$ 的情形则为圆偏振,若$\mathscr{P}_1$与$\mathscr{P}_2$中有一个为零则为线偏振.以下恒将(4.173)中的$\mathscr{P}_1$与$\mathscr{P}_2$取成互相垂直的矢量,其中一个可以为零.这便是最普遍的情形.

由(4.156)~(4.159),(4.167),(4.171)和(4.173)得电偶极辐射中

$$\mathscr{E}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu\omega^2}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}(\mathscr{P}_1+\mathrm{i}\mathscr{P}_2),\tag{4.192}$$

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{k\omega}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\boldsymbol{r}_0\times(\mathscr{P}_1+\mathrm{i}\mathscr{P}_2),\tag{4.193}$$

$$\mathscr{E}_1(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu\omega^2}{2\pi}\frac{1}{r}[\mathscr{P}_1\cos(kr-\omega t)-\mathscr{P}_2\sin(kr-\omega t)],\tag{4.194}$$

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{r},t) = \frac{k\omega}{2\pi}\frac{1}{r}[(\boldsymbol{r}_0\times\mathscr{P}_1)\cos(kr-\omega t)-(\boldsymbol{r}_0\times\mathscr{P}_2)\sin(kr-\omega t)].\tag{4.195}$$

它们表示的是球面波.但在无穷远处看,在尺度与趋于无穷大的 r 相比可以忽略的范围内,可将它们当作沿径向传播的平面波.由§1.4知,脱离波源自由传播的平面波为横波,电场强度与磁场强度均垂直于传播方向.在这里意即只有垂直于径向的电场强度与磁场强度才能沿径向传播.(4.193)和(4.195)表示的磁场强度已垂直于径向.(4.192)和(4.194)表示的电场强度中垂直径向的部分为

$$\mathscr{E}_\mathrm{t}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu\omega^2}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\{\mathscr{P}_1-\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{r}_0\cdot\mathscr{P}_1)+\mathrm{i}[\mathscr{P}_2-\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{r}_0\cdot\mathscr{P}_2)]\},\tag{4.196}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_\mathrm{t}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu\omega^2}{2\pi}\frac{1}{r}\{&[\mathscr{P}_1-\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{r}_0\cdot\mathscr{P}_1)]\cos(kr-\omega t)\\ &-[\mathscr{P}_2-\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{r}_0\cdot\mathscr{P}_2)]\sin(kr-\omega t)\},\end{aligned}\tag{4.197}$$

下标 t 表示这是垂直径向的横电场.(4.195)和(4.197)表示了无穷远处沿径向传播的电磁波的偏振情况.在空间一点看,电场强度和磁场强度均作椭圆偏振,在特殊情形中可蜕化为圆偏振或线偏振.

无穷远处沿径向传播的电磁波单位时间内向 $\mathrm{d}\Omega$ 立体角发出的能量为

$$\mathrm{d}\mathscr{I}=[\mathscr{E}_1(\boldsymbol{r},t)\times\mathscr{H}(\boldsymbol{r},t)]\cdot\boldsymbol{r}_0 r^2\mathrm{d}\Omega.$$

将(4.194)和(4.195)代入此式后在一周期中作时间平均.由

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos(kr-\omega t)\sin(kr-\omega t)\mathrm{d}t=0,$$

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos^2(kr-\omega t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\xi\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2},$$

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2(kr-\omega t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\xi\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2},$$

以及(4.174)和(4.175)得时间平均微分强度

$$\mathrm{d}\bar{\mathscr{I}}=\frac{2\omega^4}{(4\pi)^2\epsilon u^3}[|\mathscr{P}(\omega)|^2-|\mathscr{P}(\omega)\cdot\boldsymbol{r}_0|^2]\mathrm{d}\Omega. \tag{4.198}$$

它表示电偶极辐射中电磁波能量发射随方向的变化.与(4.172)比较知它的 4π 立体角积分就是时间平均辐射强度(4.179).

将(4.160)被积函数中的指数因子展成 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ 的幂级数,

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=1-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})^2}{2}+\cdots+\frac{(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})^n}{n!}+\cdots, \tag{4.199}$$

取到零次幂,$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\approx1$,便导致(4.167)及其以下的电偶极近似,直到上段的末尾.若波源尺度 a_0 与波长 λ 相比虽小却不可忽略,$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ 便不可忽略,要考虑(4.199)右边的非零次幂项.设取到一次幂,则(4.160)定义的$\mathscr{J}$中除(4.167)右边的积分外还要考虑一项

$$\begin{aligned}\mathscr{J}_1&\equiv-\mathrm{i}\int\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}\\&=-\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{k}\cdot\left[\int(\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}+\int(\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}\right].\end{aligned} \tag{4.200}$$

用电流密度矢量 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$代替它的时间傅里叶分解系数 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$,并用(1.183),类似(4.168)的推导得

$$\begin{aligned}\int(\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}&=\int(\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\mathscr{V}\\&=\int(\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{r}}+\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{r})\mathrm{d}q=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}\mathrm{d}q\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}\rho\mathrm{d}\mathscr{V}=2\dot{\boldsymbol{Q}},\end{aligned} \tag{4.201}$$

末一等号处用了电四极矩的定义(2.49).类似的推导还得到

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{k}\cdot\int(\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)-\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}=\frac{1}{2}\boldsymbol{k}\times\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{r}\mathrm{d}\mathscr{V}$$
$$=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\mathscr{M}},\tag{4.202}$$

末一等号处用了磁偶极矩的定义(3.32).一个作简谐振动的电荷电流分布,它的磁偶极矩和电四极矩必也作简谐振动,即有

$$\boldsymbol{\mathscr{M}}(t)=\boldsymbol{\mathscr{M}}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\boldsymbol{\mathscr{M}}^*(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\tag{4.203}$$

$$\boldsymbol{Q}(t)=\boldsymbol{Q}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\boldsymbol{Q}^*(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\tag{4.204}$$

$$\dot{\boldsymbol{Q}}(t)=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{Q}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{i}\omega\boldsymbol{Q}^*(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.\tag{4.205}$$

将(4.150)和此三式分别代入(4.201)和(4.202)的两边,注意时间 t 的函数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 与 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$彼此线性独立,比较 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$的系数得

$$\int(\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}=-2\mathrm{i}\omega\boldsymbol{Q}(\omega),\tag{4.206}$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{k}\cdot\int(\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r})\mathrm{d}\mathscr{V}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\mathscr{M}}(\omega).\tag{4.207}$$

代入(4.200)得

$$\boldsymbol{\mathscr{J}}_1=-\omega\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{Q}(\omega)+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\mathscr{M}}(\omega).\tag{4.208}$$

将此式代入(4.158)、(4.159)和(4.162)右边的$\boldsymbol{\mathscr{J}}$中会得到对发射到无穷远处的电磁波的电场强度、磁场强度和辐射强度的两项贡献及它们之间的干涉.其中与电四极矩 $\boldsymbol{Q}$ 有关的贡献称为电四极辐射,与磁偶极矩$\boldsymbol{\mathscr{M}}$有关的贡献称为磁偶极辐射.例如磁偶极辐射在无穷远处的电场强度和磁场强度的时间傅里叶分解系数分别为

$$\boldsymbol{\mathscr{E}}_1^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})=-\frac{\mu\omega k}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{\mathscr{M}}(\omega),\tag{4.209}$$

$$\boldsymbol{\mathscr{H}}^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})=\frac{\omega^2}{4\pi u^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}[\boldsymbol{\mathscr{M}}(\omega)-\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{\mathscr{M}}(\omega))],\tag{4.210}$$

推导中用了(4.155)和(4.117).作分解

$$\boldsymbol{\mathscr{M}}(\omega)=\boldsymbol{\mathscr{M}}_1+\mathrm{i}\boldsymbol{\mathscr{M}}_2,\tag{4.211}$$

$\boldsymbol{\mathscr{M}}_1$和$\boldsymbol{\mathscr{M}}_2$为实矢量.代入(4.203)得

$$\boldsymbol{\mathscr{M}}(t)=2\boldsymbol{\mathscr{M}}_1\cos(\omega t)+2\boldsymbol{\mathscr{M}}_2\sin(\omega t).\tag{4.212}$$

模仿(4.181)~(4.191)的讨论知,可令$\boldsymbol{\mathscr{M}}_1$与$\boldsymbol{\mathscr{M}}_2$彼此垂直.(4.212)表示的便是半轴分别为 $2\mathscr{M}_1$和 $2\mathscr{M}_2$的椭圆偏振.在 $\mathscr{M}_1=\mathscr{M}_2$的情形中为圆偏振,在 $\mathscr{M}_1$和 $\mathscr{M}_2$中有一个为零的条件下为线偏振.将(4.211)代入(4.209)和(4.210),再将得到的$\boldsymbol{\mathscr{E}}_1^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})$和$\boldsymbol{\mathscr{H}}^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})$分别代入(4.156)和(4.157)右边的$\boldsymbol{\mathscr{E}}_1(\boldsymbol{r})$ 和$\boldsymbol{\mathscr{H}}(\boldsymbol{r})$,得磁偶极辐射在无穷远处的电场强度和磁场强度

$$\boldsymbol{\mathscr{E}}_1^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\mu\omega k}{2\pi}\frac{1}{r}[(\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{\mathscr{M}}_1)\cos(kr-\omega t)-(\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{\mathscr{M}}_2)\sin(kr-\omega t)],\tag{4.213}$$

$$\boldsymbol{\mathscr{H}}^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\omega^2}{2\pi u^2}\frac{1}{r}\{[\boldsymbol{\mathscr{M}}_1-\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{\mathscr{M}}_1)]\cos(kr-\omega t)$$

$$-\left[\mathscr{M}_2-\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{r}_0\cdot\mathscr{M}_2)\right]\sin(kr-\omega t)\}. \tag{4.214}$$

由此可了解磁偶极辐射在各处的偏振情况.若电偶极矩和电四极矩皆为零,则到$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$的一次幂只有磁偶极辐射,可单独求它的辐射强度.无穷远处沿径向在 $\mathrm{d}\Omega$ 立体角内磁偶极辐射的微分强度,即单位时间内辐射到 $\mathrm{d}\Omega$ 立体角的电磁波能量为

$$\mathrm{d}\mathscr{I}^{(\mathrm{m})}=\left[\mathscr{E}_1^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r},t)\times\mathscr{H}^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r},t)\right]\cdot\boldsymbol{r}_0r^2\mathrm{d}\Omega. \tag{4.215}$$

将(4.213)和(4.214)代入并对时间平均,类似(4.198)的推导得磁偶极辐射的时间平均微分强度

$$\mathrm{d}\bar{\mathscr{I}}^{(\mathrm{m})}=\frac{2\mu\omega^4}{(4\pi)^2u^3}\left[|\mathscr{M}(\omega)|^2-|\mathscr{M}(\omega)\cdot\boldsymbol{r}_0|^2\right]\mathrm{d}\Omega. \tag{4.216}$$

它表示出磁偶极辐射能量随方向的变化.将它在 4π 立体角积分,由类似(4.173)~(4.178)的关系得磁偶极辐射的时间平均辐射强度

$$\bar{\mathscr{I}}^{(\mathrm{m})}=\frac{\mu\omega^4}{3\pi u^3}|\mathscr{M}(\omega)|^2=\frac{16\pi^3\mu\nu^4}{3u^3}|\mathscr{M}(\omega)|^2, \tag{4.217}$$

即经一周期平均的单位时间内磁偶极辐射能量.它与电偶极辐射强度的表达式(4.179)相似,只是用 μ 替换了 $\frac{1}{\epsilon}$,用$\mathscr{M}(\omega)$替换了$\mathscr{P}(\omega)$.在真空中此式成为

$$\bar{\mathscr{I}}^{(\mathrm{m})}=\frac{16\pi^3\mu_0\nu^4}{3c^3}|\mathscr{M}(\omega)|^2. \tag{4.218}$$

依此类推,可考虑展开式(4.199)中 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ 的任一次幂的贡献,并将这些贡献表成各种电多极矩和磁多极矩简谐振动发出的电磁波.一个数学展开式转化成了对电磁辐射按电、磁多极矩不同的振动模式的分类.这便是电磁辐射的多极分类.

§4.6 运动带电粒子的辐射,李纳-维谢尔[①]势

§1.6 曾用洛伦兹变换讨论过匀速运动带电粒子的电磁场.本节讨论任意运动带电粒子的电磁场.设带电粒子可视为质点,电荷为 q,轨道方程为 $\boldsymbol{\xi}(t)$.它的运动在空间形成的电荷电流密度分别为

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\xi}(t)), \tag{4.219}$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\xi}(t))\,\boldsymbol{v}(t), \tag{4.220}$$

其中$\boldsymbol{v}(t)\equiv\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)$为粒子的速度.将此二式代入(4.136)和(4.137)得带电粒子产生的标势和矢势

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon}\int\frac{\delta\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{\xi}\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}\right)\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}', \tag{4.221}$$

---

① Lienard-Wiechert.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu q}{4\pi}\int\frac{\delta\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{\xi}\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}\right)\right)\boldsymbol{v}\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}'. \quad (4.222)$$

积分号下的 δ 函数使积分可解析地做出.为此作变换

$$\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{\xi}\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}\right), \quad (4.223)$$

对一定的 $\boldsymbol{r}$ 和 t 以及一定的函数 $\boldsymbol{\xi}(t)$,这是一个从变量 $\boldsymbol{r}'$ 到变量 $\boldsymbol{\zeta}$ 的变换.在此变换下积分元的变换为

$$\mathrm{d}\mathscr{V}'\equiv\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3'=\left|\frac{\partial(x_1',x_2',x_3')}{\partial(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)}\right|\mathrm{d}\zeta_1\mathrm{d}\zeta_2\mathrm{d}\zeta_3, \quad (4.224)$$

其中 x_i' 和 ζ_i 分别为 $\boldsymbol{r}'$ 和 $\boldsymbol{\zeta}$ 的第 i 分量,

$$\frac{\partial(x_1',x_2',x_3')}{\partial(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)}\equiv\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1'}{\partial\zeta_1} & \frac{\partial x_1'}{\partial\zeta_2} & \frac{\partial x_1'}{\partial\zeta_3}\\ \frac{\partial x_2'}{\partial\zeta_1} & \frac{\partial x_2'}{\partial\zeta_2} & \frac{\partial x_2'}{\partial\zeta_3}\\ \frac{\partial x_3'}{\partial\zeta_1} & \frac{\partial x_3'}{\partial\zeta_2} & \frac{\partial x_3'}{\partial\zeta_3}\end{vmatrix} \quad (4.225)$$

为变换的雅可比[1]行列式.被积函数中的因子 $\delta(\boldsymbol{\zeta})$ 将其他因子中的 $\boldsymbol{r}'$ 锁定在使 $\boldsymbol{\zeta}=0$ 的位置上,从而满足方程

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{\xi}\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}\right). \quad (4.226)$$

就用 $\boldsymbol{r}'$ 表示此方程的根.带电粒子在它所表示的位置上发出的电磁波 t 时刻恰到达观察位置 $\boldsymbol{r}$.设想一球面,球心在 $\boldsymbol{r}$ 处,半径由无穷大以速度 u 减小,t 时刻变成零,球面缩成 $\boldsymbol{r}$ 处的一点.在缩小的过程中球面在某处与带电粒子相遇,相遇处的径矢即方程(4.226)的根 $\boldsymbol{r}'$.按相对论,粒子速度必小于真空中的光速 c,本节设它也小于介质中的光速 u.粒子与球面相遇后必留在球外,且不可能赶上以速度 u 向 $\boldsymbol{r}$ 处聚集的球面.粒子只能与球面相遇一次,(4.226)便只有一个根.这便证明了(4.226)根的惟一性.经变换(4.223),并将被锁定的诸因子提到积分号外后(4.221)和(4.222)分别成为

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon R'}\int\delta(\boldsymbol{\zeta})\frac{\partial(x_1',x_2',x_3')}{\partial(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)}\mathrm{d}^3\zeta, \quad (4.227)$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu q\boldsymbol{v}'}{4\pi R'}\int\delta(\boldsymbol{\zeta})\frac{\partial(x_1',x_2',x_3')}{\partial(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)}\mathrm{d}^3\zeta, \quad (4.228)$$

其中 $\boldsymbol{v}'$ 为粒子在 $\boldsymbol{r}'$ 处(即在 $t'\equiv t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}$ 时刻)的速度,$\mathrm{d}^3\zeta\equiv\mathrm{d}\zeta_1\mathrm{d}\zeta_2\mathrm{d}\zeta_3$,

$$\boldsymbol{R}'\equiv\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'. \quad (4.229)$$

---

① Jacobi.

微分(4.223)并将 $\boldsymbol{r}'$ 锁定为(4.226)的根,得

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_{i'}} = \delta_{ii'} - v_i' \frac{X_{i'}'}{uR'}, \tag{4.230}$$

其中 $X_{i'}'$ 为 $\boldsymbol{R}'$ 的 i' 分量. 于是

$$\frac{\partial(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)}{\partial(x_1',x_2',x_3')} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial\zeta_1}{\partial x_1'} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial x_2'} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial x_3'} \\ \frac{\partial\zeta_2}{\partial x_1'} & \frac{\partial\zeta_2}{\partial x_2'} & \frac{\partial\zeta_2}{\partial x_3'} \\ \frac{\partial\zeta_3}{\partial x_1'} & \frac{\partial\zeta_3}{\partial x_2'} & \frac{\partial\zeta_3}{\partial x_3'} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{R'^3} \begin{vmatrix} R' - \frac{v_1'X_1'}{u} & -\frac{v_1'X_2'}{u} & -\frac{v_1'X_3'}{u} \\ -\frac{v_2'X_1'}{u} & R' - \frac{v_2'X_2'}{u} & -\frac{v_2'X_3'}{u} \\ -\frac{v_3'X_1'}{u} & -\frac{v_3'X_2'}{u} & R' - \frac{v_3'X_3'}{u} \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{R}'}{uR'} = 1 - \frac{v_{R'}'}{u}, \tag{4.231}$$

其中 $v_{R'}'$ 为 $\boldsymbol{v}'$ 在 $\boldsymbol{R}'$ 方向的投影. 由于恒等式

$$\frac{\partial(x_1',x_2',x_3')}{\partial(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)} \frac{\partial(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)}{\partial(x_1',x_2',x_3')} = 1, \tag{4.232}$$

$$\frac{\partial(x_1',x_2',x_3')}{\partial(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)} = \left(1 - \frac{v_{R'}'}{u}\right)^{-1} > 0, \tag{4.233}$$

再由

$$\int \delta(\boldsymbol{\zeta}) \mathrm{d}^3\zeta = 1$$

得

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon R'\left(1 - \frac{v_{R'}'}{u}\right)} = \frac{q}{4\pi\epsilon\left(R' - \frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{R}'}{u}\right)}, \tag{4.234}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu q \boldsymbol{v}'}{4\pi R'\left(1 - \frac{v_{R'}'}{u}\right)} = \frac{\mu q \boldsymbol{v}'}{4\pi\left(R' - \frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{R}'}{u}\right)}. \tag{4.235}$$

这便是运动带电质点的标势和矢势,称李纳-维谢尔势. 以上数学推导是严格而简洁的,只是未能显示雅可比行列式(4.233)代表的物理内容. 为显示物理内容,下面对李纳-维谢尔势另作一形象的推导.

先设带电粒子并非一点,在空间中占一小体积,然后令它趋于一点,体积趋于零. 在它趋于一点之前设它占据的小体积中电荷密度为常数,运动速度也处处相

同.将这样的电荷电流密度代入(4.136)和(4.137),被积函数不再含 δ-函数,是规则的.将积分变量由 $\boldsymbol{r}'$变换为 $-\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$,并采用球坐标,积分元成为

$$\mathrm{d}\mathscr{V}' = R'^2\mathrm{d}R'\mathrm{d}\Omega', \tag{4.236}$$

$\mathrm{d}\Omega'$为 $-\boldsymbol{R}'$方向的立体角元.$R'=|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|$是以径矢为 $\boldsymbol{r}$ 的点作心的球面半径.每一半径 R'对应一时刻

$$t' = t - \frac{R'}{u} = t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}, \tag{4.237}$$

半径为 R'的球面上的任一点在 t'时刻发出的电磁波在 t 时刻到达球心 $\boldsymbol{r}$ 点.对一定的 $\boldsymbol{r}$ 和 t,此式给出的函数关系

$$R'(t') = u(t-t') \tag{4.238}$$

表示的就是前述半径以匀速 u 缩短的球面收缩过程.可以把(4.136)和(4.137)中的径向积分过程与形象的球面收缩过程相联系.在球面按(4.238)随 t'的增长而收缩,扫过整个空间的过程中,只有与粒子相交的那段时间,或者说只有与粒子重叠的空间区域,才对积分有贡献.设粒子尺度很小,球面扫过粒子的时间 $\Delta t'$很短,在此时间中 $\boldsymbol{r}'$、R'和 $\boldsymbol{v}'$的变化与它们自身相比均可忽略,(4.136)和(4.137)可分别表为

$$\left.\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon R'}\int\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{R'}{u}\right)R'^2\mathrm{d}R'\mathrm{d}\Omega', \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{\mu\boldsymbol{v}'}{4\pi R'}\int\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{R'}{u}\right)R'^2\mathrm{d}R'\mathrm{d}\Omega'. \end{aligned}\right\} \tag{4.239}$$

设粒子沿径向 $-\boldsymbol{R}'$的长度为 l,平均横截面积为 s,电荷密度为 ρ_0,电荷为

$$q = \rho_0 sl. \tag{4.240}$$

球面扫过粒子的过程中,粒子沿 $\boldsymbol{R}'$方向运动了 $v'_{R'}\Delta t'$;因而实际扫过的电荷密度为 ρ_0,平均横截面积为 s 的径向长度为

$$\Delta R' = u\Delta t' = l + v'_{R'}\Delta t'.$$

由此解得

$$\Delta t' = \frac{l}{u-v'_{R'}}, \tag{4.241}$$

$$\Delta R' = \frac{ul}{u-v'_{R'}} = \frac{l}{1-\dfrac{v'_{R'}}{u}}. \tag{4.242}$$

这使(4.239)成为

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon R'}\rho_0 sl\,\frac{1}{1-\dfrac{v'_{R'}}{u}} = \frac{q}{4\pi\epsilon\left(R'-\dfrac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{R}'}{u}\right)},$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu q\boldsymbol{v}'}{4\pi\left(R'-\dfrac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{R}'}{u}\right)}.$$

令粒子趋于一点，体积趋于零，此二式成为严格的，便是李纳-维谢尔势(4.234)和(4.235). 这一推导显示出雅可比行列式(4.233)表示的是一种推迟效应. 电磁讯号以有限速度 u 传播，扫过带电粒子需要一段时间，在这段时间中粒子也在运动，致使它所扫过的电荷电流密度非零的区域不同于粒子在一定时刻占据的区域. 这便导致了修正因子 $\left(1-\frac{v'_{R'}}{u}\right)^{-1}$.

按(1.100)和(1.96)求电场强度和磁感应强度需计算标势与矢势对坐标和时间的微商. 李纳-维谢尔势(4.234)和(4.235)与 $\boldsymbol{r}$ 和 t 的关系隐含在 $\boldsymbol{R}'$ 和 $\boldsymbol{v}'$ 中. 按(4.229) $\boldsymbol{R}'$ 除直接与 $\boldsymbol{r}$ 有关外还通过 $\boldsymbol{r}'$ 的表达式(4.226)与 $\boldsymbol{r}$ 和 t 有关. $\boldsymbol{r}'$ 与 $\boldsymbol{r}$ 和 t 的关系通过它的自变量 t'，t' 按(4.237)直接与 t 有关，且通过 R' 又和 $\boldsymbol{r}$ 与 t 有关. $\boldsymbol{v}'$ 与 $\boldsymbol{r}$ 和 t 的关系也是通过它的自变量 t'. 这些关系错综复杂，要小心处理，却不难理清楚. 由(4.229)和(4.226)得

$$\frac{\partial R'}{\partial t}=\frac{\boldsymbol{R}'}{R'}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{R}'}{\partial t}=-\frac{\boldsymbol{R}'}{R'}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t}=-\frac{\boldsymbol{R}'}{R'}\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}}(t')\frac{\partial t'}{\partial t}=-v'_{R'}\frac{\partial t'}{\partial t}.$$

由(4.237)则得

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=1-\frac{1}{u}\frac{\partial R'}{\partial t}.$$

两式联立得

$$\frac{\partial R'}{\partial t}=-\frac{v'_{R'}}{1-\frac{v'_{R'}}{u}},\tag{4.243}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\frac{v'_{R'}}{u}},\tag{4.244}$$

还得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}'}{\partial t}=-\frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t}=-\dot{\boldsymbol{\xi}}(t')\frac{\partial t'}{\partial t}=-\frac{\boldsymbol{v}'}{1-\frac{v'_{R'}}{u}}.\tag{4.245}$$

对坐标微商则得

$$\nabla R'=\frac{\boldsymbol{R}'}{R'}-\frac{\boldsymbol{R}'}{R'}\cdot\boldsymbol{v}'\nabla t'=\frac{\boldsymbol{R}'}{R'}-v'_{R'}\nabla t',$$

$$\nabla t'=-\frac{1}{u}\nabla R'.$$

两式联立得

$$\nabla R'=\frac{\boldsymbol{R}'}{R'-\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{R}'}{u}},\tag{4.246}$$

$$\nabla t'=-\frac{\boldsymbol{R}'}{uR'-\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{R}'}.\tag{4.247}$$

还得到张量

$$\nabla \boldsymbol{R}' = \boldsymbol{I} - (\nabla t')\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{R}'\boldsymbol{v}'}{uR' - \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{R}'}, \tag{4.248}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为(1.213)定义的幺张量. 引进符号

$$s \equiv R' - \frac{\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{R}'}{u}, \tag{4.249}$$

由(4.243)~(4.248)得

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial R'}{\partial t} - (\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{R}' - v'^2)\frac{1}{u}\frac{\partial t'}{\partial t} = -\left(\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{R}' - \frac{v'^2}{u}R' + \frac{\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{R}'}{u}R'\right)\frac{1}{s}, \tag{4.250}$$

$$\begin{aligned}
\nabla s &= \nabla R' - \frac{\boldsymbol{v}'}{u} - \left(\frac{\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{R}'}{u} - \frac{v'^2}{u}\right)\nabla t' \\
&= \left(1 + \frac{\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{R}'}{u^2} - \frac{v'^2}{u^2}\right)\nabla R' - \frac{\boldsymbol{v}'}{u} \\
&= \left(1 - \frac{v'^2}{u^2} + \frac{\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{R}'}{u^2}\right)\frac{\boldsymbol{R}'}{s} - \frac{\boldsymbol{v}'}{u},
\end{aligned} \tag{4.251}$$

其中

$$\boldsymbol{a}' \equiv \boldsymbol{a}(t') \equiv \dot{\boldsymbol{v}}(t') = \ddot{\boldsymbol{\xi}}(t') \tag{4.252}$$

为带电粒子在 t' 时刻的加速度. 由此又得

$$\nabla \phi = -\frac{q}{4\pi\epsilon s^2}\nabla s = -\frac{q\boldsymbol{R}'}{4\pi\epsilon s^3}\left(1 - \frac{v'^2}{u^2} + \frac{\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{R}'}{u^2}\right) + \frac{q\boldsymbol{v}'}{4\pi\epsilon s^2 u},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} &= \frac{\mu q \boldsymbol{a}'}{4\pi s}\frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{\mu q \boldsymbol{v}'}{4\pi s^2}\frac{\partial s}{\partial t} \\
&= \frac{\mu q R'\boldsymbol{v}'}{4\pi s^3}\left(v'_{R'} - \frac{v'^2}{u} + \frac{\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{R}'}{u}\right) + \frac{\mu q R'\boldsymbol{a}'}{4\pi s^2}.
\end{aligned}$$

于是得电场强度

$$\begin{aligned}
\mathscr{E} &= -\nabla \phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon s^3}\left\{\left(1 - \frac{v'^2}{u^2}\right)\left(\boldsymbol{R}' - \frac{R'\boldsymbol{v}'}{u}\right) + \frac{\boldsymbol{R}'}{u^2} \times \left[\left(\boldsymbol{R}' - \frac{R'\boldsymbol{v}'}{u}\right) \times \boldsymbol{a}'\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{4.253}$$

用类似方法算得张量

$$\begin{aligned}
\nabla \boldsymbol{A} &= \frac{\mu q(\nabla t')\boldsymbol{a}'}{4\pi s} - \frac{\mu q(\nabla s)\boldsymbol{v}'}{4\pi s^2} \\
&= -\frac{\mu q \boldsymbol{R}'\boldsymbol{a}'}{4\pi s^2 u} - \frac{\mu q}{4\pi s^2}\left[\left(1 - \frac{v'^2}{u^2} + \frac{\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{R}'}{u^2}\right)\frac{\boldsymbol{R}'\boldsymbol{v}'}{s} - \frac{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}'}{u}\right].
\end{aligned}$$

这个张量的反对称部分即 $\boldsymbol{A}$ 的旋度,故有

$$\mathscr{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = -\frac{\mu q}{4\pi s^3}\left(1 - \frac{v'^2}{u^2} + \frac{\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{R}'}{u^2}\right)\boldsymbol{R}' \times \boldsymbol{v}' - \frac{\mu q}{4\pi s^2 u}\boldsymbol{R}' \times \boldsymbol{a}'$$

$$=\frac{1}{u}\frac{\boldsymbol{R}'}{R'}\times\mathscr{E}. \tag{4.254}$$

这便是运动点电荷的磁感应强度.

设带电粒子作等速直线运动,速度为不变矢量$\boldsymbol{v}$,加速度 $\boldsymbol{a}=0$. 它在 t 时刻的径矢量便是

$$\boldsymbol{r}_0\equiv\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{v}(t-t'). \tag{4.255}$$

t 时刻从粒子所在位置$\boldsymbol{r}_0$ 指向观测位置 $\boldsymbol{r}$ 的径矢为

$$\boldsymbol{R}\equiv\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{R}'-\boldsymbol{v}(t-t')=\boldsymbol{R}'-\frac{\boldsymbol{v}}{u}R'. \tag{4.256}$$

由此得

$$R^2=R'^2\left(1-\frac{v^2}{u^2}\right)-2\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{u}R'.$$

配方得

$$R^2+\frac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})^2}{u^2-v^2}=\left[R'\sqrt{1-\frac{v^2}{u^2}}-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{\sqrt{u^2-v^2}}\right]^2. \tag{4.257}$$

由此解得

$$R'=\frac{u\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{u^2-v^2}+\sqrt{\frac{u^2R^2}{u^2-v^2}+\frac{u^2(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})^2}{(u^2-v^2)^2}}. \tag{4.258}$$

作为 R'的二次代数方程,(4.257)有另一根 $R'<0$ 已被弃去.代回(4.256)得

$$\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{v}\left[\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{u^2-v^2}+\sqrt{\frac{R^2}{u^2-v^2}+\frac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})^2}{(u^2-v^2)^2}}\right]. \tag{4.259}$$

于是算得

$$s=\sqrt{R^2\left(1-\frac{v^2}{u^2}\right)+\frac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})^2}{u^2}}. \tag{4.260}$$

定义矢量

$$\boldsymbol{r}''\equiv\boldsymbol{R}+(\gamma-1)\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{v^2}\cdot\boldsymbol{R}, \tag{4.261}$$

其中

$$\gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{u^2}}}, \tag{4.262}$$

它的长度

$$r''=\sqrt{\boldsymbol{r}''\cdot\boldsymbol{r}''}=\sqrt{R^2+\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})^2}{u^2-v^2}}=\gamma s. \tag{4.263}$$

由(4.253),(4.256),(4.262)和(4.263)得等速直线运动带电粒子的电场强度为

$$\mathscr{E}=\frac{q\gamma}{4\pi\epsilon r''^3}\boldsymbol{R}. \tag{4.264}$$

再由(4.254),(4.258),(4.259),(4.264)和(4.261)得等速直线运动带电粒子的磁感应强度

$$\mathscr{B}=\frac{\gamma}{u^2}\boldsymbol{v}\times\frac{q}{4\pi\epsilon r''^3}\boldsymbol{r}''=\frac{\mu q\gamma}{4\pi r''^3}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}''.\tag{4.265}$$

在真空中 $\epsilon=\epsilon_0,\mu=\mu_0,u=c$,此二式恰为(1.215)和(1.216).如前所述,该二式具有超距作用的形式.现在清楚地看到这种超距形式实际上是电磁讯号以有限速度 u 逐点传递的结果.

电场强度(4.264)沿径向,表明带电粒子作等速直线运动时是没有电磁能量向外发射的,即没有电磁辐射.设 t'时刻带电粒子作加速运动,$\boldsymbol{a}'\neq 0$.设此时$\boldsymbol{v}'=0$, $s=R'$,在真空中总可取符合此条件的惯性系,

$$\mathscr{E}=\frac{q\boldsymbol{R}'}{4\pi\epsilon R'^3}+\frac{q}{4\pi\epsilon R'^3u^2}\boldsymbol{R}'\times(\boldsymbol{R}'\times\boldsymbol{a}'),\tag{4.266}$$

$$\mathscr{B}=\frac{q}{4\pi\epsilon R'^4u^3}\boldsymbol{R}'\times[\boldsymbol{R}'\times(\boldsymbol{R}'\times\boldsymbol{a}')].\tag{4.267}$$

此时刻带电粒子的辐射强度,即单位时间内辐射到无穷远处的能量为

$$\begin{aligned}\mathscr{I}&=\frac{1}{\mu}\int_{4\pi}(\mathscr{E}\times\mathscr{B})\cdot\frac{\boldsymbol{R}'}{R'}R'^2\mathrm{d}\Omega'\\&=\frac{q^2}{(4\pi)^2\epsilon u^3}\int_{4\pi}\left[a'^2-\left(\boldsymbol{a}'\cdot\frac{\boldsymbol{R}'}{R'}\right)^2\right]\mathrm{d}\Omega'\\&=\frac{q^2a'^2}{6\pi\epsilon u^3}.\end{aligned}\tag{4.268}$$

此式称为拉莫尔①公式.

考虑带电粒子速度和加速度均非零的一般情形.它的电场强度由(4.253)表示.此式右边花括号内有两项.其中第一项与括号前因子的积在无穷远处按$\left(\frac{1}{R'}\right)^2$的方式趋于零;第二项与括号前因子的积在无穷远处按$\frac{1}{R'}$的方式趋于零.将此电场强度代入(4.254)右边,得到的磁感应强度也含两项,在无穷远处分别按$\left(\frac{1}{R'}\right)^2$和$\frac{1}{R'}$的方式趋于零.用它们按(1.233)计算坡印亭矢量共得四项,一项按$\left(\frac{1}{R'}\right)^4$,两项按$\left(\frac{1}{R'}\right)^3$和一项按$\left(\frac{1}{R'}\right)^2$在无穷远处趋于零.带电粒子 t'时刻在$\boldsymbol{r}'$处发出的电磁波t 时刻到达以$\boldsymbol{r}'$点为球心R'为半径的球面.以$\boldsymbol{r}'$为顶点的 $\mathrm{d}\Omega'$立体角在此球面上划出一块面积$R'^2\mathrm{d}\Omega'$.坡印亭矢量的径向分量与此面积的积即单位时间内

① Larmor.

沿此立体角流出球面的电磁能量.可见其中与$\left(\frac{1}{R'}\right)^4$成正比的那项和与$\left(\frac{1}{R'}\right)^3$成正比的那两项对流出球面的电磁能的贡献分别以$\left(\frac{1}{R'}\right)^2$和$\frac{1}{R'}$的方式随$R'\to\infty$在无穷远处趋于零.只有与$\left(\frac{1}{R'}\right)^2$成正比的那一项对流向无穷远处的电磁能有非零贡献.这项可表为

$$\boldsymbol{S}_2 = \frac{1}{\mu}\mathscr{E}_2 \times \mathscr{B}_2 \tag{4.269}$$

其中

$$\mathscr{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon s^3 u^2}\boldsymbol{R}' \times \left[\left(\boldsymbol{R}' - \frac{R'\boldsymbol{v}'}{u}\right)\times \boldsymbol{a}'\right], \tag{4.270}$$

$$\mathscr{B}_2 = \frac{1}{u}\frac{\boldsymbol{R}'}{R'} \times \mathscr{E}_2. \tag{4.271}$$

这再次表明只有加速度非零的带电粒子能将电磁能量辐射到无穷远,而辐射电磁场必是横场,电场强度和磁感应强度均垂直于辐射方向$\boldsymbol{R}'$.将(4.270)与(4.271)代入(4.269),由于$\mathscr{E}_2 \perp \boldsymbol{R}'$得

$$\boldsymbol{S}_2 = \frac{1}{\mu u}\mathscr{E}_2^2\frac{\boldsymbol{R}'}{R'}. \tag{4.272}$$

考虑带电粒子在t'时刻到$t'+\mathrm{d}t'$时刻之间$\mathrm{d}t'$时间中的辐射.t'时刻粒子在$\boldsymbol{r}'$处,发出的辐射经时间$\frac{R'}{u}$在$t=t'+\frac{R'}{u}$时刻到达半径为R'的球面上各点.$t'+\mathrm{d}t'$时刻粒子在$\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{v}'\mathrm{d}t'$处,向球面上$\boldsymbol{R}'$点发出的辐射经时间$\frac{1}{u}(R'-v'_{R'}\mathrm{d}t')$在时刻

$$t' + \mathrm{d}t' + \frac{1}{u}(R' - v'_{R'}\mathrm{d}t') = t + \left(1 - \frac{v'_{R'}}{u}\right)\mathrm{d}t'$$

到达.注意! $\mathrm{d}t'$时间中粒子发出的辐射通过$\boldsymbol{R}'$处球面的时间不是$\mathrm{d}t'$而是$\left(1-\frac{v'_{R'}}{u}\right)\mathrm{d}t'$,与$\boldsymbol{R}'$相对于$\boldsymbol{v}'$的取向有关.$t'$时刻单位时间内粒子向$\boldsymbol{R}'$方向$\mathrm{d}\Omega'$立体角辐射的电磁能量,即微分辐射强度遂为

$$\mathrm{d}\mathscr{I} = \boldsymbol{S}_2 \cdot \frac{\boldsymbol{R}'}{R'}\left(1 - \frac{v'_{R'}}{u}\right)R'^2\mathrm{d}\Omega' = \frac{1}{\mu u}\mathscr{E}_2^2\left(1 - \frac{v'_{R'}}{u}\right)R'^2\mathrm{d}\Omega'. \tag{4.273}$$

若粒子纵向加速,即$\boldsymbol{a}' /\!/ \boldsymbol{v}'$,(4.270)成为

$$\mathscr{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon s^3 u^2}\boldsymbol{R}' \times (\boldsymbol{R}' \times \boldsymbol{a}'). \tag{4.274}$$

代入上式得

$$\mathrm{d}\mathscr{I} = \frac{q^2}{(4\pi)^2\epsilon u^3}\frac{1}{\left(1 - \frac{v'_{R'}}{u}\right)^5}\left[a'^2 - \left(\boldsymbol{a}' \cdot \frac{\boldsymbol{R}'}{R'}\right)^2\right]\mathrm{d}\Omega'. \tag{4.275}$$

取$\boldsymbol{v}'$的方向为极轴，θ'表示$\boldsymbol{R}'$与$\boldsymbol{v}'$的夹角，由于$\boldsymbol{a}' /\!/ \boldsymbol{v}'$此式成为

$$\mathrm{d}\mathscr{I} = \frac{q^2 a'^2}{(4\pi)^2 \epsilon u^3} \frac{1-\cos^2\theta'}{\left(1-\dfrac{v'}{u}\cos\theta'\right)^5} \sin\theta' \mathrm{d}\theta' \mathrm{d}\varphi', \tag{4.276}$$

φ'为$\dfrac{\boldsymbol{R}'}{R'}$绕极轴$\boldsymbol{v}'$的方位角. 作$4\pi$立体角积分得单位时间辐射的电磁能，即辐射强度

$$\begin{aligned}\mathscr{I} &= \frac{q^2 a'^2}{(4\pi)^2 \epsilon u^3} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \int_0^{\pi} \frac{1-\cos^2\theta'}{\left(1-\dfrac{v'}{u}\cos\theta'\right)^5} \sin\theta' \mathrm{d}\theta' \\ &= \frac{q^2 a'^2}{8\pi\epsilon u^3} \int_{-1}^{1} \frac{1-\xi^2}{\left(1-\dfrac{v'}{u}\xi\right)^5} \mathrm{d}\xi = \frac{q^2 a'^2}{6\pi\epsilon u^3} \frac{1}{\left(1-\dfrac{v'^2}{u^2}\right)^3}.\end{aligned} \tag{4.277}$$

若粒子的加速度和速度不在一个方向上，则可以互相垂直的三个非零向量

$$(\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{a}') \times \boldsymbol{v}', \quad \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{a}' \quad 和 \quad \boldsymbol{v}'$$

所指方向为轴建立正交坐标系，并以$\boldsymbol{v}'$为极轴建立球面坐标θ'和φ'，θ'为$\boldsymbol{R}'$与$\boldsymbol{v}'$的交角，φ'则为$\boldsymbol{R}'$在垂直于$\boldsymbol{v}'$的平面上的投影与$(\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{a}') \times \boldsymbol{v}'$的夹角. 将(4.270)代入(4.273)，算出矢量积和矢量平方，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathscr{I} = \frac{q^2}{(4\pi)^2 \epsilon u^3} \frac{1}{\left(1-\dfrac{v'_{R'}}{u}\right)^5} \Bigg\{ & a'^2 + \left(\boldsymbol{v}' \cdot \frac{\boldsymbol{R}'}{R'}\right)^2 \frac{a'^2}{u^2} \\ & + \frac{2}{u}(\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{v}')\left(\boldsymbol{a}' \cdot \frac{\boldsymbol{R}'}{R'}\right) - \left(1-\frac{v^2}{u^2}\right)\left(\boldsymbol{a}' \cdot \frac{\boldsymbol{R}'}{R'}\right)^2 \\ & - \frac{2}{u} a'^2 \left(\boldsymbol{v}' \cdot \frac{\boldsymbol{R}'}{R'}\right) - \frac{2}{u^2}(\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{v}')\left(\boldsymbol{v}' \cdot \frac{\boldsymbol{R}'}{R'}\right)\left(\boldsymbol{a}' \cdot \frac{\boldsymbol{R}'}{R'}\right) \Bigg\} \mathrm{d}\Omega'.\end{aligned} \tag{4.278}$$

由于$\boldsymbol{a}' \cdot (\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{a}') = 0$和

$$\boldsymbol{a}' \cdot \frac{(\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{a}') \times \boldsymbol{v}'}{|(\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{a}') \times \boldsymbol{v}'|} = \sqrt{a'^2 - \left(\boldsymbol{a}' \cdot \frac{\boldsymbol{v}'}{v'}\right)^2},$$

得

$$\boldsymbol{a}' \cdot \frac{\boldsymbol{R}'}{R'} = \boldsymbol{a}' \cdot \frac{\boldsymbol{v}'}{v'} \cos\theta' + \sqrt{a'^2 - \left(\boldsymbol{a}' \cdot \frac{\boldsymbol{v}'}{v'}\right)^2} \sin\theta' \cos\varphi'. \tag{4.279}$$

将此式和$v'_{R'} \equiv \boldsymbol{v}' \cdot \dfrac{\boldsymbol{R}'}{R'} = v' \cos\theta'$代入(4.278)，得微分强度随方位角$\theta'$和$\varphi'$变化的显式. 将它在$4\pi$立体角内积分，经整理后得任意运动带电粒子的辐射强度

$$\mathscr{I} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon u^3} \frac{1}{\left(1-\dfrac{v'^2}{u^2}\right)^3} \left[a'^2 - \frac{1}{u^2}(\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{a}')^2\right], \tag{4.280}$$

称为李纳公式. 对$\boldsymbol{a}' /\!/ \boldsymbol{v}'$的情形，此式成为(4.277)，因此也正确表达了纵向加速带电粒子的辐射强度. 对$\boldsymbol{v}' = 0$的情形它还原为拉莫尔公式(4.268). 对横向加速

带电粒子，$\boldsymbol{v}' \perp \boldsymbol{a}'$，此式给出

$$\mathscr{I} = \frac{q^2 a'^2}{6\pi\epsilon u^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{v'^2}{u^2}\right)^2}. \tag{4.281}$$

§4.7 介质中超光速带电粒子的电磁冲击波，切连科夫[①]辐射，色散现象与谱分解

1934 年切连科夫发现液体在 γ 射线照射下会发光. 实验进一步表明这种发光现象是一种次级效应：γ 射线先撞击液体中的电子，使之高速运动，高速运动的电子再引起液体发光. 1936 年切连科夫又发现了这种光的最特征的性质，即它的方向性. 这种光只朝与入射 γ 射线成一定角的方向发射. 1937 年塔姆与弗朗克[②]据此得出结论：这是速度超过介质中光速的电子引起的电磁冲击波. 从此，一切速度超过介质中光速的带电粒子引起的电磁冲击波称为切连科夫辐射. 这一成果获 1958 年诺贝尔奖.

上节关于运动带电粒子电磁场的讨论，包括(4.234)，(4.235)，(4.253)和(4.254)诸式的推导中，只有一处对粒子速度作了假定，即(4.226)的根 $\boldsymbol{r}'$ 惟一性的证明中假设了粒子速度的大小 v 小于介质中的光速 u. 若 $v > u$ 则满足(4.226)的径矢 $\boldsymbol{r}'$ 可以不止一个. 在以 $\boldsymbol{r}$ 点为心的球面半径 R' 以匀速 u 缩短，球面从无穷大缩到 $\boldsymbol{r}$ 点的过程中，一个速度 $v > u$ 的粒子可以从球外赶上缩小的球面并穿入球内，然后又被最终缩为一点的球面排到球外. 粒子每与球面相遇一次，相遇点的径矢 $\boldsymbol{r}'$ 就是(4.226)的一个根. 可见此条件下这种根不惟一. 若虽粒子速度 $v > u$，但它沿 $\boldsymbol{R}'$ 的分量 $v'_{R'} < u$，则当它在球外时仍赶不上缩小的球面，(4.226)便没有根. (4.226)的每一个根对电磁势(4.234)，(4.235)和电磁场(4.253)，(4.254)的贡献都是独立的，并具有相同的形式. 对给定时刻 t 和给定空间点 $\boldsymbol{r}$，若(4.226)无根，则该时刻该点的电磁势和电磁场便都是零. 若有一个根则恰得(4.234)，(4.235)，(4.253)和(4.254)诸式. 若有几个根则每个根均在这四式中贡献一项，每项形式一样，只是其中的 $\boldsymbol{R}'$、$\boldsymbol{v}'$、$\boldsymbol{a}'$ 和 s 要在各自对应的根处取值. 一个等速直线运动的带电粒子，或者与上述收缩球面不相遇，或者相遇两次. 两次相遇只是位置不同. 一次由球外穿入球内，位置由径矢 $\boldsymbol{r}_i'$ 表示；另一次由球内穿出球外，位置由径矢 $\boldsymbol{r}_o'$ 表示. 两次相遇的速度 $\boldsymbol{v}_i' = \boldsymbol{v}_o' = \boldsymbol{v}$ 相同，加速度 $\boldsymbol{a}_i' = \boldsymbol{a}_o' = 0$ 同为零. 粒子速度超过介质中光速 u 的特点在第一次与球面的相遇中表现出来. 此次相遇粒子要从球外穿入球内，它的速度 $\boldsymbol{v}$ 与相对径矢

---

① П. А. Черенков, ДАН **2** (1934)451, **3**(Ⅻ)(1936)413, **19**(1937)99.

② И. Е. Тамм и И. М. Франк, ДАН **14** (1937)107.

$$\boldsymbol{R}'_i \equiv \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'_i \tag{4.282}$$

必成锐角 θ'_i.因此 $v'_{R'_i} \equiv \boldsymbol{v} \cdot \dfrac{\boldsymbol{R}'_i}{R'_i} = v\cos\theta'_i > 0$.由于 $v > u$,必有锐角 θ_c 使

$$v\cos\theta_c = u. \tag{4.283}$$

在与粒子运动方向夹角为 $\theta'_i = \theta_c$ 的方向上 $1 - \dfrac{v_{R'_i}{}'}{u} = 0$,从而 $s = 0$.这使电磁场强的表达式(4.253)和(4.254)中分母为零.由于 $\boldsymbol{a}'_i = 0$,电场强度表达式(4.253)花括号内第二项的贡献成了不定型.磁感应强度(4.254)的相应项也成为不定型.上节曾论证(4.253)花括号内第一项对辐射强度的贡献为零.现在与它相乘的因子中出现了零分母,它对辐射强度的贡献也成为不定型.对速度超过介质中光速的带电粒子,上节关于它在等速直线运动条件下不辐射的结论遂不能成立.为了得到确定的结论,须另觅方法将不定型定下来.

将粒子等速直线运动的方向取作 z 方向,它在起始时刻 $t = 0$ 的位置取为坐标原点.将它当作质点,电荷密度分布为

$$\rho(x,y,z,t) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt), \tag{4.284}$$

电流密度分布为

$$\boldsymbol{j}(x,y,z,t) = \boldsymbol{v}\rho(x,y,z,t) = q\boldsymbol{v}\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt), \tag{4.285}$$

q 为粒子电荷,$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{z}_0$ 为粒子速度,$\boldsymbol{z}_0$ 为 z 方向的单位矢量.广义洛伦兹规范下的电磁势方程(4.120)具体化为

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{q}{\epsilon}\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt), \tag{4.286}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu q\boldsymbol{v}\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt). \tag{4.287}$$

只要从(4.286)解出标势 ϕ,便可由

$$\boldsymbol{A} = \mu\epsilon\boldsymbol{v}\phi = \frac{\boldsymbol{v}}{u^2}\phi \tag{4.288}$$

得到满足(4.287)的矢势.作傅里叶展开

$$\delta(z - vt) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_z(z-vt)}dk_z, \tag{4.289}$$

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_1(x,y)e^{ik_z(z-vt)}dk_z, \tag{4.290}$$

代入(4.286)得

$$\nabla^2\phi_1 + k_\rho^2\phi_1 = -\frac{q}{\epsilon}\delta(x)\delta(y), \tag{4.291}$$

其中

$$k_\rho \equiv \sqrt{k^2 - k_z^2}, \tag{4.292}$$

k 仍由(4.124)定义,该式中的角频率现为

$$\omega = k_z v. \tag{4.293}$$

(4.291)已是只含两个自变量 x 和 y 的偏微分方程,其中的拉普拉斯算符

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{4.294}$$

是二维的.它右边的非齐次项只在 $x = y = 0$ 处非零,其余地方它是二维齐次亥姆霍兹方程

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} + k_\rho^2 \phi_1 = 0. \tag{4.295}$$

采用柱坐标(3.112),在垂直于 z 轴的平面内就是极坐标

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}. \tag{4.296}$$

本节其余部分 ρ 为一极坐标而不表示电荷密度.用此式及其逆

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \tag{4.297}$$

可将(4.295)写成对极坐标的偏微分方程

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2} + k_\rho^2 \phi_1 = 0. \tag{4.298}$$

由于整个问题绕 z 轴的对称性,ϕ_1 应与 θ 无关而只是 ρ 的函数.这使此式左边第二项为零,成为单变量函数 $\phi_1(\rho)$ 的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 \phi_1}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}\rho} + k_\rho^2 \phi_1 = 0. \tag{4.299}$$

令

$$\xi = k_\rho \rho, \tag{4.300}$$

可将它写成

$$\frac{\mathrm{d}^2 \phi_1}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}\xi} + \phi_1 = 0. \tag{4.301}$$

这是零阶贝塞尔①方程.我们要求的是横向无穷远处,即 $\rho \to \infty$ 处,向外传播的波动解.(4.301)的汉克尔②函数解 $\mathrm{H}_0^{(1)}(\xi)$ 和 $\mathrm{H}_0^{(2)}(\xi)$ 有渐近式③

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{H}_0^{(1)}(\xi) &\underset{\xi \to \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)}, \\ \mathrm{H}_0^{(2)}(\xi) &\underset{\xi \to \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{4.302}$$

---

① Bessel.

② Hankel.

③ 见(A3.48)和(A3.49).

若将(4.299)的解取为

$$\phi_1(\rho) = a\mathrm{H}_0^{(1)}(k_\rho \rho), \tag{4.303}$$

a 为常数,则有渐近形式

$$\phi_1(\rho) \underset{\rho\to\infty}{\sim} a\sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho}}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k_\rho \rho-\frac{\pi}{4}\right)}; \tag{4.304}$$

若取为

$$\phi_1(\rho) = a\mathrm{H}_0^{(2)}(k_\rho \rho) \tag{4.305}$$

则有渐近形式

$$\phi_1(\rho) \underset{\rho\to\infty}{\sim} a\sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho}}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(k_\rho \rho-\frac{\pi}{4}\right)}. \tag{4.306}$$

由(4.292)、(4.117)和(4.293)知

$$k_\rho = \sqrt{\frac{v^2}{u^2}-1}\mid k_z \mid, \tag{4.307}$$

在 $v>u$ 条件下为正实数,可见(4.304)和(4.306)在此条件下均含 ρ 的周期函数,(4.303)和(4.305)因而是 ρ 方向的波动解.对 $k_z>0$ 的情形,按(4.293) $\omega>0$,时间因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 与(4.304)的乘积含因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\rho \rho-\omega t)}$.这是以相速 $\frac{\omega}{k_\rho}>0$ 沿 ρ 方向向外传播的波.对 $k_z<0$ 的情形,按(4.293) $\omega<0$,时间因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 与(4.306)的乘积含因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_\rho \rho+\omega t)}$.这是以相速 $-\frac{\omega}{k_\rho}>0$ 沿 ρ 方向向外传播的波.因此,若 $k_z>0$ 应将(4.299)的解取为(4.303),若 $k_z<0$ 应将(4.299)的解取为(4.305).为求常数 a 要用非齐次方程(4.291).将它两边在整个 xy 平面上积分,由 δ 函数的性质得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y(\nabla^2\phi_1 + k_\rho^2\phi_1) = -\frac{q}{\epsilon}. \tag{4.308}$$

由于除 $x=y=0$ 一点外齐次方程(4.295)成立,此式左边可表为

$$\lim_{\eta\to 0}\iint_{s_\eta}(\nabla^2\phi_1 + k_\rho^2\phi_1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\eta\to 0}\left[\oint_{\Gamma_\eta}\frac{\partial\phi_1(\eta)}{\partial\eta}\mathrm{d}l + 2\pi k_\rho^2\int_0^\eta\phi_1(\rho)\rho\mathrm{d}\rho\right],$$

其中 s_η 为以 $x=y=0$ 为心 η 为半径的圆,Γ_η 为它的周线,$\mathrm{d}l$ 为圆周上的线元.将(4.303)或(4.305)代入,用汉克尔函数在 $\xi=0$ 处的性质①

$$\mathrm{H}_0^{(1)}(\xi) \underset{\xi\to 0}{\sim} \mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln\frac{\xi}{2},\quad \mathrm{H}_0^{(2)}(\xi) \underset{\xi\to 0}{\sim} -\mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln\frac{\xi}{2}, \tag{4.309}$$

得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y(\nabla^2\phi_1 + k_\rho^2\phi_1) = \pm\mathrm{i}\frac{2a}{\pi}\lim_{\eta\to 0}\left(2\pi\eta\frac{1}{\eta} + 2\pi k_\rho^2\int_0^\eta\rho\ln\frac{k_\rho\rho}{2}\mathrm{d}\rho\right)$$

---

① 见附录三(A3.40).

$$= \pm 4a\mathrm{i}.$$

与(4.308)比较得

$$a = \pm \frac{q}{4\epsilon}\mathrm{i}, \tag{4.310}$$

对(4.303)此式右边取正号,对(4.305)此式右边取负号.将(4.303)、(4.305)和(4.309)代入(4.290)得标势

$$\begin{aligned}\phi(\rho,\theta,z,t) &= \frac{q\mathrm{i}}{8\pi\epsilon}\left[\int_0^{\infty}\mathrm{H}_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)}\mathrm{d}k_z - \int_{-\infty}^{0}\mathrm{H}_0^{(2)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)}\mathrm{d}k_z\right]\\ &= \psi(\rho,\theta,z,t) + \psi^*(\rho,\theta,z,t),\end{aligned} \tag{4.311}$$

$$\psi(\rho,\theta,z,t) \equiv \frac{q\mathrm{i}}{8\pi\epsilon}\int_0^{\infty}\mathrm{H}_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)}\mathrm{d}k_z, \tag{4.312}$$

其中用到 $\mathrm{H}_0^{(1)}(\xi)$ 和 $\mathrm{H}_0^{(2)}(\xi)$ 对实变量 ξ 互为复数共轭的性质.将(4.311)代入(4.288)即得欲求的矢势 $\boldsymbol{A}$,将它表为柱坐标分量形式即是

$$\left.\begin{aligned}A_\rho &= A_\theta = 0,\\ A_z &= \frac{v}{u^2}\phi = \frac{v}{u^2}(\psi + \psi^*).\end{aligned}\right\} \tag{4.313}$$

用(4.302)得渐近形式

$$\psi(\rho,\theta,z,t) \underset{\rho\to\infty}{\sim} \frac{q}{8\pi\epsilon}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{1}{k_\rho\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k_\rho\rho+k_z z-\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}k_z. \tag{4.314}$$

在给定 θ 的 ρz 平面内这是等相位线为直线的波

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\rho\rho+k_z z-\omega t)}$$

的叠加.它的传播方向由波矢量

$$\boldsymbol{k} = k_\rho\boldsymbol{\rho}_0 + k_z\boldsymbol{z}_0 \tag{4.315}$$

表示,$\boldsymbol{\rho}_0$ 和 $\boldsymbol{z}_0$ 分别为 ρ 方向和 z 方向的单位矢量.用 θ_c 表示它与粒子运动方向的夹角,则

$$\cos\theta_c = \frac{k_z}{k} = \frac{k_z}{\sqrt{k_\rho^2 + k_z^2}} = \frac{u}{v}, \tag{4.316}$$

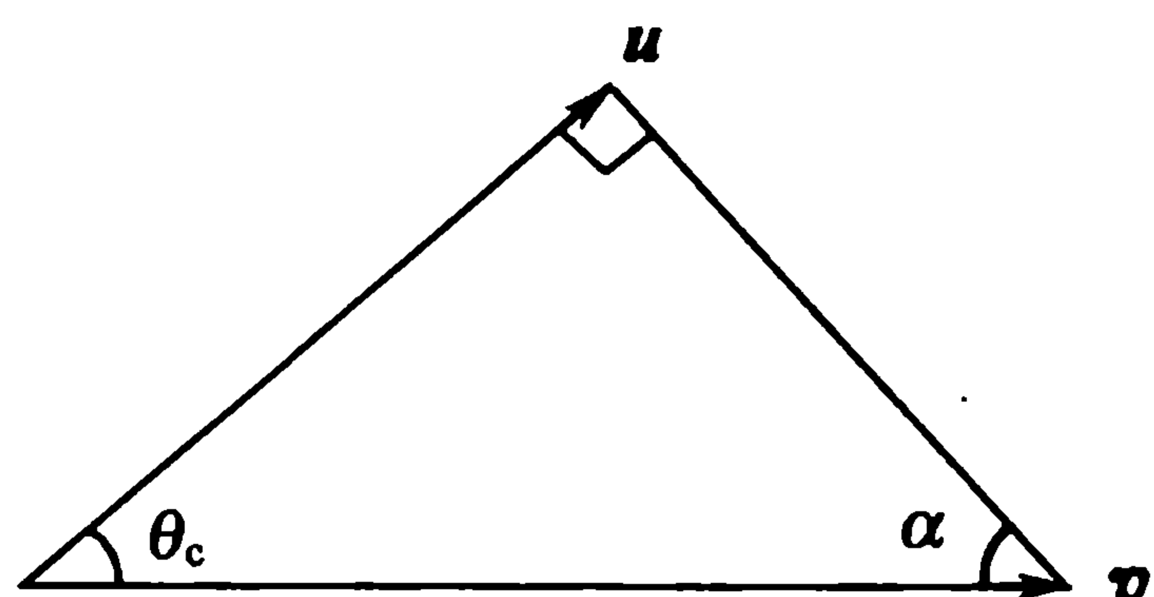
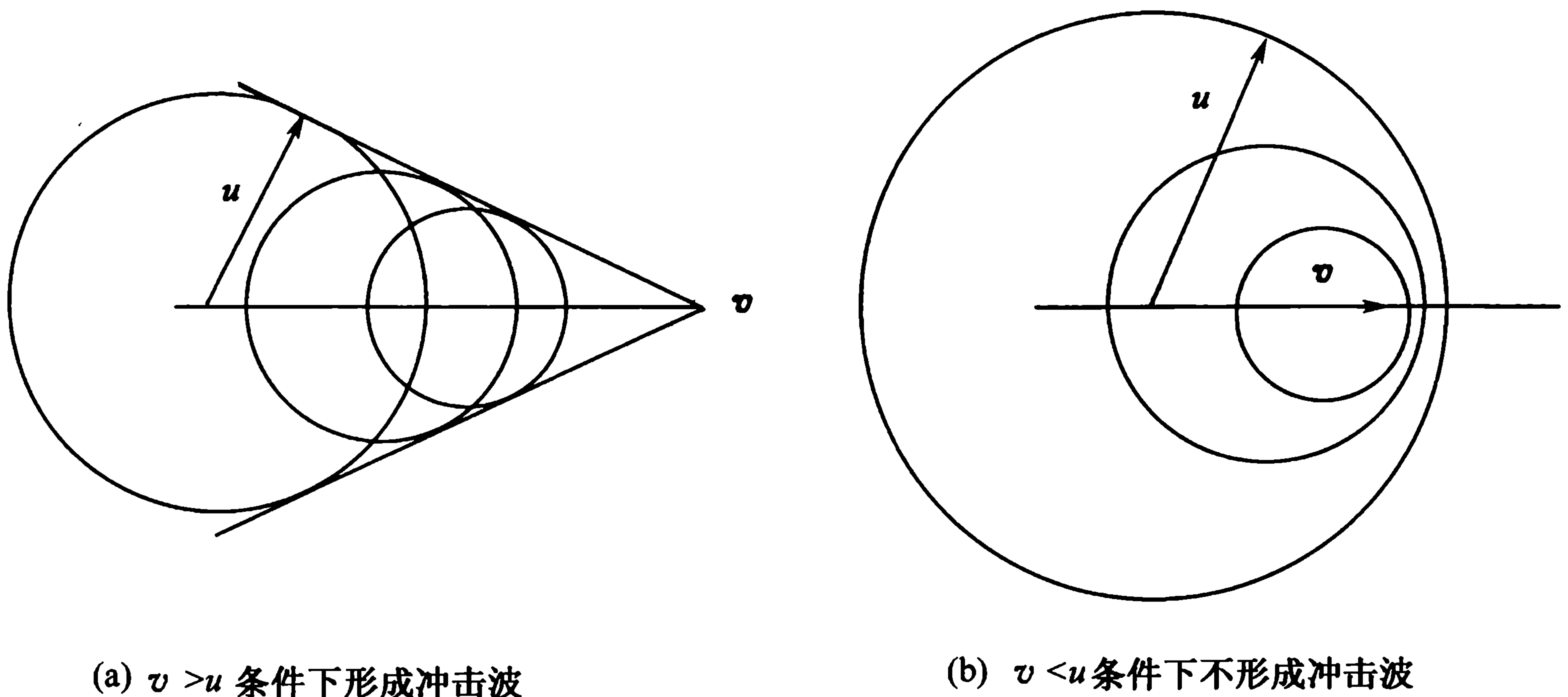


图 4-1 切连科夫角与马赫角

这正是(4.283)定义的 θ_c.那里的讨论表明上节关于等速直线运动带电粒子不辐射的论证对速度超过介质中光速的粒子在 θ_c 方向上不成立.现在则从正面论证了确有电磁波朝此方向发出.这便是切连科夫辐射,θ_c 称为切连科夫角.波前直线与波传播方向 $\boldsymbol{k}$ 垂直.以它们各作一直角边,以粒子速度方向 $\boldsymbol{v}$ 为斜边,可作一直角三角形(图 4-1),θ_c 为它的一个锐角,另一锐角 α 为波前与粒子速度方向的交角,显然有

$$\sin\alpha = \frac{u}{v}. \tag{4.317}$$

此角相当于超音速质点在弹性介质中引起的弹性冲击波的马赫①角，此处不妨仍称为马赫角. 它与 θ_c 互为余角. 不同 θ 的 ρz 平面中的波前直线组成一以粒子运动直线为轴，2α 为顶角的圆锥面. 可见切连科夫辐射在三维空间中为一圆锥面波. 这就是超过介质中光速的等速直线运动带电粒子的电磁冲击波. 圆锥波阵面在超音速质点的弹性冲击波中称为马赫面，此处则称为切连科夫锥面. 像弹性冲击波一样，电磁冲击波也可作直观的几何图解. 如图 4-2，等速直线运动的粒子在运动轨道的每一点都发出一个球面波. 如果粒子速度 v 大于波速 u，这些球面波会彼此叠加起来，它们的包络面便是切连科夫锥面，或马赫面(图 4-2(a)). 可见波只存在于锥面内侧. 若 $v<u$ 则各点发出的球面波不重叠(图 4-2(b))，不能形成冲击波.



(a) $v>u$ 条件下形成冲击波　　(b) $v<u$ 条件下不形成冲击波

图 4-2　冲击波形成机制示意

用电磁势(4.311)～(4.313)按(1.100)和(1.96)计算电场强度和磁感应强度. 为此要计算 ψ 的偏微商. 显然有

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{q}{8\pi\epsilon}\int_0^\infty \mathrm{H}_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)}k_z\mathrm{d}k_z,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{qv}{8\pi\epsilon}\int_0^\infty \mathrm{H}_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)}k_z\mathrm{d}k_z.$$

由汉克尔函数的递推关系②

① E. Mach.

② 见(A3.21).

$$\frac{\mathrm{d}H_0^{(1)}(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = -H_1^{(1)}(\xi)$$

得

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = -\frac{q\mathrm{i}}{8\pi\epsilon}\int_0^\infty H_1^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)}k_\rho\mathrm{d}k_z.$$

由此得电场强度

$$\left.\begin{aligned}
\mathscr{E}_\rho &= -\frac{\partial(\psi+\psi^*)}{\partial\rho} = 2\mathrm{Re}\left[\frac{q\mathrm{i}}{8\pi\epsilon}\int_0^\infty H_1^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)}k_\rho\mathrm{d}k_z\right] \\
&= \frac{q\mathrm{i}}{8\pi\epsilon}\left[\int_0^\infty H_1^{(1)}(k_\rho\ \rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)}k_\rho\mathrm{d}k_z\right. \\
&\quad \left.-\int_{-\infty}^0 H_1^{(2)}(k_\rho\ \rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)}k_\rho\mathrm{d}k_z\right], \\
\mathscr{E}_\theta &= 0, \\
\mathscr{E}_z &= -\frac{\partial(\psi+\psi^*)}{\partial z} - \frac{v}{u^2}\frac{\partial(\psi+\psi^*)}{\partial t} \\
&= 2\mathrm{Re}\left[\frac{q}{8\pi\epsilon}\left(1-\frac{v^2}{u^2}\right)\int_0^\infty H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)}k_z\mathrm{d}k_z\right] \\
&= \frac{q}{8\pi\epsilon}\left(1-\frac{v^2}{u^2}\right)\left[\int_0^\infty H_0^{(1)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)}k_z\mathrm{d}k_z\right. \\
&\quad \left.-\int_{-\infty}^0 H_0^{(2)}(k_\rho\ \rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)}k_z\mathrm{d}k_z\right].
\end{aligned}\right\} \tag{4.318}$$

由柱坐标旋度公式(3.131)得磁感应强度

$$\left.\begin{aligned}
\mathscr{B}_\rho &= \mathscr{B}_z = 0, \\
\mathscr{B}_\theta &= -\frac{v}{u^2}\frac{\partial(\psi+\psi^*)}{\partial\rho} = \frac{v}{u^2}\mathscr{E}_\rho.
\end{aligned}\right\} \tag{4.319}$$

以粒子运动轨道为轴,作一半径为 ρ 的无穷长圆柱面,单位时间流出此圆柱面的电磁能为坡印亭矢量的 ρ 分量在此圆柱面上的积分

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_\rho &= 2\pi\rho\int_{-\infty}^\infty \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\rho}_0\mathrm{d}z = -\frac{2\pi\rho}{\mu}\int_{-\infty}^\infty \mathscr{E}_z\mathscr{B}_\theta\mathrm{d}z \\
&= -2\pi\epsilon v\rho\int_{-\infty}^\infty \mathscr{E}_z\mathscr{E}_\rho\mathrm{d}z \\
&= -2\pi\epsilon v\rho\int_{-\infty}^\infty \mathscr{E}_z\mathscr{E}_\rho\mathrm{d}\zeta,
\end{aligned} \tag{4.320}$$

其中

$$\zeta = z - vt. \tag{4.321}$$

(4.318)又可写为

$$\left.\begin{aligned}
\mathscr{E}_\rho(\rho,\zeta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(k_z,\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z\zeta}\mathrm{d}k_z, \\
\mathscr{E}_\theta(\rho,\zeta) &= 0, \\
\mathscr{E}_z(\rho,\zeta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(k_z,\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z\zeta}\mathrm{d}k_z,
\end{aligned}\right\} \tag{4.322}$$

其中

$$f(k_z,\rho) = \frac{q\mathrm{i}}{4\epsilon}k_\rho \cdot \begin{cases} \mathrm{H}_1^{(1)}(k_\rho\,\rho), & 若\ k_z > 0, \\ -\mathrm{H}_1^{(2)}(k_\rho\,\rho), & 若\ k_z < 0, \end{cases} \tag{4.323}$$

$$g(k_z,\rho) = \frac{q}{4\epsilon}\left(1-\frac{v^2}{u^2}\right)k_z \cdot \begin{cases} \mathrm{H}_0^{(1)}(k_\rho\,\rho), & 若\ k_z > 0, \\ -\mathrm{H}_0^{(2)}(k_\rho\,\rho), & 若\ k_z < 0. \end{cases} \tag{4.324}$$

另一方面，由傅里叶积分理论知，(4.322)中的傅里叶系数可表为

$$\left.\begin{aligned}
f(k_z,\rho) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z\zeta}\mathscr{E}_\rho(\rho,\zeta)\mathrm{d}\zeta, \\
g(k_z,\rho) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z\zeta}\mathscr{E}_z(\rho,\zeta)\mathrm{d}\zeta.
\end{aligned}\right\} \tag{4.325}$$

将(4.322)的第一式代入(4.320)再用(4.325)的第二式得

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_\rho &= -\epsilon v\rho\int_{-\infty}^{\infty} g^*(k_z,\rho)f(k_z,\rho)\mathrm{d}k_z \\
&= -\epsilon\rho\int_{-\infty}^{\infty} g^*\left(\frac{\omega}{v},\rho\right)f\left(\frac{\omega}{v},\rho\right)\mathrm{d}\omega,
\end{aligned} \tag{4.326}$$

末一等号处用了(4.293). 现在问超过介质中光速的等速直线运动带电粒子单位时间向它运动轨道两侧辐射到无穷远的电磁能量是多少. 这便是它的辐射强度

$$\mathscr{I} = \lim_{\rho\to\infty}\mathscr{I}_\rho. \tag{4.327}$$

将汉克尔函数无穷远处的渐近形式(4.302)和①

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{H}_1^{(1)}(\xi) &\underset{\xi\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}(-\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\xi-\frac{\pi}{4}\right)}, \\
\mathrm{H}_1^{(2)}(\xi) &\underset{\xi\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}(\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\xi-\frac{\pi}{4}\right)},
\end{aligned}\right\} \tag{4.328}$$

分别代入(4.324)和(4.323)，再将结果代入(4.326)和(4.327)得

$$\mathscr{I} = \int_0^{\infty} \frac{q^2}{4\pi\epsilon}\left(\frac{v^2}{u^2}-1\right)\frac{\omega}{v}\mathrm{d}\omega > 0. \tag{4.329}$$

此式表明超过介质中光速的等速直线运动带电粒子确有电磁辐射，将电磁能辐射到无穷远. 然而有一点值得注意. 在以上推导中一直将 ϵ、μ 和介质中的光速 $u=$

① 附录三(A3.48)、(A3.49).

$\sqrt{\frac{1}{\epsilon\mu}}$当作常数. 若它们果真为常数则(4.329)给出的辐射强度为无穷大. 这意味着根本不会有超过介质中光速的等速直线运动带电粒子,因为它的速度哪怕只超过介质中光速一点点,那超出部分对应的能量都会在瞬间辐射掉. 既然确实观察到了超过介质中光速的等速直线运动带电粒子及其切连科夫辐射,就表明(4.329)中的 ϵ 和 u 并非常数,而是光频 ω 的函数. ϵ、μ 和介质中的光速 u 与通过介质的电磁波频率 ω 有关的现象称为色散. 色散现象对解释存在超过介质中光速的等速直线运动带电粒子及其切连科夫辐射是重要的.

介质由原子、分子组成,它们还会在介质中形成各式各样的结构. 原子、分子,以及由它们形成的结构会具有一系列特征频率. 当电磁波的频率接近这些特征频率时便会发生共振而大大增强电磁波与介质电磁作用的效应. 这就使表征介质电磁性质的各种量,包括 ϵ、μ 和 u,不可避免地都是电磁波频率 ω 的函数,表现出色散. 从另一方面看,介质中会有各种特征长度. 当电磁波的波长接近这些特征长度时也会发生共振,增强电磁波与介质的电磁作用效应. 这同样使表征介质电磁性质的量与电磁波的波长有关,从而与它的频率有关. 要作出(4.329)中的积分,必须知道函数 $\epsilon(\omega)$和 $u(\omega)$的具体形式. 这只有对具体介质作具体研究才能获得. 然而仍有普遍规律可循. 对频率甚高,波长甚短,比原子尺度 $1\text{Å}=10^{-10}\text{m}$ 还短得多的电磁波,当它通过介质时不可能与介质的任何宏观部分作用,就像在真空中行进一样,因而速度 $u=c$ 为真空中的光速. 任何带电粒子不可能超过这一速度. 这使(4.329)中的积分上限不应为∞,而应为一适当高频 ω_0,它由

$$u(\omega_0) = v \tag{4.330}$$

决定. 辐射强度

$$\mathscr{I} = \int_0^{\omega_0} \frac{q^2}{4\pi\epsilon}\left(\frac{v^2}{u^2}-1\right)\frac{\omega}{v}\mathrm{d}\omega \tag{4.331}$$

为有限值.

色散现象要求对介质中不同频率的电磁波分别处理,这便是谱分解方法. 对时间的傅里叶分解便是谱分解,前面已多次用到. 本节用的实际就是谱分解方法. 它将场量表示为对 k_z 的积分,按(4.293)就是对 ω 的积分. 色散现象只是要求将原来放在积分号外的常数 ϵ、μ 和 u 作为 ω 的函数移到积分号下参加积分.

上节未作谱分解,因而没有考虑色散现象. 在了解色散对切连科夫辐射的重要意义后,自然会问它对低于介质中光速的等速直线运动带电粒子不辐射的结论有何影响. 重复以上讨论,只是将条件改为 $v<u$. (4.307)表明此条件下

$$k_\rho = \mathrm{i}\chi \tag{4.332}$$

为虚数,其中

$$\chi = \sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}} \mid k_z \mid \tag{4.333}$$

为正实数.这使(4.299)成为

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_1}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}\rho} - \chi^2\phi_1 = 0. \tag{4.334}$$

令

$$\xi = \chi\rho \tag{4.335}$$

可将它写成

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_1}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}\xi} - \phi_1 = 0. \tag{4.336}$$

这是零阶变型贝塞尔方程,它在 $\xi \to \infty$ 处有界的解为第二类零阶变型贝塞尔函数①

$$\mathrm{K}_0(\xi) = \frac{\pi \mathrm{i}}{2}\mathrm{H}_0^{(1)}(\mathrm{i}\xi), \tag{4.337}$$

实际就是虚宗量 $\mathrm{i}\xi$ 的零阶汉克尔函数.由(4.302)第一式知它的渐近形式

$$\mathrm{K}_0(\xi) \underset{\xi\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}\mathrm{e}^{-\xi} \tag{4.338}$$

随 $\xi \to \infty$ 而指数地趋于零.(4.334)在无穷远处有界的解便是

$$\phi_1(\rho) = a\mathrm{K}_0(\chi\rho), \tag{4.339}$$

a 为常数.它在无穷远处的渐近形式

$$\phi_1(\rho) \underset{\rho\to\infty}{\sim} a\sqrt{\frac{\pi}{2\chi}}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\mathrm{e}^{-\chi\rho} \tag{4.340}$$

自然也指数地趋于零.常数 a 仍由非齐次方程(4.291)定,只是 k_ρ 应换为 $\mathrm{i}\chi$.平行(4.308)~(4.310)的推导得

$$a = \frac{q}{2\pi\epsilon}. \tag{4.341}$$

将此式代入(4.339)再将得到的 $\phi_1(\rho)$ 代入(4.290)得标势

$$\phi(\rho,\theta,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{q}{4\pi^2\epsilon}\mathrm{K}_0(\chi\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)}\mathrm{d}k_z, \tag{4.342}$$

将此式代入(4.288)并将 $\frac{1}{u^2}$ 放到积分号下得矢势的柱坐标表示

$$A_\rho = A_\theta = 0,$$

$$A_z(\rho,\theta,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu q v}{4\pi^2}\mathrm{K}_0(\chi\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)}\mathrm{d}k_z. \tag{4.343}$$

将标势和矢势代入(1.100)得电场强度

---

① 附录三(A3.7).

$$\left.\begin{aligned}
\mathscr{E}_\rho &= -\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\chi}{4\pi^2\epsilon} \mathrm{K}_1(\chi\rho) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)} \mathrm{d}k_z, \\
\mathscr{E}_\theta &= 0, \\
\mathscr{E}_z &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{qk_z}{4\pi^2\epsilon\mathrm{i}} \mathrm{K}_0(\chi\rho)\left(1 - \frac{v^2}{u^2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)} \mathrm{d}k_z;
\end{aligned}\right\} \tag{4.344}$$

将矢势代入(1.96)后用柱坐标旋度公式(3.131)得磁感应强度

$$\left.\begin{aligned}
\mathscr{B}_\rho &= \mathscr{B}_z = 0, \\
\mathscr{B}_\theta &= -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu q v \chi}{4\pi^2} \mathrm{K}_1(\chi\rho) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)} \mathrm{d}k_z,
\end{aligned}\right\} \tag{4.345}$$

其中

$$\mathrm{K}_1(\xi) = -\frac{\pi}{2} \mathrm{H}_1^{(1)}(\mathrm{i}\xi) \tag{4.346}$$

为第二类一阶变型贝塞尔函数,推导中用了关系①

$$\frac{\mathrm{dK}_0(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = -\mathrm{K}_1(\xi),$$

它可由(3.337)、(3.446)和汉克尔函数的类似递推关系得到.由(4.328)还得到渐近形式

$$\mathrm{K}_1(\xi) \underset{\xi\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \mathrm{e}^{-\xi}. \tag{4.347}$$

它和(4.338)一起,表明 $\rho\to\infty$ 处标势、矢势、电场强度和磁感应强度均指数地趋于零.单位时间内流出以粒子运动轨道为轴半径为 ρ 的无穷长圆柱面的电磁能为

$$\mathscr{I}_\rho = 2\pi\rho \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{\rho}_0 \mathrm{d}z = -2\pi\rho \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{E}_z \mathscr{H}_\theta \mathrm{d}z, \tag{4.348}$$

其中

$$\mathscr{H}_\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{qv\chi}{4\pi^2} \mathrm{K}_1(\chi\rho) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(z-vt)} \mathrm{d}k_z \tag{4.349}$$

为磁场强度的 θ 分量.磁场强度的另二分量

$$\mathscr{H}_\rho = \mathscr{H}_z = 0. \tag{4.350}$$

将(4.344)的第三式和(4.349)代入(4.348),模仿(4.320)～(4.326)的推导作谱分解,得

$$\mathscr{I}_\rho = \mathrm{i}\frac{\rho}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q^2 v \chi}{\epsilon} \mathrm{K}_0(\chi\rho) \mathrm{K}_1(\chi\rho) \left(1 - \frac{v^2}{u^2}\right) k_z \mathrm{d}k_z = 0. \tag{4.351}$$

末一等号是由于被积函数为 k_z 的奇函数.而这又是由于 ϵ 和 u 都只应与 ω 的绝对

---

① 附录三(A3.20).

值有关,因此只与 k_z 的绝对值有关.在此前提下 χ 也只与 k_z 的绝对值有关.(4.351)表明没有电磁能量向粒子运动轨道两侧辐射.低于介质中光速的等速直线运动带电粒子不辐射的结论在有色散的介质中也成立.

§4.8 带电粒子的能量动量四矢量,电磁质量与辐射阻尼力,重整化概念,电子的经典半径

带电粒子产生电磁场,又受电磁场作用.带电粒子与电磁场是相互作用的.由于带电粒子与电磁场分属不同自由度,作用于带电粒子的不仅有其他带电粒子产生的电磁场(外电磁场),也有这个粒子自己产生的电磁场(自电磁场).为了保持理论的相对论性,且不致太复杂,常将带电粒子设为一个几何点,称为点粒子,在力学中称质点.迄今为止的实验也表明,已知的基本带电粒子如电子、夸克、……等确为点粒子.然而(4.253)和(4.254)表明,点粒子所产生的电磁场在粒子所在处成为无穷大,且方向不确定.即带电粒子所在点为它所产生的电磁场的奇点.这便无法直接计算自电磁场对产生它的粒子的反作用.本节用洛伦兹不变性和能量动量守恒对这种作用做一些间接推测.由于问题的基本性,只讨论真空中的情形.由(4.253)可见,粒子产生的电磁场包含两部分.一部分由其中花括号内的第一项与前面因子的乘积表示.这一部分不辐射,好像附着在粒子上一样,它对粒子的作用应表现为对粒子本身性质的修正.下面的具体讨论将表明这部分电磁场的能量将按质能关系对带电粒子附加一份质量,称为电磁质量.另一部分由(4.253)花括号内第二项与前面因子的乘积表示.这是一辐射项,它表示的电磁场将从带电粒子带走能量和动量,因而给带电粒子以反冲.它对带电粒子的作用表现为辐射阻尼力.

采用四维符号和爱因斯坦求和约定.用 x^μ, $\mu=0,1,2,3$ 表示带电质点的时空坐标,$(\mathrm{d}x^\mu)$为四矢量.由此可组成标量

$$\mathrm{d}\tau \equiv \sqrt{-\frac{1}{c^2}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x_\mu} \equiv \sqrt{-\frac{1}{c^2}\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu}$$

$$= \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}t, \tag{4.352}$$

其中 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 为质点速度.在非相对论极限 $v \ll c$ 条件下 $\mathrm{d}\tau \to \mathrm{d}t$, τ 因此称为原时,是表示质点运动进程的洛伦兹不变时间.用它可定义四维速度

$$u^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}. \tag{4.353}$$

它的时间分量

$$u^0 = \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} = c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma c, \tag{4.354}$$

其中 γ 由(1.209)定义;空间分量

$$u^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \gamma v^i, \quad i = 1,2,3 \tag{4.355}$$

在非相对论极限 $v \ll c$ 条件下趋于通常定义的三维速度 $v^i, i=1,2,3$. 将(4.355)表成三维矢量形式即是

$$\boldsymbol{u} = \gamma \boldsymbol{v} . \tag{4.356}$$

设质点的静止质量为 m_0,它是一常数因而是标量. 于是可定义质点的四维动量

$$p_0^\mu = m_0 u^\mu, \quad \mu = 0,1,2,3, \tag{4.357}$$

(p_0^μ)与(u^μ)同为四矢量. 四动量的时间分量

$$p_0^0 = m_0 u^0 = \gamma m_0 c = \frac{E_0}{c}, \tag{4.358}$$

其中

$$E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.359}$$

为质点能量;空间分量

$$\boldsymbol{p}_0 = m_0 \boldsymbol{u} = \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.360}$$

则为质点动量. 以四动量(p_0^μ)和四速度(u^ν)的直积为基础可构造四维张量$(\mathscr{T}_0^{\mu\nu}(x))$,其中的 $\mu\nu$ 分量定义为

$$\mathscr{T}_0^{\mu\nu}(x) \equiv \int p_0^\mu u^\nu \delta^4(x - \widetilde{x}(\tau)) c \mathrm{d}\tau, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3, \tag{4.361}$$

x 为四坐标(x^μ)的简写, $\widetilde{x}(\tau)$为质点的四维轨道方程,它也是四个函数$(\widetilde{x}^\mu(\tau))$的简写,表示质点在原时 τ 的四维时空坐标为$x^\mu = \widetilde{x}^\mu(\tau), \mu = 0,1,2,3$. (4.361)中与 $p_0^\mu u^\nu$ 相乘的因子在洛伦兹变换下不变保证了它定义的$(\mathscr{T}_0^{\mu\nu}(x))$为四维二阶反变张量. 而(4.357)则表明这是一对称张量,

$$\mathscr{T}_0^{\mu\nu}(x) = \mathscr{T}_0^{\nu\mu}(x). \tag{4.362}$$

由(4.361)和(4.353)得

$$\begin{aligned} \mathscr{T}_0^{\mu\nu}(x) &= \int p_0^\mu \frac{\mathrm{d}\widetilde{x}^\nu}{\mathrm{d}\tau} \delta^4(x - \widetilde{x}(\tau)) c \mathrm{d}\tau \\ &= \int p_0^\mu \frac{\mathrm{d}\widetilde{x}^\nu}{\mathrm{d}t'} \delta^4(x - \widetilde{x}(\tau)) c \mathrm{d}t' \\ &= p_0^\mu \frac{\mathrm{d}\widetilde{x}^\nu}{\mathrm{d}t} \delta(\boldsymbol{r} - \widetilde{\boldsymbol{r}}(t)), \end{aligned} \tag{4.363}$$

四维 δ 函数中的时间 δ 函数因子对时间 t' 的积分将右边 p_0^μ、$\frac{\mathrm{d}\widetilde{x}^\nu}{\mathrm{d}t}$ 和 τ 的时刻都固定在左边自变量(x^μ)中时间分量 $x^0 = ct$ 规定的时刻, $\widetilde{\boldsymbol{r}}(t)$为质点的三维轨道方

程，表示 t 时刻质点径矢量为 $\boldsymbol{r}=\widetilde{\boldsymbol{r}}(t)$. 由于

$$p_0^0\frac{\mathrm{d}\widetilde{x}^0}{\mathrm{d}t}=E_0,$$

$\mathscr{T}_0^{00}(x)$ 为带电粒子 t 时刻在 $\boldsymbol{r}$ 处的能量密度；而

$$p_0^i\frac{\mathrm{d}\widetilde{x}^0}{\mathrm{d}t}=cp_0^i$$

则表明 $\mathscr{T}_0^{0i}(x)=\mathscr{T}_0^{i0}(x)$ 为带电粒子 t 时刻在 $\boldsymbol{r}$ 处的动量 i 分量密度的 c 倍. 与电磁场能量动量张量的含义(1.245)和(1.246)比较知，可将 $(\mathscr{T}_0^{\mu\nu}(x))$ 认定为质点的能量动量张量.

作为时空坐标的函数，(4.363)的右边因子 p_0^μ 和 $\frac{\mathrm{d}\widetilde{x}^\nu}{\mathrm{d}t}$ 只与时间 t 有关，只有三维 δ 函数与空间坐标 $\boldsymbol{r}$ 有关. 因此

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\mathscr{T}_0^{\mu i}}{\partial x^i}&=p_0^\mu\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\widetilde{x}^i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^i}\delta(\boldsymbol{r}-\widetilde{\boldsymbol{r}}(t))\\&=-p_0^\mu\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\widetilde{x}^i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^i}\delta(\boldsymbol{r}-\widetilde{\boldsymbol{r}}(t))\\&=-p_0^\mu\frac{\partial}{\partial t}\delta(\boldsymbol{r}-\widetilde{\boldsymbol{r}}(t)).\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{T}_0^{\mu0}}{\partial x^0}&=\frac{\partial}{\partial t}[p_0^\mu\delta(\boldsymbol{r}-\widetilde{\boldsymbol{r}}(t))]\\&=\frac{\partial p_0^\mu}{\partial t}\delta(\boldsymbol{r}-\widetilde{\boldsymbol{r}}(t))+p_0^\mu\frac{\partial}{\partial t}\delta(\boldsymbol{r}-\widetilde{\boldsymbol{r}}(t)).\end{aligned}$$

两式合并得

$$\frac{\partial\mathscr{T}_0^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=\frac{\mathrm{d}p_0^\mu}{\mathrm{d}t}\delta(\boldsymbol{r}-\widetilde{\boldsymbol{r}}(t)),\quad\mu=0,1,2,3.\tag{4.364}$$

由质点的相对论运动方程和洛伦兹力公式(1.90)得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_0}{\mathrm{d}t}=q(\mathscr{E}+\boldsymbol{v}\times\mathscr{B}),$$

$$\frac{\mathrm{d}p_0^0}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}t}=\frac{q}{c}(\mathscr{E}+\boldsymbol{v}\times\mathscr{B})\cdot\boldsymbol{v}=\frac{q}{c}\mathscr{E}\cdot\boldsymbol{v}.$$

用电、磁场强的张量表示(1.200)和(1.201)，以及点电荷的密度和流密度的表示式(1.91)，可将(4.364)表为

$$\frac{\partial\mathscr{T}_0^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=f^\mu,\quad\mu=0,1,2,3,\tag{4.365}$$

其中

$$f^\mu=F^{\mu\nu}j_\nu,\tag{4.366}$$

$j_\mu = \eta_{\mu\nu} j^\nu$，$\mu = 0,1,2,3$，组成协变电流密度四矢量，而反变电流密度四矢量$(j^\mu)$则由(1.189)定义. 比较(4.365)和(1.249)知，可定义一四维二阶对称张量$(\Theta^{\mu\nu})$，其中的μ,ν分量为

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \mathscr{T}_0^{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3, \tag{4.367}$$

具有守恒性质

$$\frac{\partial \Theta^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad \mu = 0,1,2,3. \tag{4.368}$$

这是电磁场与带电粒子组成的总系统的能量动量张量. 体积分

$$E_t \equiv \int_\infty \Theta^{00} \mathrm{d}\mathscr{V} = E_f + E_0 \tag{4.369}$$

为系统的总能量，

$$E_f \equiv \int_\infty T^{00} \mathrm{d}\mathscr{V} = \int_\infty U \mathrm{d}\mathscr{V} \tag{4.370}$$

为电磁场能，积分限∞表示在整个空间的积分；

$$P^i \equiv \frac{1}{c}\int_\infty \Theta^{i0} \mathrm{d}\mathscr{V} = p_f^i + p_0^i \tag{4.371}$$

为系统总动量的i分量，

$$p_f^i \equiv \frac{1}{c}\int_\infty T^{i0} \mathrm{d}\mathscr{V} = \int_\infty G^i \mathrm{d}\mathscr{V} \tag{4.372}$$

为电磁场动量的i分量. (4.368)为能量流密度和动量流密度的连续性方程，是系统总能量E_t和总动量$\boldsymbol{P}$守恒的微分表示.

现在证明守恒张量的一条重要性质，它可陈述为

定理 若张量$(\Theta^{\mu\nu})$具有守恒性质(4.368)，则体积分

$$P^\mu \equiv \frac{1}{c}\int \Theta^{\mu 0} \mathrm{d}\mathscr{V}, \quad \mu = 0,1,2,3, \tag{4.373}$$

组成一四矢量，右边未标明积分限的体积分遍及整个空间.

证 将(4.373)右边的体积分写成四维形式

$$P^\mu = \frac{1}{c}\int \Theta^{\mu\nu} \partial_\nu \theta(n_\lambda x^\lambda) \mathrm{d}^4 x, \tag{4.374}$$

其中

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1 & 若\ \xi > 0 \\ 0 & 若\ \xi < 0 \end{cases} \tag{4.375}$$

为阶跃函数，

$$(n_0, n_1, n_2, n_3) = (1,0,0,0) \tag{4.376}$$

为一特别选定的四矢量. 将(4.373)和(4.374)当作惯性系 S 中的表达式，作洛伦兹变换将(4.374)用惯性系 S′中的量表达得

$$P^\mu = \frac{1}{c}\int a^\mu_{\ \mu'} \Theta'^{\mu'\nu'} \partial'_{\nu'} \theta(n'_{\lambda'} x'^{\lambda'}) \mathrm{d}^4 x', \tag{4.377}$$

其中$\partial'_{\nu'} \equiv \frac{\partial}{\partial x'^{\nu'}}$,

$$n'_{\lambda'} = n_\lambda a^\lambda_{\lambda'}. \tag{4.378}$$

另一方面,按(4.374)在 S′系中有相应量

$$P'^{\mu'} = \frac{1}{c}\int \Theta'^{\mu'\nu'} \partial'_{\nu'} \theta(n_{\lambda'} x'^{\lambda'}) \mathrm{d}^4 x'. \tag{4.379}$$

可见

$$\begin{aligned} P^\mu - a^\mu_{\mu'} P'^{\mu'} &= \frac{1}{c} a^\mu_{\mu'} \int \Theta'^{\mu'\nu'} \partial'_{\nu'} [\theta(n'_{\lambda'} x'^{\lambda'}) - \theta(n_{\lambda'} x'^{\lambda'})] \mathrm{d}^4 x' \\ &= \frac{1}{c} a^\mu_{\mu'} \int \partial'_{\nu'} \{\Theta'^{\mu'\nu'} [\theta(n'_{\lambda'} x'^{\lambda'}) - \theta(n_{\lambda'} x'^{\lambda'})]\} \mathrm{d}^4 x', \end{aligned} \tag{4.380}$$

最后一步用到条件(4.368),在 S′系中它表现为

$$\partial'_{\nu'} \Theta'^{\mu'\nu'} \equiv \frac{\partial \Theta'^{\mu'\nu'}}{\partial x'^{\nu'}} = 0.$$

(4.380)右边在整个四维时空中的积分可化为包围整个四维时空的三维超曲面上的积分.在这个超曲面上四个坐标 x'^0、x'^1、x'^2和 x'^3中总有一个为无穷.由于在每一给定时刻带电粒子总在有穷远处,而电磁场传播的有限速度 c 使得在每一给定时刻带电粒子产生的电磁场也只能传播到有限远处.按相对论的观点,这种情形是普遍的.即恒可设在每一给定时刻张量($\Theta^{\mu\nu}$)在无穷远处为零.另一方面,(1.208)表明在洛伦兹变换下 n'_0与 n_0 同号,即为正.这使得对空间每一给定点 $t \to \pm\infty$时(4.380)右边的方括号为零.总之,在包围整个四维时空的三维超曲面上(4.380)右边的花括号为零,它在此超曲面上的积分也就是零.(4.380)右边为零,因此

$$P^\mu = a^\mu_{\mu'} P'^{\mu'}. \tag{4.381}$$

(P^μ)为一四矢量.这就是要证明的.证毕.

将此定理用在(4.367)定义的总能量动量张量上,(4.373)定义的四矢量就是带电粒子和由它产生的电磁场组成的总系统的能量动量四矢量.(4.369)和(4.371)合起来是

$$P^\mu = p^\mu_f + p^\mu_0, \quad \mu = 0,1,2,3. \tag{4.382}$$

由于(P^μ)和(p^μ_0)都是四矢量,它们的差(p^μ_f)也必是一四矢量.可见带电粒子产生的电磁场的能量和动量也组成一四矢量.设带电粒子作等速直线运动,它的电磁场由(1.215)和(1.216)表示.这个电磁场在无穷远处以$\frac{1}{R^2}$的方式趋于零,R 为与带电粒子的距离.按(1.243),此电磁场的能量动量张量($T^{\mu\nu}_1$)在无穷远处以$\frac{1}{R^4}$的方式趋于零.用($T^{\mu\nu}_1$)代替($T^{\mu\nu}$)作张量

$$\mathscr{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_1 + \mathscr{T}^{\mu\nu}_0, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3. \tag{4.383}$$

对等速直线运动的带电粒子和它的电磁场组成的系统，这就是总能量动量张量，自然有守恒性质

$$\frac{\partial \mathcal{T}^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0, \quad \mu = 0,1,2,3. \tag{4.384}$$

而$(T_1^{\mu\nu})$在无穷远处的渐近性质保证张量$(\mathcal{T}^{\mu\nu})$在无穷远处以$\frac{1}{R^4}$的方式趋于零. 这足以保证每一时刻表达式

$$\mathcal{T}^{\mu'\nu'}[\theta(n'_{\lambda'}x'^{\lambda'} - \theta(n_{\lambda'}x'^{\lambda'})] \tag{4.385}$$

在包围整个三维空间的二维表面上的积分为零. 包围整个四维时空的三维超表面上的积分可分解为两部分之和，一部分先在包围整个三维空间的二维表面上积分后再对时间积分，另一部分则是在 $t = \pm\infty$时的整个三维空间上的积分. 表达式(4.385)的这两部分积分都是零. 从前述定理的证明知，这表明

$$p^{\mu} \equiv \frac{1}{c}\int \mathcal{T}^{\mu 0}\mathrm{d}\mathcal{V}, \quad \mu = 0,1,2,3, \tag{4.386}$$

组成一四矢量，就是等速直线运动带电粒子与它周围的电磁场组成的系统的总能量动量四矢量. 在粒子速度 $\boldsymbol{v} = 0$ 的坐标系中，按(4.360)粒子动量 $\boldsymbol{p}_0 = 0$，按(1.216)它产生的磁场为零，从而按(1.240)此电磁场的动量密度为零，动量也就是零. 可见$\boldsymbol{v} = 0$ 的粒子，它与它周围的电磁场组成的系统的总动量 $\boldsymbol{p} = 0$，总能量

$$E = p^0 c = \int \mathcal{T}^{00}\mathrm{d}\mathcal{V} = \int T_1^{00}\mathrm{d}\mathcal{V} + E_0 = \frac{\epsilon_0}{2}\int \mathscr{E}^2\mathrm{d}\mathcal{V} + m_0c^2, \tag{4.387}$$

$\mathscr{E}$为静止带电粒子产生的电场强度，由(1.9)表达. 若粒子为一几何点，此式右边第一项为

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon_0}{2}\int\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r} = \infty,\end{aligned} \tag{4.388}$$

积分是发散的. 这是以点粒子概念为基础的现代场论的著名发散困难在经典场论中的一例. 最初人们想用有广延结构的粒子代替点粒子以克服这一困难. 然而很快发现，要维持理论的相对论性，以广延粒子为基础的场论都是非线性的，而非线性理论至今仍是数学难题. 于是人们转而设法对无穷大作数学处理，以期它们以确定方式互相抵消，使最后算出的可观察量是有限的. 这便是重整化理论. 经过重整化的量子电动力学已成为当今最精确的理论. 经这种理论分析，迄今的实验表明所有的基本粒子如电子、夸克等都可当作点粒子，即将它们当作点粒子的现代量子场论与实验完全符合. 重整化理论是量子场论的内容，不过它的基本思想也可用来处理经典场论中的无穷大.

暂时不去理会(4.388)左边的量是否为无穷大，只注意它与粒子的动力学变量

无关而只与粒子的性质 q 和真空的性质 ϵ_0 有关,因而是粒子的常数,可表为 $m_e c^2$,其中

$$m_e = \frac{\epsilon_0}{2c^2}\int\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega = \frac{\mu_0 q^2}{8\pi}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}. \tag{4.389}$$

将静止带电粒子连同它周围的电磁场的能量表为

$$E = mc^2, \tag{4.390}$$

与(4.387)比较得

$$m = m_e + m_0. \tag{4.391}$$

静止带电粒子连同它周围的电磁场的能量动量四矢量遂为

$$(p'^0, p'^1, p'^2, p'^3) = (mc, 0, 0, 0), \tag{4.392}$$

在 p 上加撇是为了标明这是在粒子静止的惯性系中的量.用洛伦兹变换可将此四矢量变到粒子速度非零的坐标系中,称为洛伦兹推动.将洛伦兹变换(4.2)写成三维矢量形式即

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= \gamma\left(x'^0 + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\boldsymbol{r}'\right), \\ \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}' + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{v^2}\cdot\boldsymbol{r}' + \gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}x'^0. \end{aligned}\right\} \tag{4.393}$$

将$(x^0, \boldsymbol{r})$换成$(p^0, \boldsymbol{p})$,$(x'^0, \boldsymbol{r}')$换成$(p'^0, \boldsymbol{p}')$,便可实现从(p'^μ)到(p^μ)的洛伦兹变换.将(4.392)表示的(p'^μ)代入,得以速度$\boldsymbol{v}$ 作等速直线运动的带电粒子连同它周围的电磁场的能量和动量

$$E = p^0 c = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad \boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \tag{4.394}$$

表成四动量则是

$$p^\mu = mu^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{4.395}$$

(u^μ)为(4.353)定义的粒子的四速度.将(4.394)与(4.359)和(4.360)比较,或将(4.395)与(4.357)比较,可见等速直线运动带电粒子产生的电磁场对粒子的作用可表为将粒子'本身'的质量 m_0 换成粒子连同它周围的电磁场的质量 m,m_0 称为粒子的裸质量,m 可称粒子的着装质量,表示它'穿'了由电磁场做成的'衣服'.由于粒子周围恒有电磁场缭绕,实测的粒子质量是 m 而不是 m_0,m 因而又称粒子的物理质量.现在让我们记起 m 与 m_0 的差,即(4.389)表示的 m_e 乃是一无穷大.不过这不要紧,因为并没有人去测点粒子的 m_e,也没有人去测点粒子的 m_0,人们测量的是粒子的物理质量 m,只要 m 为有限值就可以了.为了使 m 有限,也由于 m_0 不是观察量,不妨设 m_0 为负无穷大,使(4.391)右边成为两个正无穷大的差,从而成为不定型.这个不定型不可能从理论上确定而只能由实测确定.将实测得到的带电粒子质量 m 代入到它的动力学方程中便已计及了它周围电磁场的

无穷大能量，在随后的理论计算中便不再计算这份能量的影响，这便是带电粒子质量的重整化.

(4.391)式中带电粒子物理质量 m 与裸质量 m_0 的差，即(4.389)表示的 m_e，称为此粒子的电磁质量. 它可表为

$$m_e c^2 = \frac{1}{2}\int \mathscr{E} \cdot \mathscr{D} d\mathscr{V}, \tag{4.396}$$

$\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{D}$ 为粒子静止时周围的电场强度和电位移矢量. 此式表明电磁质量乃是粒子静止时周围电场能量相应的质量. 由静电场的性质(2.1)、(2.2)和(2.30)，此式可变为

$$\begin{aligned} m_e c^2 &= -\frac{1}{2}\int (\nabla \phi) \cdot \mathscr{D} d\mathscr{V} = \frac{1}{2}\int \phi \rho d\mathscr{V} \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\mathscr{V} d\mathscr{V}', \end{aligned} \tag{4.397}$$

在第二等号处作了部分积分，积得的无穷远处表面积分为零. 此式表明电磁质量又是粒子各部分电荷间静电作用能相应的质量，或者说是粒子电磁自作用能相应的质量. 对一个有广延结构的粒子，若知道其中的电荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ 便可按(4.397)算出它的电磁质量. 例如对一个半径为 R 的均匀荷电的球，电荷密度 $\rho = q\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)^{-1}$ 为常数. 由展开式(2.31)和勒让德多项式的积分性质

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(\zeta) d\zeta = 2\delta_{l0}$$

得

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\mathscr{V} d\mathscr{V}' &= (4\pi)^2 2\int_0^R r\int_0^r r'^2 dr' dr \\ &= 2(4\pi)^2 \frac{R^5}{3 \cdot 5}. \end{aligned}$$

此球的电磁质量按(4.397)为

$$m_e = \frac{3}{5}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R c^2}, \tag{4.398}$$

只在 $R \to 0$，整个球缩为一点时，才有 $m_e \to \infty$. 一般说来带电粒子不一定是球形，电荷密度也不一定为常数，电磁质量便不一定如(4.398)所示，但总可写为

$$m_e = \eta \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R c^2}, \tag{4.399}$$

其中 R 为一长度量纲表征粒子尺度的量，η 为一量级在 10^0 上下的常数. 对均匀带电球，R 为其半径，$\eta = \frac{3}{5}$. 历史上洛伦兹等认为电子有非零尺度因而有有限电磁质量. 他们进一步设电子的电磁质量就是它的全部质量，因而可实验量出. 它们将电子质量表为

$$m_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e c^2}, \tag{4.400}$$

e 为基本电荷，电子电荷为 $-e$，r_e 称为电子的经典半径. 由此解得

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}. \tag{4.401}$$

在高斯单位制中 $4\pi\epsilon_0 = 1$，此式成为

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}, \tag{4.402}$$

这便是电子经典半径的常见公式. 将(1.1)、(1.7)和(1.89)表示的 e、ϵ_0 和 c 的值以及电子质量

$$m_e = 0.91093897 \times 10^{-30}\text{kg} \tag{4.403}$$

代入(4.401)得电子的经典半径

$$r_e = 2.8179409 \times 10^{-15}\text{m}. \tag{4.404}$$

对任意运动的带电粒子，它和它产生的电磁场的总四动量为由(4.373)表示的(P^μ)，其中的能量动量张量($\Theta^{\mu\nu}$)由(4.367)表示. (4.368)表明它是守恒量，

$$\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \mu = 0,1,2,3. \tag{4.405}$$

定义

$$\Pi^\mu \equiv p^\mu - P^\mu, \quad \mu = 0,1,2,3. \tag{4.406}$$

由于(p^μ)和(P^μ)都是四矢量，它们的差(Π^μ)必是四矢量. 于是可将(4.405)表为

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Pi^\mu}{\mathrm{d}t}, \quad \mu = 0,1,2,3. \tag{4.407}$$

此式的空间分量

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{4.408}$$

具有牛顿方程的形式，其中力

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Pi}}{\mathrm{d}t}; \tag{4.409}$$

时间分量则可表为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = c\,\frac{\mathrm{d}\Pi^0}{\mathrm{d}t}. \tag{4.410}$$

由(4.394)可得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}, \tag{4.411}$$

由(4.408)和(4.410)便得

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = c\,\frac{\mathrm{d}\Pi^0}{\mathrm{d}t}. \tag{4.412}$$

这表示(4.407)中的四个方程不是独立的,粒子的运动方程(4.408)保证了能量方程(4.410).在(4.407)两边乘 γ 得

$$\frac{\mathrm{d}p^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}=Q^{\mu},\quad \mu=0,1,2,3, \tag{4.413}$$

其中

$$Q^{\mu}=\frac{\mathrm{d}\Pi^{\mu}}{\mathrm{d}\tau},\quad \mu=0,1,2,3. \tag{4.414}$$

(4.413)将运动方程表成了四维矢量的形式,因而在洛伦兹变换下不变,这表明(4.408)为相对论的运动方程.由定义(4.386)和(4.406)知,(p^{μ})包含了匀速运动粒子的电磁场对能量动量的全部贡献,($-\Pi^{\mu}$)必是粒子因作加速运动而对电磁场能量动量的修正.这部分修正自然与粒子加速度有关因而代表电磁辐射.(4.409)定义的 $\boldsymbol{F}$ 遂与加速度对时间的微商 $\dot{\boldsymbol{a}}$ 有关,被称为辐射阻尼力,表示电磁辐射对粒子的反作用.在一个完全的运动方程中,在(4.408)右边还应加上外电磁场,即没有包含在(4.253)和(4.254)中的电磁场对带电粒子的作用力,和粒子受到的非电磁力.

§4.9 以同时量表推迟势,辐射阻尼力的非相对论表示

带电质点的推迟势(4.221)和(4.222)是质点轨道方程 $\boldsymbol{\xi}(t)$的泛函,与质点运动的整个历史有关.要用质点在 t 时刻的量表出 t 时刻的推迟势,首先必须用它在 t 时刻的量表出它直到 t 时刻的历史.这便是将轨道方程 $\boldsymbol{\xi}(t)$在 t 时刻作泰勒展开,将它在任意时刻的值用它在 t 时刻的值 $\boldsymbol{\xi}(t)$和在 t 时刻的各级微商 $\boldsymbol{v}(t)=\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)$、$\boldsymbol{a}(t)=\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t)$、$\dot{\boldsymbol{a}}(t)=\dddot{\boldsymbol{\xi}}(t)$、……等表达.就电磁场的能量动量四矢量及其对产生它的带电粒子运动的影响而言,只含粒子速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 的部分可以认为已由粒子质量的重整化考虑过了,因而只出现在运动方程(4.408)的左边.此方程右边的辐射阻尼力应含加速度 $\boldsymbol{a}$ 对时间的各次微商.运动方程若果真含加速度对时间的各次微商,也就没有意义了.因为这意味着求解这种微分方程的初条件不仅含质点的坐标和速度,而且含质点的加速度和加速度对时间的各次微商.而如果知道了任一给定时刻质点的坐标、速度、加速度和加速度对时间的各次微商,质点轨道方程的泰勒展开即完全确定,轨道方程完全确定因而不再需要什么运动方程.这一切表明的乃是带电粒子产生的电磁场有自己独立的自由度,带电粒子及其产生的电磁场的运动不能由带电粒子的运动方程完全表达.粒子的坐标、速度、加速度,以及加速度对时间的各次微商等无穷多初条件定下的也不只是粒子的运动,而且也定下了它产生的电磁场,其中就包含了无穷多的自由度.不过如果粒子轨道方程 $\boldsymbol{\xi}(t)$对时间的泰勒展开中只有有限几次幂项是重要的,其中只含加速度对时间的有限几次微商,含加速度对时间更高次微商的高次项很小,可以忽略不计,则仍

可得粒子的一个虽近似却有意义的运动方程. 下面看看辐射阻尼力只含加速度对时间的一次微商的情形.

以推迟时间$\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}$为增量,将推迟势(4.138)右边的电荷密度和(4.139)右边的电流密度矢量在时刻 t 对时间作泰勒展开. 要这一展开收敛快,$\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}$必须足够小,考察电磁场的位置 $\boldsymbol{r}$ 必须足够靠近有电荷电流密度分布的位置$\boldsymbol{r}'$,对一个带电粒子产生的电磁场则 $\boldsymbol{r}$ 必须足够靠近这个粒子. 在考虑粒子产生的电磁场对粒子自身作用的问题中这是可以满足的. 在此条件下可将(4.138)写为

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \phi_0(\boldsymbol{r},t) + \phi_1(\boldsymbol{r},t) + \phi_2(\boldsymbol{r},t) + \phi_3(\boldsymbol{r},t) + \cdots, \tag{4.415}$$

其中

$$\phi_0(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}' = \frac{q}{4\pi\epsilon R} \tag{4.416}$$

为电荷密度分布在 t 时刻的瞬时库仑势. 在末一等号处代入了点电荷的电荷密度分布(4.219),

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \tag{4.417}$$

$$\boldsymbol{r}_0 \equiv \boldsymbol{\xi}(t)$$

为 t 时刻带电粒子所在点的径矢.

$$\begin{aligned}\phi_1(\boldsymbol{r},t) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon}\int \frac{1}{u}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r}',t)}{\partial t}\mathrm{d}\mathscr{V}' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \rho(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\mathscr{V}' = 0,\end{aligned} \tag{4.418}$$

最后一个等号用到总电荷守恒.

$$\begin{aligned}\phi_2(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{8\pi\epsilon u^2}\int |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \frac{\partial^2\rho(\boldsymbol{r}',t)}{\partial t^2}\mathrm{d}\mathscr{V}' \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\rho(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\mathscr{V}' \\ &= \frac{q}{8\pi\epsilon u^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = \frac{q}{8\pi\epsilon u^2 R}\left[v^2 - \left(\frac{\boldsymbol{R}}{R}\cdot\boldsymbol{v}\right)^2 - \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{a}\right],\end{aligned} \tag{4.419}$$

在第三等号处代入了点电荷的电荷密度(4.219).

$$\begin{aligned}\phi_3(\boldsymbol{r},t) &= -\frac{1}{24\pi\epsilon u^3}\int |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2 \frac{\partial^3\rho(\boldsymbol{r}',t)}{\partial t^3}\mathrm{d}\mathscr{V}' \\ &= -\frac{1}{24\pi\epsilon u^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2\rho(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\mathscr{V}' \\ &= -\frac{q}{24\pi\epsilon u^3}\frac{\partial^3 R^2}{\partial t^3} = -\frac{q}{12\pi\epsilon u^3}(3\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} - \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{a}}),\end{aligned} \tag{4.420}$$

点电荷密度(4.219)也是在第三等号处代入的.在同样条件下可将(4.139)写为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r},t)+\cdots,\tag{4.421}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}'=\frac{\mu q\boldsymbol{v}}{4\pi R}\tag{4.422}$$

为 t 时刻电流密度分布产生的瞬时矢势,末一等号处代入了点电荷的电流密度矢量(4.220).

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r},t)&=-\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{1}{u}\frac{\partial\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)}{\partial t}\mathrm{d}\mathscr{V}'=-\frac{\mu}{4\pi u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\mathscr{V}'\\&=-\frac{q}{4\pi\epsilon u^3}\boldsymbol{a},\end{aligned}\tag{4.423}$$

末一等号处除代入了点电荷的电流密度矢量(4.220)外还用了关系(1.87).要注意,表达式(4.416)~(4.423)中 $\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 和 $\dot{\boldsymbol{a}}$ 都是考察电磁场的时刻 t 的同时量.计算到这一级近似的电磁场强度和它对产生此电磁场的带电粒子本身的作用力,即自作用力.如前所述,电磁自作用力中只与粒子速度、加速度有关的项都可移到运动方程(4.408)左边,并认为已由带电粒子质量重整化完全代表.实际要计算的只有与加加速度 $\dot{\boldsymbol{a}}$ 或加速度对时间的更高次微商有关的项.在标势 ϕ 到 ϕ_3,矢势 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{A}_1$,这一级的近似中这种项只有电场强度

$$\mathscr{E}'=-\nabla\phi_3-\frac{\partial\boldsymbol{A}_1}{\partial t}=\frac{q}{6\pi\epsilon u^3}\dot{\boldsymbol{a}}\tag{4.424}$$

和它对带电粒子的作用力

$$\boldsymbol{F}=q\mathscr{E}'=\frac{q^2}{6\pi\epsilon u^3}\dot{\boldsymbol{a}}.\tag{4.425}$$

这就是到这一级近似的辐射阻尼力.比较展开式(4.415)右边各项的大小.$\phi_1=0$ 且不计较,ϕ_2 与 ϕ_0 之比的量级可用$\frac{v^2}{u^2}$表示.这对(4.419)右边方括号内的前两项是显然的,注意到质点横向加速度 $a_\perp=\frac{v^2}{\xi}$,ξ 为该处轨道的曲率半径,便可估计第三项的量级 $Ra\approx v^2$.方括号内三项的量级同为 v^2.类似地可由(4.420)估计 $\left|\frac{\phi_3}{\phi_0}\right|\approx\frac{v^3}{u^3}$.(4.415)可看作是按$\frac{v}{u}$的幂次的展开.同样的分析表明(4.421)为矢势按$\frac{v}{u}$幂次的展开.在真空中这就是按$\frac{v}{c}$幂次的展开.在 $v\ll c$ 条件下这种展开能较快收敛,因此称非相对论展开,在其中只取前面少数几项的近似称非相对论近似.(4.425)为辐射阻尼力的非相对论表示.

计算辐射阻尼力(4.425)在从 t_1 到 t_2 时间中对粒子作的功

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{q^2}{6\pi\epsilon u^3}\dot{\boldsymbol{a}}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t=\frac{q^2}{6\pi\epsilon u^3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon u^3}\mathrm{d}t.$$

设粒子只在有限范围内运动，加速度的值 a 和速度的值 v 都有界，此式右边第一项遂有界.两边除以作用时间 $T\equiv t_2-t_1$ 并令 $T\to\infty$，右边第一项的贡献趋于零，因此

$$-\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2}\frac{q^2}{6\pi\epsilon u^3}\dot{\boldsymbol{a}}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2}\frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon u^3}\mathrm{d}t. \tag{4.426}$$

它表明粒子反抗阻尼力(4.425)输给电磁场的功率的长时间平均恰为 $\frac{v^2}{u^2}$ 可略条件下粒子辐射功率(4.268)的长时间平均.由推导过程知，(4.268)表示的并不是粒子辐射瞬间的能量平衡，而是辐射经无穷长时间到达无穷远处后的能量平衡，它与辐射阻尼力间本来只有平均关系.可以认为辐射阻尼力的非相对论表示(4.425)与低速运动质点辐射功率的表示(4.268)是自洽的.

§4.10 带电粒子在外力和辐射阻尼力作用下的运动，对电磁波的吸收、辐射和散射，谱线宽度

设质量为 m 电荷为 q 的质点在一恒定力场的稳定平衡点附近作小幅度运动.除此恒定力场外质点还受远处传来的电磁波的电磁力和自身的辐射阻尼力的作用.对平衡位置附近的小幅运动可将力场按相对平衡点位移的幂次展开.设恒定力场各向同性.取到展开式的一次项得弹性恢复力

$$\boldsymbol{F}_1=-K\boldsymbol{r}, \tag{4.427}$$

质点径矢 $\boldsymbol{r}$ 的原点取在力场的平衡位置，K 为弹性模数.设远处来的电磁波为(1.83)表示的平面波，按(1.84)～(1.86)其中

$$\mathscr{B}_0\equiv\mu\mathscr{H}_0=\frac{1}{u}\mathscr{E}_0. \tag{4.428}$$

由此式和(1.90)知，电磁波中电场对质点的作用力 $q\boldsymbol{\mathscr{E}}$ 的量级与磁场对质点作用力 $q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 的量级之比为 $1:\frac{v}{u}$，$\boldsymbol{v}$ 为质点速度.小幅运动质点速度必定也小，设它远小于光速 u，$\frac{v}{u}\ll1$ 为小量.略去 $\frac{v}{u}$ 的一切正幂次项，电磁波中磁场对质点的作用力便被略去，只剩下电场的作用力

$$q\boldsymbol{\mathscr{E}}=q\boldsymbol{\mathscr{E}}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t).$$

弹性力(4.427)单独作用下质点作简谐振动，角频率为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{K}{m}}, \tag{4.429}$$

称为振子的固有角频率.设它沿 x 方向作一维振动，振幅为 x_0，则能量为 $\frac{1}{2}Kx_0^2=\frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2$；另一方面设它的最大速度为 v_0，则能量又可表为 $\frac{1}{2}mv_0{}^2$.可见 $x_0=\frac{v_0}{\omega_0}$

$\ll \dfrac{u}{\omega_0}$. 电磁波对质点作用的电磁力导致质点的强迫振动，是一种强迫力. 只当电磁波的角频率 ω 接近振子的固有角频率 ω_0 时才对质点运动有明显影响. 在此条件下 $\omega \sim \omega_0$,

$$x_0 \ll \frac{u}{\omega} = \frac{u}{2\pi\nu} = \frac{\lambda}{2\pi} \equiv \lambdabar. \tag{4.430}$$

它表明质点运动幅度远小于电磁波的波长 λ. 换句话说，在电磁波对带电粒子有显著影响的情形中，它的波长 λ 与粒子运动的幅度相比可视为无穷大，平面波(1.83)中波矢量的长度

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\lambdabar} \tag{4.431}$$

则可视为零. 电磁波(1.83)对带电粒子的作用力遂为

$$\boldsymbol{F}_2 = -q\boldsymbol{\mathscr{E}}_0 \sin(\omega t). \tag{4.432}$$

在弹性恢复力(4.427)、电磁力(4.432)和辐射阻尼力(4.425)的作用下带电粒子的非相对论运动方程可写为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + {\omega_0}^2 \boldsymbol{r} - \frac{\Gamma}{{\omega_0}^2} \dddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{q}{m} \boldsymbol{\mathscr{E}}_0 \sin(\omega t), \tag{4.433}$$

其中

$$\Gamma = \frac{q^2 {\omega_0}^2}{6\pi\epsilon m u^3} \tag{4.434}$$

具频率量纲. (4.433)为常系数线性非齐次常微分方程，它的通解可表为它的一个特解和齐次方程

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2 \boldsymbol{r} - \frac{\Gamma}{\omega_0^2} \dddot{\boldsymbol{r}} = 0 \tag{4.435}$$

的通解的叠. 这个方程的系数都是实数，因此可将解写成复形式，解得后再取它的实部. 令

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\zeta} e^{\Omega t}, \tag{4.436}$$

代入上式得代数方程

$$\Omega^2 + \omega_0^2 - \frac{\Gamma}{\omega_0^2} \Omega^3 = 0.$$

经整理得

$$\Gamma \Omega^3 - \omega_0^2 \Omega^2 - \omega_0^4 = 0. \tag{4.437}$$

对普通介质，光速 u 接近真空中的光速 c. 在电磁波对带电粒子有显著作用的情形中 $\omega \approx \omega_0$. 若粒子为电子，则按(4.434)

$$\frac{\Gamma}{\omega_0} \approx \frac{2}{3} r_e \frac{\omega}{c} = \frac{2}{3} \frac{r_e}{\lambdabar}. \tag{4.438}$$

可见光波长 $4 \times 10^{-7} \sim 8 \times 10^{-7}$m，远大于(4.404)表示的电子经典半径. 实际上除

硬γ射线外,所有电磁波波长均比电子经典半径大得多.而γ射线已不能用经典电动力学讨论.因此按(4.438),在经典电动力学有意义的一切场合$\frac{\Gamma}{\omega_0}\ll 1$为小量.这使得不必用根式严格表出(4.437)的根.若Γ完全可略,(4.437)可略为$\Omega^2+\omega_0^2=0$,根为

$$\Omega = \pm \mathrm{i}\omega_0. \tag{4.439}$$

若将Γ当小量,可将此根作零级近似代入(4.437)的第一项,得一级近似方程

$$\Omega^2 + {\omega_0}^2 \pm \mathrm{i}\omega_0\Gamma = 0, \tag{4.440}$$

根为

$$\begin{aligned}\Omega &= \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 \pm \mathrm{i}\omega_0\Gamma} = \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1 \pm \mathrm{i}\frac{\Gamma}{\omega_0}} = \pm \mathrm{i}\left(\omega_0 \pm \mathrm{i}\frac{\Gamma}{2}\right) \\ &= \pm \mathrm{i}\omega_0 - \frac{\Gamma}{2},\end{aligned} \tag{4.441}$$

在第三等号处将根式作了以$\frac{\Gamma}{\omega_0}$为小量的幂级数展开,取到一次项.在此近似下可以

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{\zeta}_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t - \frac{\Gamma}{2}t} + \boldsymbol{\zeta}_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t - \frac{\Gamma}{2}t} \tag{4.442}$$

为齐次方程(4.435)的通解,$\boldsymbol{\zeta}_1$和$\boldsymbol{\zeta}_2$为积分常矢量.此解的两项除简谐振动因子外都有一指数衰减因子,是辐射阻尼力引起的.将非齐次方程(4.433)写成复形式得

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2\boldsymbol{r} - \frac{\Gamma}{\omega_0^2}\dddot{\boldsymbol{r}} = -\mathrm{i}\frac{q}{m}\boldsymbol{\mathscr{E}}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{4.443}$$

此式两边取实部即还原成(4.433),因此解的实部即(4.433)的解.将它的解写为

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{\zeta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{4.444}$$

代入(4.443),约去简谐因子$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$得

$$[\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\Gamma']\boldsymbol{\zeta} = -\mathrm{i}\frac{q}{m}\boldsymbol{\mathscr{E}}_0,$$

其中

$$\Gamma' = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\Gamma. \tag{4.445}$$

由此得

$$\boldsymbol{\zeta} = -\mathrm{i}\frac{q}{m}\frac{\boldsymbol{\mathscr{E}}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\Gamma'}. \tag{4.446}$$

将此式代回(4.444)即得(4.443)的一个特解,它的通解遂为

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{\zeta}_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t - \frac{\Gamma}{2}t} + \boldsymbol{\zeta}_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t - \frac{\Gamma}{2}t} + \mathrm{i}\frac{q}{m}\frac{\boldsymbol{\mathscr{E}}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + \mathrm{i}\omega\Gamma'}. \tag{4.447}$$

设起始时刻$t=0$粒子是静止的,

$$\boldsymbol{r}(0) = 0, \quad \dot{\boldsymbol{r}}(0) = 0. \tag{4.448}$$

将此初条件加在通解(4.447)上定得积分常矢量

$$\left.\begin{aligned}\zeta_1 &= \left[\frac{\Gamma}{4\omega_0} - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]\frac{q}{m}\frac{\mathscr{E}_0}{\omega^2 - \omega_0^2 + \mathrm{i}\omega\Gamma'},\\ \zeta_2 &= -\left[\frac{\Gamma}{4\omega_0} + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]\frac{q}{m}\frac{\mathscr{E}_0}{\omega^2 - \omega_0^2 + \mathrm{i}\omega\Gamma'}.\end{aligned}\right\} \tag{4.449}$$

将它们代回(4.447)得到的特解表示起始时粒子静止,随后在强迫力(4.432)作用下开始运动.起始的静止被表示为(4.447)右边三项互相抵消的结果.随后的运动表现为两种振动的叠加.前两项表示以振子固有频率 ω_0 的振动,第三项表示以强迫力频率 ω 的振动.前两项振动缓慢衰减,最后消失,只剩下强迫力引起的振动,即(4.447)右边的第三项.如果强迫力是稳定的,最后剩下的便是一稳定的强迫振动.

看看这一过程的能量平衡.开始粒子从入射电磁波获取能量,一方面增加自己的振幅,另一方面向周围辐射电磁波.在振幅达到饱和之前,它以两种频率振动,因而会发射两种频率的电磁波.一是振子的固有频率 ω_0,这种频率电磁波的辐射称为振子吸收入射电磁波后的辐射.粒子从入射电磁波获取能量以增长自己的振幅并发射自己固有频率的电磁波的过程称为吸收过程.这过程到它达到饱和振幅为止.另一是入射电磁波频率 ω,这种频率电磁波的吸收和辐射称为振子对入射电磁波的散射,一直延续到它达到饱和振幅之后.达到饱和后(4.447)右边前两项消失,取第三项的实部得粒子径矢

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{q\,\mathscr{E}_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\Gamma')^2}}\sin(\omega t + \delta), \tag{4.450}$$

其中

$$\delta \equiv \arctan\frac{\omega\Gamma'}{\omega^2 - \omega_0^2} \tag{4.451}$$

为强迫振动中的相位移.粒子速度为

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{q\omega\,\mathscr{E}_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\Gamma')^2}}\cos(\omega t + \delta); \tag{4.452}$$

能量为

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2\\ &= \frac{q^2\omega_0^2\,\mathscr{E}_0^2}{2m[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\Gamma')^2]}\left[1 + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2}\cos^2(\omega t + \delta)\right],\end{aligned} \tag{4.453}$$

在平均能量

$$\overline{E} = \frac{q^2(\omega^2 + \omega_0^2)\,\mathscr{E}_0^2}{4m[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\Gamma')^2]} \tag{4.454}$$

上下涨落.这便是振子达到饱和振幅从入射电磁波吸收的能量.取(4.447)前两项

的实部,得径矢量

$$\boldsymbol{r}_0(t) \equiv \frac{\boldsymbol{\zeta}_1 + \boldsymbol{\zeta}_2^*}{2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t - \frac{\Gamma}{2}t} + \frac{\boldsymbol{\zeta}_1^* + \boldsymbol{\zeta}_2}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t - \frac{\Gamma}{2}t}, \tag{4.455}$$

它代表粒子以固有频率 ω_0 的振动.将(4.449)代入此式得相应的电偶极振动

$$\mathscr{P}_0(t) = q\boldsymbol{r}_0(t) = \mathscr{P}_0(\omega_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} + \mathscr{P}_0^*(\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}, \tag{4.456}$$

其中

$$\mathscr{P}_0(\omega_0) = -\left[\sin\delta + \mathrm{i}\left(\frac{\Gamma}{2\omega_0}\sin\delta + \frac{\omega}{\omega_0}\cos\delta\right)\right]\frac{q^2\mathscr{E}_0\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t}}{2m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\Gamma')^2}}. \tag{4.457}$$

由于 $\Gamma \ll \omega_0$,在以角频率 ω_0 振动一周期中因子 $\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t}$ 几乎是不变的,(4.456)表示的是一近似的简谐偶极振动.按(4.179)它的平均辐射强度为

$$\bar{\mathscr{I}}_0 = \frac{q^4\mathscr{E}_0^2\omega_0^4}{12\pi\epsilon m^2 u^3}\frac{\left(1 + \frac{\Gamma^2}{4\omega_0^2}\right)\sin^2\delta + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\cos^2\delta + \frac{\omega\Gamma}{2\omega_0^2}\sin(2\delta)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\Gamma'^2}\mathrm{e}^{-\Gamma t}. \tag{4.458}$$

从 $t=0$ 到 $t=\infty$,这种振动共辐射出能量

$$E_0 = \int_0^\infty \bar{\mathscr{I}}_0(t)\mathrm{d}t = \frac{q^4\mathscr{E}_0^2\omega_0^4}{12\pi\epsilon m^2 u^3\Gamma}\frac{\left(1 + \frac{\Gamma^2}{4\omega_0^2}\right)\sin^2\delta + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\cos^2\delta + \frac{\omega\Gamma}{2\omega_0^2}\sin(2\delta)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\Gamma'^2}. \tag{4.459}$$

它们自然都要从入射电磁波吸收.于是在达到饱和振幅之前带电粒子从入射电磁波吸收的能量为此式与(4.454)表示的能量之和,即

$$E_a = \bar{E} + E_0 = \frac{C_a(\omega)q^2\mathscr{E}_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\Gamma'^2}, \tag{4.460}$$

其中

$$C_a(\omega) \equiv \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{4m} + \frac{(4\omega_0^4 + \omega_0^2\Gamma^2)\sin^2\delta + (2\omega_0\omega)^2\cos^2\delta + 2\omega_0^2\omega\Gamma\sin(2\delta)}{48\pi\epsilon m^2 u^3\Gamma}q^2 \tag{4.461}$$

为 ω 的缓变函数.对 $\omega \sim \omega_0$ 的入射电磁波 $\Gamma' \sim \Gamma$,(4.460)可近似地表为

$$E_a = \frac{C_a'(\omega_0)q^2\mathscr{E}_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \tag{4.462}$$

其中 $C_a'(\omega_0) \equiv \frac{C_a(\omega_0)}{(2\omega_0)^2}$.由于 Γ 很小,在 $\omega = \omega_0$ 处粒子对入射电磁波能量的吸收达到一个很高的峰值

$$E_{am} = \frac{4C_a'(\omega_0)q^2\mathscr{E}_0^2}{\Gamma^2}, \tag{4.463}$$

称共振吸收，ω_0 因而又称共振频率．若入射电磁波频率 ω 偏离共振频率，吸收能量便显著下降，形成一共振峰(图 4-3)．入射频率与共振频率差 $|\omega - \omega_0| = \frac{\Gamma}{2}$ 处吸收能量降到峰值的一半．共振频率两侧吸收能量降到峰值一半的入射频率差 Γ 称为共振峰的宽度，简称共振宽度．实际入射电磁波不会是绝对单色的，总有一频率分布谱．若入射频谱没有覆盖共振频率 ω_0 便不会有明显的吸收．若入射频谱覆盖了共振频率，它通过由这种带电振子组成的物质后便会在亮的频谱背景上出现一条暗线，称为吸收谱线．这谱线中心位置在共振频率 ω_0 处，线宽 Γ．由于带电粒子恒受辐射阻尼，谱线恒有一宽度，称自然宽度．

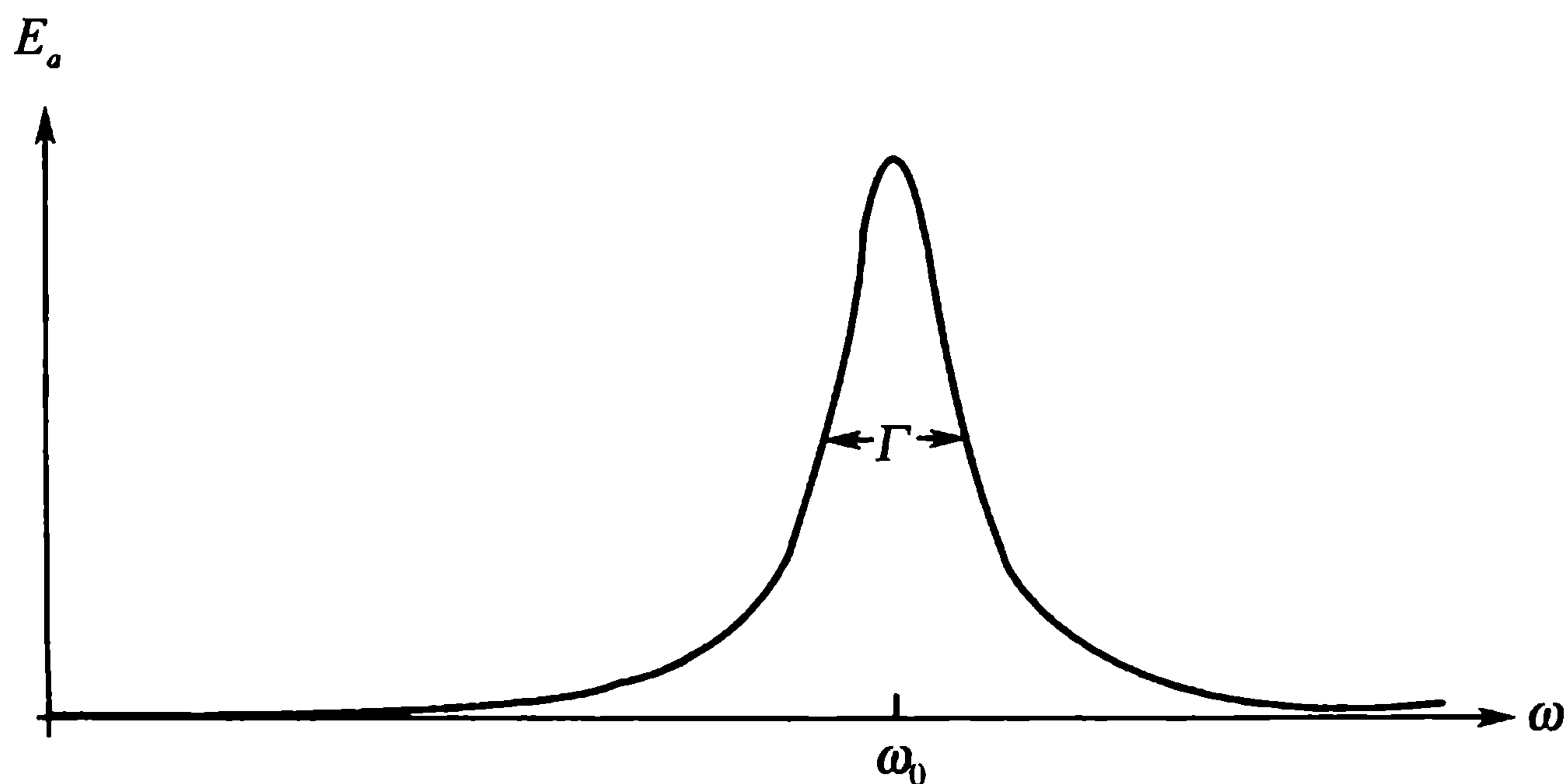


图 4-3　共振吸收

取(4.447)右边第三项的实部，得径矢量

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \frac{q\,\boldsymbol{\mathscr{E}}_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\Gamma')^2}}\sin(\omega t + \delta), \tag{4.464}$$

相应的电偶极振动为

$$\mathscr{P}_1(t) = q\boldsymbol{r}_1(t) = \mathscr{P}_1(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathscr{P}_1^*(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{4.465}$$

其中

$$\mathscr{P}_1(\omega) = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}q^2\,\boldsymbol{\mathscr{E}}_0}{2m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\Gamma')^2}}. \tag{4.466}$$

按(4.179)，平均单位时间它发射的电磁波能量为

$$\bar{\mathscr{I}}_1 = \frac{q^4\mathscr{E}_0^2}{12\pi\epsilon m^2u^3}\frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\Gamma'^2}. \tag{4.467}$$

另一方面，(1.83)表示的入射平面电磁波的坡印亭矢量为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\mathscr{E}}_0 \times \boldsymbol{\mathscr{H}}_0 \sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mu\omega} \mathscr{E}_0 \times (\boldsymbol{k} \times \mathscr{E}_0) \sin^2(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \\
&= \epsilon \mathscr{E}_0^2 u \sin^2(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \boldsymbol{k}_0,
\end{aligned} \tag{4.468}
$$

其中 $\boldsymbol{k}_0 = \dfrac{\boldsymbol{k}}{k}$ 为电磁波传播方向的单位矢量. 推导中在第二等号处用了(1.85),第三等号处用了(1.86)和(1.87). 这是一个时间和空间坐标的周期函数. 在一周期内平均,得单位时间通过与 $\boldsymbol{k}_0$ 垂直的单位面积的平均能量

$$
\overline{S} = \frac{\epsilon \mathscr{E}_0^2}{2} u. \tag{4.469}
$$

由此可定义带电振子对入射电磁波的散射截面

$$
\sigma \equiv \frac{\overline{\mathscr{I}}_1}{\overline{S}} = \frac{q^4}{6\pi\epsilon^2 m^2 u^4} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma'^2}. \tag{4.470}
$$

如果被弹性恢复力(4.427)束缚的是一个电子,它在真空中对电磁波的散射截面按(4.401)可表为

$$
\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma'^2}, \tag{4.471}
$$

这在历史上是一个著名的散射截面公式. 此式含与(4.460)右边类似的共振因子,在 $\omega \approx \omega_0$ 从而 $\Gamma' \approx \Gamma$ 条件下可近似表为

$$
\sigma = \frac{2\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\dfrac{\Gamma}{2}\right)^2}. \tag{4.472}
$$

散射截面也在振子的固有频率 ω_0 处有一宽为 Γ 的共振峰. 对自由电子,(4.427)右边的力常数 $K = 0$,从而 $\omega_0 = 0$. 若忽略辐射阻尼力,(4.433)左边第三项为零,从而 $\Gamma' = 0$. (4.471)表明在此近似下自由电子对电磁波的散射截面为

$$
\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2, \tag{4.473}
$$

这便是著名的汤姆孙[①]散射截面公式.

设粒子在 $t \leqslant 0$ 时静止于平衡位置 $\boldsymbol{r} = 0$ 处. 在 $t = 0$ 时刻受一冲击力偏离平衡位置而运动. 在 $t > 0$ 时没有外来电磁波对它作用,它在弹性力(4.427)和辐射阻尼力(4.425)作用下继续运动,并辐射电磁波. 它的运动方程为齐次方程(4.435),通解为(4.442). 为保证径矢为实的,应将它的轨道方程写为

$$
\boldsymbol{r}(t) = \begin{cases} 0, & \text{若 } t \leqslant 0, \\ \boldsymbol{\zeta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t - \frac{\Gamma}{2} t} + \boldsymbol{\zeta}^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t - \frac{\Gamma}{2} t}, & \text{若 } t > 0, \end{cases} \tag{4.474}
$$

$\boldsymbol{\zeta}$ 为积分常矢量. 将此式右边展成傅里叶积分,乘以电荷 q 后得电偶极矩

---

① Thomson.

$$\mathscr{P}(t) \equiv q\boldsymbol{r}(t) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{P}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega, \tag{4.475}$$

其中傅里叶系数

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\omega) &= q\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{r}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = q\int_{0}^{\infty} \boldsymbol{r}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= q\left[\frac{\boldsymbol{\zeta}}{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)-\frac{\Gamma}{2}} + \frac{\boldsymbol{\zeta}^*}{\mathrm{i}(\omega+\omega_0)-\frac{\Gamma}{2}}\right].\end{aligned} \tag{4.476}$$

将电流密度矢量 $\boldsymbol{j}$、矢势 $\boldsymbol{A}$、(4.146)定义的$\mathscr{E}_1$和磁场强度$\mathscr{H}$都写成傅里叶积分的形式,

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{j}(\omega,\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega, \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{A}(\omega,\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega, \\ \mathscr{E}_1(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{E}_1(\omega,\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega, \\ \mathscr{H}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{H}(\omega,\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega,\end{aligned}\right\} \tag{4.477}$$

其中的傅里叶系数间有关系(4.153)、(4.154)、(4.158)~(4.160),那里 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$、$\mathscr{E}_1(\boldsymbol{r})$和 $\mathscr{H}(\boldsymbol{r})$分别为 $\boldsymbol{j}(\omega,\boldsymbol{r})$、$\boldsymbol{A}(\omega,\boldsymbol{r})$、$\mathscr{E}_1(\omega,\boldsymbol{r})$和$\mathscr{H}(\omega,\boldsymbol{r})$的简写. (4.430)表明此处偶极近似条件成立,可用(4.167)代替(4.160). 将(4.475)和(4.477)的第一式代入(4.168)的两边即得(4.171). 利用这些关系可从(4.476)和(4.477)得无穷远处

$$\mathscr{E}_1(\omega,\boldsymbol{r}) = \frac{\mu\omega^2 q}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left[\frac{\boldsymbol{\zeta}}{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)-\frac{\Gamma}{2}} + \frac{\boldsymbol{\zeta}^*}{\mathrm{i}(\omega+\omega_0)-\frac{\Gamma}{2}}\right], \tag{4.478}$$

$$\mathscr{H}(\omega,\boldsymbol{r}) = \frac{k\omega q}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left[\frac{\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{\zeta}}{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)-\frac{\Gamma}{2}} + \frac{\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{\zeta}^*}{\mathrm{i}(\omega+\omega_0)-\frac{\Gamma}{2}}\right], \tag{4.479}$$

$\boldsymbol{r}_0 = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$为径向单位矢量. 发射到 $\boldsymbol{r}$ 方向单位立体角的电磁波能量为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\Omega} &= \int_0^{\infty} \lim_{r\to\infty}[r^2\mathscr{E}_1(\boldsymbol{r},t)\times\mathscr{H}(\boldsymbol{r},t)]\cdot\boldsymbol{r}_0\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{r\to\infty}[r^2\mathscr{E}_1^*(\boldsymbol{r},t)\times\mathscr{H}(\boldsymbol{r},t)]\cdot\boldsymbol{r}_0\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\lim_{r\to\infty}[r^2\mathscr{E}_1^*(\omega,\boldsymbol{r})\times\mathscr{H}(\boldsymbol{r},t)]\cdot\boldsymbol{r}_0\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{r\to\infty}[r^2\mathscr{E}_1^*(\omega,\boldsymbol{r})\times\mathscr{H}(\omega,\boldsymbol{r})]\cdot\boldsymbol{r}_0\mathrm{d}\omega. \tag{4.480}$$

无穷远处电场强度和磁场强度的频谱(4.478)(4.479)具共振结构. 由于 $\omega_0\gg\Gamma>0$,其中方括号内第一项只在$|\omega-\omega_0|\approx\Gamma$ 的频率区间中显著非零,在其他频率区间中的值与此区间中的值相比可忽略;方括号内第二项只在$|\omega+\omega_0|\approx\Gamma$ 的频率区间中显著非零,在其他频率区间中的值与此区间中的值相比可以忽略. 将它们代入此式,对 ω 在$(0,\infty)$区间的积分可在方括号中只取第一项,在$(-\infty,0)$区间的积分可在方括号中只取第二项. 两区间的积分可合并,得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{q^2}{16\pi^3\epsilon u^3}(|\boldsymbol{\zeta}|^2-|\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{r}_0|^2)\int_0^{\infty}\frac{\omega^4}{(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}\mathrm{d}\omega, \tag{4.481}$$

推导中还用了(4.124)和(1.87). 由于被积函数只在 $\omega\approx\omega_0$ 处显著非零,$|\omega-\omega_0|\gg\Gamma$ 处的贡献可略,此式可近似为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\Omega}&=\frac{q^2\omega_0^4}{16\pi^3\epsilon u^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}(|\boldsymbol{\zeta}|^2-|\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{r}_0|^2)\\&=\frac{q^2\omega_0^4}{8\pi^3\epsilon u^3\Gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^2+1}(|\boldsymbol{\zeta}|^2-|\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{r}_0|^2)\\&=\frac{q^2\omega_0^4}{8\pi^3\epsilon u^3\Gamma}(|\boldsymbol{\zeta}|^2-|\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{r}_0|^2),\end{aligned} \tag{4.482}$$

第二等号处作了积分变量变换 $\xi=2\frac{\omega-\omega_0}{\Gamma}$. 对立体角积分即得辐射总能量

$$\begin{aligned}E&=\int_{4\pi}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega=\frac{q^2\omega_0^4}{8\pi^2\epsilon u^3\Gamma}\int_{4\pi}(|\boldsymbol{\zeta}|^2-|\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{r}_0|^2)\mathrm{d}\Omega\\&=\frac{\omega_0^4}{3\pi\epsilon u^3\Gamma}|q\boldsymbol{\zeta}|^2,\end{aligned} \tag{4.483}$$

其中用到积分公式(4.176)和(4.178). (4.481)或(4.482)中对 ω 的积分的被积函数表现出带电振子辐射电磁波的能量随频率的分布,即辐射频谱. 它集中在振子固有频率附近宽为 Γ 的极窄的频率区域中,称为谱线. 谱线的结构与前面讲过的吸收谱线相同. 不过吸收谱线为暗线,辐射谱线则为亮线. 由于能量守恒,不可避免地会出现辐射阻尼力,这便使谱线,不论是吸收谱线还是辐射谱线,具有一自然宽度 Γ.

从另一方面看,(4.475)表明 $t>0$ 时可将振子的电偶极矩表为

$$\mathscr{P}(t)=\mathscr{P}(\omega_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}+\mathscr{P}^*(\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}, \tag{4.484}$$

其中

$$\mathscr{P}(\omega_0)=q\boldsymbol{\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t} \tag{4.485}$$

在振子振动的若干周期内可视为常矢量.代入(4.179)得单位时间内振子平均辐射能量为

$$\bar{\mathscr{I}} = \frac{\omega_0^4}{3\pi\epsilon u^3} \mid q\zeta \mid^2 \mathrm{e}^{-\Gamma t}. \tag{4.486}$$

将此式右边对时间 t 从 0 到∞积分,同样得辐射总能量(4.483).在这一推导中明显看到的是平均辐射强度随时间的衰减.称衰减到初值的$\frac{1}{\mathrm{e}}$的时间 τ 为辐射寿命,由(4.486)可看出

$$\Gamma\tau = 1, \quad \tau = \frac{1}{\Gamma}, \tag{4.487}$$

辐射寿命与谱线宽度有简单反比关系.

§4.11 色散现象的物理内含,因果性与克拉默斯①-克勒尼希②色散关系

§4.7 提到色散现象及其对理解切连科夫辐射的重要性.本节介绍色散现象本身的物理内容和规律.先看交变电磁场的$\mathscr{D}$与$\mathscr{E}$和$\mathscr{B}$与$\mathscr{H}$间的关系.静电学的关系(2.127)在交变电磁场中可能不再成立.其中$\mathscr{D}$与$\mathscr{E}$的关系(2.130)应改为

$$\mathscr{D} = \epsilon_0 \mathscr{E} + \boldsymbol{P}, \tag{4.488}$$

ϵ_0 为真空介电常数,$\boldsymbol{P}$ 为(2.123)定义的极化强度.此式只以(2.128)、(2.126)和(1.70)为基础,它们对交变电磁场成立,此式便也对交变电磁场成立.交变电磁场与静电场的差别在这里只表现为对(2.127)的修改.静磁学中与(4.488)相当的关系为(3.66).此式的基础为(1.34)、(1.38)和(1.32).其中(1.38)和(1.32)在交变电磁场中均不成立.(1.32)被修改为(1.73).将(4.488)代入其中得

$$\nabla \times \mathscr{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t}.$$

将介质看成一电荷电流分布,与此式相当的真空电动力学方程为

$$\nabla \times \frac{\mathscr{B}}{\mu_0} = \boldsymbol{j}_t + \epsilon_0 \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t}.$$

从中减去上式并利用(1.34)得

$$\nabla \times \left(\frac{\mathscr{B}}{\mu_0} - \mathscr{H}\right) = \boldsymbol{j}_m - \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \equiv \boldsymbol{j}_m'.$$

(2.126)与束缚电荷电流密度的连续性方程保证 $\boldsymbol{j}_m'$ 无散从而使此式自洽,且保证

---

① H. A. Kramers, Atti. Congr. Inter. Fisici, Com. **2** (1927)545.

② R. Kronig, J. Opt. Soc. Amer. **12** (1926)547.

存在矢量 $\boldsymbol{M}$ 满足

$$\boldsymbol{j}_m' = \nabla \times \boldsymbol{M}. \tag{4.489}$$

在交变电磁场中介质的磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 可由此式重新定义，以代替(1.38). 现在的束缚电流密度

$$\boldsymbol{j}_m = \boldsymbol{j}_m' + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}. \tag{4.490}$$

$\boldsymbol{j}_m'$只是其中的一部分. 按(4.489)重新定义的磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 与$\mathscr{B}$和$\mathscr{H}$之间仍符合关系(3.66). 比较一下介质中的束缚电流密度(4.490)右边两项的大小. 第一项 $\boldsymbol{j}_m'$为磁场在介质中诱发的束缚电流，第二项$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$为电场在介质中诱发的束缚电流. 上节已估计电磁波对物质的作用中，磁场作用力比电场作用力小. 将介质当作电荷电流分布，用真空电动力学估计这两种力大小之比为$\frac{v}{c}$，v 为介质内部带电粒子速度的量级. 此外，电场可直接改变介质内的电偶极矩和极化强度，从而直接诱发其中的束缚电流$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$；磁场却只能因与不同取向磁矩作用能不同，经弛豫过程使磁矩方向靠拢磁场方向以增加磁化强度，从而间接诱发介质内的束缚电流 $\boldsymbol{j}_m'$. 弛豫是慢过程，达到平衡的弛豫时间比电磁波周期长得多. 高频电磁波中的磁场未及导致介质的显著磁化就变了方向，以致不能产生显著的磁化电流 $\boldsymbol{j}_m'$. 对交变电磁场中的介质，以上两个因素使(4.490)右边第一项 $\boldsymbol{j}_m'$比第二项$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$小得多. 在高频极限下可认为 $\boldsymbol{j}_m' = 0$，从而按(4.489)和(3.66)有 $\mu = \mu_0$，色散现象只表现为介电常数 ϵ 与电磁波频率ω 的关系.

径矢量为 $\boldsymbol{r}$ 处t 时刻的极化强度$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t)$为 $\boldsymbol{r}$ 处电场引起. t 时刻以后的电场自然不会影响该处t 时刻的极化强度，t 时刻以前的电场却能影响该处t 时刻的极化强度. $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t)$是介质在 $\boldsymbol{r}$ 处的电荷分布在该处电场作用下直到t 时刻的演化结果，因此可表为

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t) = \epsilon_0 \int_0^{\infty} f(t') \mathscr{E}(\boldsymbol{r}, t - t') \mathrm{d}t', \tag{4.491}$$

$f(t')$为介质的一个特征函数，表示 t'时间前电场对介质极化的影响. 作傅里叶分解

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{E}(\omega, \boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega, \\ \mathscr{D}(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{D}(\omega, \boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega, \\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{P}(\omega, \boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega. \end{aligned}\right\} \tag{4.492}$$

将其中第一、三两式代入(4.491)，可将它表为傅里叶分量间的关系

$$\boldsymbol{P}(\omega,\boldsymbol{r}) = \epsilon_0\chi(\omega)\mathscr{E}(\omega,\boldsymbol{r}), \tag{4.493}$$

其中

$$\chi(\omega) \equiv \int_0^\infty e^{i\omega t} f(t)\mathrm{d}t. \tag{4.494}$$

(4.488)因而可写成

$$\mathscr{D}(\omega,\boldsymbol{r}) = \epsilon(\omega)\mathscr{E}(\omega,\boldsymbol{r}), \tag{4.495}$$

其中

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1+\chi(\omega)). \tag{4.496}$$

在交变电磁场中应以(4.493)、(4.495)和(4.496)分别代替(2.127)、(1.74)的第一式和(2.131). 傅里叶分量一般为复数. 由于 $f(t)$为实函数,(4.494)表示 $\chi^*(\omega) = \chi(-\omega)$,而(4.496)则表明

$$\epsilon^*(\omega) = \epsilon(-\omega). \tag{4.497}$$

作分解

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_1(\omega) + i\epsilon_2(\omega), \tag{4.498}$$

ϵ_1 和 ϵ_2 分别为 ϵ 的实部和虚部. 代入上式得

$$\epsilon_1(\omega) = \epsilon_1(-\omega), \quad \epsilon_2(\omega) = -\epsilon_2(-\omega), \tag{4.499}$$

ϵ_1 和 ϵ_2 分别为 ω 的偶函数和奇函数. ϵ 为复数使 $u = \sqrt{\epsilon\mu}$ 为复数,从而使 $k = \frac{\omega}{u}$ 为复数. 亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

的平面波解

$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

当

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 + i\boldsymbol{k}_2$$

为复矢量时成为

$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r} - \boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}},$$

其中 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 皆为实矢量. 此解除一平面波因子 $e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}}$外还有一沿 $\boldsymbol{k}_2$ 方向衰减的因子 $e^{-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}}$. 可见 ϵ 出现虚部表示介质吸收电磁波. 考虑 $\omega\to 0$ 的极限,在此极限下交变电磁场趋于静电场和静磁场. 若介质为绝缘体,不会吸收静电场和静磁场,在 $\omega\to 0$的极限下 $\epsilon_2\to 0$. 在同一极限下 ϵ_1 趋于静电学中的介电常数. ϵ 在 $\omega=0$ 处有良好行为,便可展成 ω 的幂级数. ϵ_1 为 ω 的偶函数,展成的幂级数只含 ω 的偶次项,最低次项为零次项,等于静电学中的介电常数. ϵ_2 为 ω 的奇函数,展成的幂级数只含 ω 的奇次项,最低次项为一次项,在 $\omega\to 0$ 条件下确有 $\epsilon_2\to 0$. 导体中的情形则不同,其中的任何电场都会引起电流,而电荷流动的结果则是抵消其中的电

场.即是说,导体能吸收非交变电场,$\omega \to 0$ 极限下 ϵ_2 并不趋于零.如果将电场在导体内引起的电流算作介质中的"束缚"电流而不算作外电流,其中的电磁感应方程(1.73)成为

$$\nabla \times \mathscr{H} = \frac{\partial \mathscr{D}}{\partial t},$$

对频率为 ω 的电磁场则成为

$$\nabla \times \mathscr{H} = -\mathrm{i}\omega\epsilon\mathscr{E}.$$

另一方面由欧姆[1]定律

$$j = \sigma\mathscr{E}, \tag{4.500}$$

σ 为电导率,可将静磁学关系(1.32)写为

$$\nabla \times \mathscr{H} = \sigma\mathscr{E}. \tag{4.501}$$

与前式比较得 $\omega \to 0$ 条件下

$$\epsilon = \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}. \tag{4.502}$$

$\epsilon_2(\omega)$作为 ω 的幂级数,最低次项为 -1 次项.

将 ω 扩充为复变量:$\omega \equiv \omega_1 + \mathrm{i}\omega_2$, ω_1 和 ω_2 分别为它的实部和虚部.由于(4.494)中积分变量 $t \geqslant 0$,除一测度为零的点 $t = 0$ 外积分变量 $t > 0$.若 $\omega_2 > 0$ 被积函数就会出现一衰减因子 $\mathrm{e}^{-\omega_2 t}$.另一方面,越长时间以前的电场对现时刻极化强度的影响越小,无穷长时间以前的电场应对现时刻的极化强度无影响.(4.491)右边积分号下的函数 $f(t)$应为 t 的连续函数,且有极限$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$,因而是有界函数.它还必须使(4.491)右边的积分存在.这些性质使(4.494)定义的极化率 $\chi(\omega)$作为复变量 ω 的函数在ω 复平面的上半平面($\omega_2 > 0$)存在、解析、且有极限

$$\lim_{\omega_2 \to \infty} \chi(\omega) = 0. \tag{4.503}$$

按复变函数论的柯西[2]定理可在上半复平面内将它表为

$$\chi(\omega) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} \mathrm{d}\omega', \tag{4.504}$$

积分回路为上半复平面中包围 ω 的任一封闭回路.现在将回路的下沿拉成一条直线,并无穷逼近实轴;上沿则拉成一条以原点 $\omega = 0$ 为心,以实轴为直径的半圆周.由于极限性质(4.503),(4.504)右边在无穷远处半圆周上的积分为零,因此只剩下实轴上的积分

$$\chi(\omega) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} \mathrm{d}\omega'. \tag{4.505}$$

---

① Ohm.

② Cauchy.

此式对上半复平面中的 ω 成立. 让 ω 从上半复平面逼近实轴,由于(4.494)定义的 $\chi(\omega)$ 当 ω 从上半复平面趋于实轴时连续,(4.505)在实轴上的极限即实轴上的 $\chi(\omega)$. 这一极限又可表为在实轴上

$$\chi(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega - i\eta}, \tag{4.506}$$

η 为一无穷小正数. 附录一证明了在积分号下

$$\frac{1}{\omega' - \omega - i\eta} = P\frac{1}{\omega' - \omega} + i\pi\delta(\omega' - \omega), \tag{4.507}$$

第一项前的符号 P 表示含此项的瑕积分取主值. 代入上式得

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega}d\omega'. \tag{4.508}$$

与(4.496)联立得

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{1}{\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon(\omega') - \epsilon_0}{\omega' - \omega}d\omega'. \tag{4.509}$$

这便是著名的克拉默斯-克勒尼希色散关系. 将此式分解为实部和虚部就是

$$\left.\begin{aligned}
\epsilon_1(\omega) &= \epsilon_0 + \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_2(\omega')}{\omega' - \omega}d\omega' = \epsilon_0 + \frac{2}{\pi}P\int_0^{\infty} \frac{\omega'\epsilon_2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}d\omega', \\
\epsilon_2(\omega) &= -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_1(\omega') - \epsilon_0}{\omega' - \omega}d\omega' = -\frac{2\omega}{\pi}P\int_0^{\infty} \frac{\epsilon_1(\omega') - \epsilon_0}{\omega'^2 - \omega^2}d\omega',
\end{aligned}\right\} \tag{4.510}$$

两式第二等号处分别用到 $\epsilon_2(\omega)$为奇函数和 $\epsilon_1(\omega)$为偶函数. 积分号之前的符号 P 表取瑕积分的主值. 值得注意的是,此关系的推导根本没有用经典电动力学方程,也不涉及介质的结构和性质,而只用到(4.491)式. 该式表达的只是 t 时刻介质某处的极化强度只与该处 t 时刻以前的电场强度有关,即只是简单地表示了因果律. 由此便导致了 $\chi(\omega)$在复平面的解析性质,进而导致了这个色散关系. 可见此式有极广泛极普遍的基础和适用范围. 已知微观领域经典电动力学是不适用的,然而这并不影响这个色散关系的适用性. 后来这种基于因果性和复变函数解析性质的色散关系方法被广泛用于各领域,特别用于探索未知领域的规律. 例如用于强作用物质规律的探索,取得了一些重要成果.

设某介质对电磁波在角频率 ω_0 处有一宽为 Γ 的共振吸收峰,

$$\epsilon_2(\omega) = \frac{A\Gamma\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}, \tag{4.511}$$

ω_0、Γ 和 A 为常数. 代入(4.510)第一式得

$$\epsilon_1(\omega) - \epsilon_0 = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A\Gamma\omega'}{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + \omega'^2\Gamma^2}\frac{1}{\omega' - \omega}d\omega'. \tag{4.512}$$

对被积函数作分解,令

$$\frac{A\Gamma\omega'}{(\omega'^2-\omega_0^2)^2+\omega'^2\Gamma^2}\frac{1}{\omega'-\omega}=\frac{a_0+a_1\omega'+a_2\omega'^2+a_3\omega'^3}{(\omega'^2-\omega_0^2)^2+\omega'^2\Gamma^2}+\frac{a_4}{\omega'-\omega}. \tag{4.513}$$

将右边通分,分母与左边相同,要求分子也与左边相同,得诸常数的线性代数方程组

$$\left.\begin{aligned}&a_0\omega-a_4\omega_0^4=0,\\&a_0-a_1\omega=A\Gamma,\\&a_1-a_2\omega+a_4(\Gamma^2-2\omega_0^2)=0,\\&a_2-a_3\omega=0,\\&a_3+a_4=0.\end{aligned}\right\} \tag{4.514}$$

将(4.513)代入(4.512)的积分号下,含 a_1、a_3 和 a_4 的项积分主值为零.剩下的两项积分绝对收敛,不再需要主值符号.故有

$$\epsilon_1(\omega)-\epsilon_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a_0+a_2\omega'^2}{(\omega'^2-\omega_0^2)^2+\omega'^2\Gamma^2}\mathrm{d}\omega'. \tag{4.515}$$

由(4.514)解得

$$a_0=\frac{A\Gamma\omega_0^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\Gamma^2},\quad a_2=-\frac{A\Gamma\omega^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\Gamma^2}. \tag{4.516}$$

考虑(4.515)右边被积函数在 ω'复平面内以原点为心实轴为直径的无穷远处半圆周上的积分.由于在 $|\omega'|\to\infty$ 处被积函数以 $|\omega'|^{-2}$的方式趋于零,半圆周长以 $|\omega'|$的方式趋于无穷,此积分以 $|\omega'|^{-1}$的方式趋零.(4.515)可写为

$$\epsilon_1(\omega)-\epsilon_0=\frac{1}{\pi}\oint\frac{a_0+a_2\omega'^2}{(\omega'^2-\omega_0^2)^2+\omega'^2\Gamma^2}\mathrm{d}\omega', \tag{4.517}$$

积分回路由实轴和上半复平面的上述半圆周组成.被积函数有四个极点,即其分母的四个根

$$\left.\begin{aligned}&\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\Gamma^2}{4}}+\mathrm{i}\frac{\Gamma}{2},\qquad \omega_2=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\Gamma^2}{4}}-\mathrm{i}\frac{\Gamma}{2},\\&\omega_3=-\sqrt{\omega_0^2-\frac{\Gamma^2}{4}}+\mathrm{i}\frac{\Gamma}{2},\quad \omega_4=-\sqrt{\omega_0^2-\frac{\Gamma^2}{4}}-\mathrm{i}\frac{\Gamma}{2},\end{aligned}\right\} \tag{4.518}$$

此外是解析的.将它作分解

$$\frac{a_0+a_2\omega'^2}{(\omega'^2-\omega_0^2)^2+\omega'^2\Gamma^2}=\frac{b_1}{\omega'-\omega_1}+\frac{b_2}{\omega'-\omega_2}+\frac{b_3}{\omega'-\omega_3}+\frac{b_4}{\omega'-\omega_4}; \tag{4.519}$$

右边通分后分母与左边相同,要求分子也与左边相同得残数的线性代数方程组

$$
\left.\begin{aligned}
&b_1+b_2+b_3+b_4=0,\\
&\omega_4 b_1+\omega_3 b_2+\omega_2 b_3+\omega_1 b_4=-a_2,\\
&\omega_2^2 b_1+\omega_1^2 b_2+\omega_1^2 b_3+\omega_2^2 b_4=0,\\
&\omega_3 b_1+\omega_4 b_2+\omega_1 b_3+\omega_2 b_4=\frac{a_0}{\omega_0^2},
\end{aligned}\right\} \tag{4.520}
$$

化简中用了根的表达式(4.518).上半平面的极点为 ω_1 与 ω_3.由(4.520)解出它们残数的和为

$$
b_1+b_3=\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{A(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\Gamma^2}.
$$

乘以 $2\pi\mathrm{i}$ 得(4.517)中的积分,从而得

$$
\epsilon_1(\omega)=\epsilon_0+\frac{A(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\Gamma^2}, \tag{4.521}
$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon(\omega)=\epsilon_1(\omega)+\mathrm{i}\epsilon_2(\omega)&=\epsilon_0+A\frac{\omega_0^2-\omega^2+\mathrm{i}\omega\Gamma}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\Gamma^2}\\
&=\epsilon_0+\frac{A}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\omega\Gamma}.
\end{aligned} \tag{4.522}
$$

这个结果也可由一个模型实现.设一介质由质量为 m,电荷为 q,固有角频率为 ω_0 的相同荷电谐振子组成,振子数密度为 N.在求极化强度 $\boldsymbol{P}$ 时要将各振子电偶极矩在一虽很小却是宏观区域内平均.设电磁波的波长比这区域的尺度大得多,在其中各点电磁振动是同相位的,电场强度 $\mathscr{E}(t)$ 可当作只是时间的函数.其中一个振子在弹性力(4.427)、辐射阻尼力

$$
\boldsymbol{F}=\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\dot{\boldsymbol{a}} \tag{4.523}
$$

和这个电场作用下的运动方程为

$$
\ddot{\boldsymbol{r}}+\omega_0^2\boldsymbol{r}-\frac{\Gamma}{\omega_0{}^2}\dddot{\boldsymbol{r}}=\frac{q}{m}\mathscr{E}(t), \tag{4.524}
$$

其中

$$
\Gamma=\frac{q^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}. \tag{4.525}
$$

作傅里叶变换

$$
\left.\begin{aligned}
\mathscr{E}(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{E}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega,\\
\boldsymbol{r}(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{r}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}\right\} \tag{4.526}
$$

代入(4.524),得傅里叶系数的方程,并解得

$$\boldsymbol{r}(\omega)=\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\omega\Gamma'}\frac{q}{m}\boldsymbol{\mathscr{E}}(\omega),\tag{4.527}$$

其中 $\Gamma'=\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\Gamma$. 在其上乘 q 得此振子电偶极矩的傅里叶系数,再乘 N 即得角频率为 ω 的极化强度

$$\boldsymbol{P}(\omega)=\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\omega\Gamma'}\frac{Nq^2}{m}\boldsymbol{\mathscr{E}}(\omega).\tag{4.528}$$

与(4.493)比较得极化率

$$\chi(\omega)=\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\omega\Gamma'}\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}.\tag{4.529}$$

代入(4.496)得

$$\left.\begin{aligned}\epsilon(\omega)&=\epsilon_0+\frac{A}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\omega\Gamma'},\\ A&=\frac{Nq^2}{m}.\end{aligned}\right\}\tag{4.530}$$

此式与(4.522)极相似,只是进一步给出了常数 A 的表达式,还用 Γ'代替了 Γ. Γ'不同于 Γ,它随 ω 变化. 不过在 ω 与 ω_0 的差与 ω_0 相比可忽略的频率范围内可认为(4.530)是(4.522)的具体实现.

习 题 四

1. 电磁场的拉格朗日量密度(4.13)可推广为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+A_\mu j^\mu-\frac{m^2}{2\mu_0}A_\mu A^\mu,\tag{4.531}$$

m 为具(长度)$^{-1}$量纲的参数. 试证

(1)它在洛伦兹变换下不变,因而符合相对论原理;

(2)由它经哈密顿原理导出的运动方程为

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}+m^2A^\mu=\mu_0 j^\mu,\quad \mu=0,1,2,3,\tag{4.532}$$

并可由此导得洛伦兹条件

$$\partial_\mu A^\mu=0$$

从而可将上式化为

$$\Box A^\mu-m^2A^\mu=-\mu_0 j^\mu,\quad \mu=0,1,2,3,\tag{4.533}$$

这些方程在洛伦兹变换下皆不变;

(3)(4.531)或由它导出的运动方程在规范变换下不变的充分兼必要条件为 $m=0$,即回复到(4.13)及其推论.

2. 考虑一个由电磁场与质量为 m 电荷为 q 的质点组成的系统. 荷电质点提供一电流密度四矢量分布

$$j^0(\boldsymbol{r},t)=qc\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t)),\quad j^i(\boldsymbol{r},t)=qv^i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(t)),\quad i=1,2,3,\tag{4.534}$$

其中 $\boldsymbol{r}'(t)$和$\boldsymbol{v}(t)\equiv(v^1,v^2,v^3)$分别为质点的轨道方程和速度. 将整个系统的拉格朗日量取为

$$L = L_f + L_p, \tag{4.535}$$

其中 L_f 为场拉氏量密度(4.13)的体积分,(j^μ)由(4.534)代入,已不再是给定的,而是待解的质点动力学变量.

$$L_p = - mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{4.536}$$

是自由质点的拉格朗日量.由此按哈密顿原理导出电磁场和质点的运动方程,并证明

(1)电流密顿四矢量(4.534)满足连续性方程(4.10),导出的电磁场方程因而在规范变换下不变;

(2)导出的质点运动方程正是电磁力(1.90)作用下的相对论运动方程.

3. 设有一条长 l 的细导线,在其上激发起电荷电流振荡.此振荡以波的形式在导线上传播,平衡条件下形成驻波.设导线是直的,将它的方向取为 z 方向,中点取为原点,其上电流驻波可表为

$$I(z,t) = I_0\sin(kz)\cos\omega t, \tag{4.537}$$

$$I(z,t) = I_0\cos(kz)\cos\omega t. \tag{4.538}$$

电流波相速 $u=\frac{\omega}{k}$ 为导线材料的性质,通常接近真空中的光速.显然有边条件 $I\left(\pm\frac{l}{2},t\right)=0$. 对(4.537)表示的正弦驻波,这要求 $k\frac{l}{2}=n\pi$,n 为整数,导线长 $l=n\frac{2\pi}{k}$ 为波长的整数倍,中点为波节;对(4.538)表示的余弦驻波,这要求 $k\frac{l}{2}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$,导线长 $l=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{k}$ 为波长的半整数倍,中点为波腹. l 为半波长的导线称半波天线.试求半波天线发射到无穷远处电磁波的偏振,能量流的方向分布(角分布)和辐射强度.

4. 对半波天线的辐射作多极分解,比较其中电偶极辐射、磁偶极辐射和电四极辐射的强度,讨论所得结果.

5. 一般地求天线上余弦电流驻波发射到无穷远处电磁波的偏振、角分布和辐射强度.

6. 一般地求天线上正弦电流驻波发射到无穷远处电磁波的偏振、角分布和辐射强度.

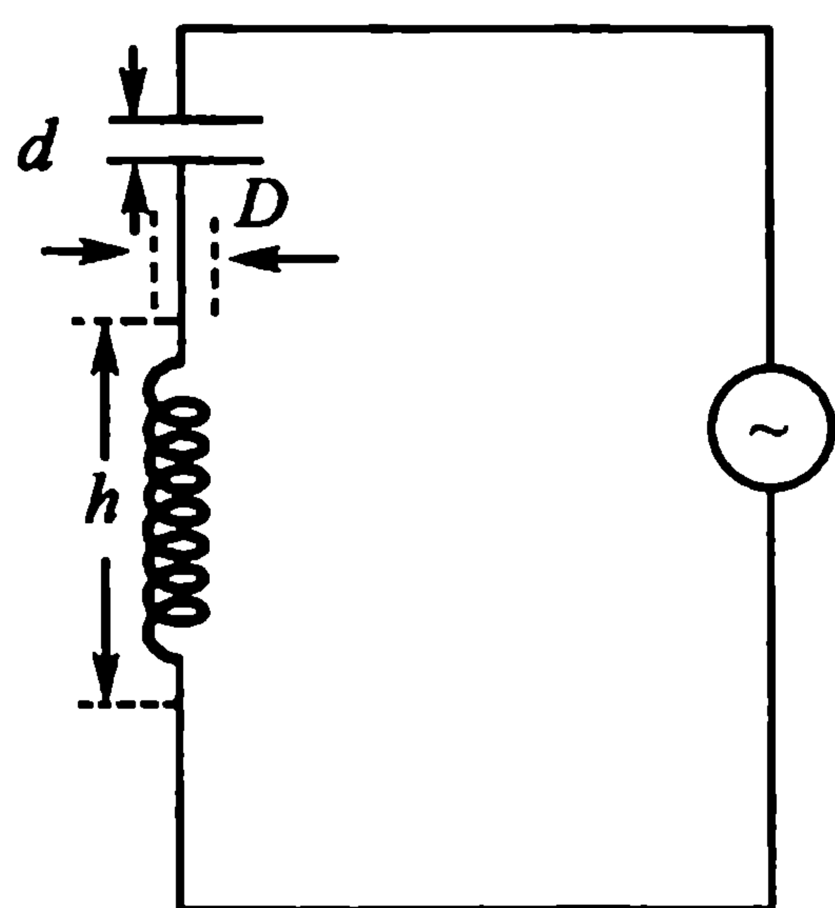


图 4-4　LC 电路

7. 如图 4-4,一直径为 D 长为 h 共有 N 匝的圆柱形线圈的轴与平行板电容器的板垂直,电容器两圆板距离为 d.它们联成 LC 电路在外电源的支持下作似稳电磁振荡,电流由时间的函数

$$I(t) = I_0\sin(\omega t)$$

表示,I_0 与 ω 为常数.设整个装置的尺度比它发出的电磁波波长 $\frac{2\pi c}{\omega}$ 小得多,因而发出的电磁波只中有电偶极、磁偶极和电四极辐射必须考虑.求它辐射到无穷远处的电磁波的偏振、角分布和辐射强度.讨论所得的结果.

8. 运动带电粒子受到阻力而减速,在此过程中发出的电磁波称为轫致辐射.求直线减速运动带电粒子轫致辐射的偏振、角分布和辐射强度.

9. 设一直线运动带电粒子速度由 v_1 加(减)速到 v_2,加(减)速是均匀的,加(减)速度为常数.问此过程中共辐射出多少能量.

10. 分别针对纵向加速和横向加速两种情况,用运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\boldsymbol{F}$$

将质点的加速度用它受的力 $\boldsymbol{F}$ 和速度$\boldsymbol{v}$ 表出，然后分别在(4.277)和(4.281)中用力 $\boldsymbol{F}$ 消去加速度，将质点的辐射强度用它受的力和速度表出．藉此讨论这两种情形中质点的辐射强度与它的能量的关系．

11．在展开式(4.415)中取到 ϕ_2 项，展开式(4.421)中取到 A_0 项．试证对这样得到的标势和矢势取

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{q}{8\pi\epsilon u^2}\frac{\partial R}{\partial t}=-\frac{q}{8\pi\epsilon u^2}\frac{\boldsymbol{R}}{R}\cdot\boldsymbol{v} \tag{4.539}$$

按(1.107)和(1.104)作规范变换后得到的标势和矢势为

$$\left.\begin{aligned}\phi'(\boldsymbol{r},t)&=\frac{q}{4\pi\epsilon R},\\ \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r},t)&=\frac{q}{8\pi\epsilon u^2 R}\left(\boldsymbol{v}+\frac{\boldsymbol{R}}{R}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right).\end{aligned}\right\} \tag{4.540}$$

12．由这组电磁势可计算一个带电粒子产生的电磁场对另一带电粒子的作用．试证 N 个带电粒子间的这种作用可由势函数

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon}\sum_{i>i'=1}^{N}\frac{q_i q_{i'}}{R_{ii'}}\left\{1-\frac{1}{2u^2}\left[\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_{i'}+\left(\frac{\boldsymbol{R}_{ii'}}{R_{ii'}}\cdot\boldsymbol{v}_i\right)\left(\frac{\boldsymbol{R}_{ii'}}{R_{ii'}}\cdot\boldsymbol{v}_{i'}\right)\right]\right\} \tag{4.541}$$

表示，其中 $\boldsymbol{R}_{ii'}=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i'}$，$\boldsymbol{r}_i$、$q_i$ 和 $\boldsymbol{v}_i$分别为第 i 粒子的径矢量、电荷和速度．这是库仑势在粒子速度非零条件下的推广．

13．设带电粒子除受弹性力(4.427)、电磁力(4.432)和辐射阻尼力(4.425)的作用外还受一耗散力

$$\boldsymbol{F}_D=-D\boldsymbol{v} \tag{4.542}$$

的作用，D 为一常数，称为耗散系数，表示能量向其他自由度的耗散．问此力对谱线宽度的影响．

14．试证一作等速圆周运动的带电粒子所受辐射阻尼力为

$$\boldsymbol{F}=-\frac{q^2v^2}{6\pi\epsilon R^2u^3}\boldsymbol{v}, \tag{4.543}$$

其中 q 为粒子电荷，$\boldsymbol{v}$ 为瞬时速度，R 为轨道半径．

15．设介电常数的虚部

$$\epsilon_2(\omega)=A\omega\delta(\omega^2-\omega_0^2),$$

其中 A 与 ω_0 为常数．试用色散关系求出它的实部，并用一个模型实现所得结果．

第五章　电磁场的动力学，电磁波的传播与驻留

§5.1　分区均匀介质中电磁波的波方程与边条件

电磁波满足麦克斯韦方程(1.70)～(1.73)，其中电荷密度 ρ 与电流密度 $\boldsymbol{j}$ 满足连续性方程(1.31). 在导体中电流密度 $\boldsymbol{j}$ 与电场强度 $\boldsymbol{\mathscr{E}}$ 还满足欧姆定律(4.500). 在电磁场随时间变化缓慢的条件下，或者说对极低频的电磁波，简单的电磁物态方程(1.74)成立. 在均匀介质中，电导率 σ、介电常数 ϵ 和磁导率 μ 均为常数. 在(4.500)两边取散度，利用(1.74)中的第一式和(1.70)，在 σ 和 ϵ 均为常数的条件下得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = \sigma \nabla \cdot \boldsymbol{\mathscr{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon} \nabla \cdot \boldsymbol{\mathscr{D}} = \frac{\sigma}{\epsilon}\rho. \tag{5.1}$$

代入(1.31)，得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon}\rho = 0. \tag{5.2}$$

此式作为 ρ 对 t 的一阶常系数线性微分方程有解

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \rho_0(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}, \tag{5.3}$$

表明导体中的电荷密度会随时间的增长指数地衰减到零，衰减速度与电导率 σ 成正比. 可见导体内不会聚积或保持电荷. 令导体荷电后它内部各点电荷密度也会迅速趋于零，电荷只能分布在导体表面上，即使有随时间变化的电磁场情形也是如此.

对随时间迅速变化的电磁场或高频电磁波，例如光波，(1.74)不再成立. 在此条件下要作频谱分析. 采用复表示，将电场强度、电位移矢量、磁场强度和磁感应强度中角频率为 ω 的成分分别表成 $\boldsymbol{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$、$\boldsymbol{\mathscr{D}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$、$\boldsymbol{\mathscr{H}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 和 $\boldsymbol{\mathscr{B}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，它们之间有关系

$$\boldsymbol{\mathscr{D}}(\boldsymbol{r}) = \epsilon \boldsymbol{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{\mathscr{B}}(\boldsymbol{r}) = \mu \boldsymbol{\mathscr{H}}(\boldsymbol{r}). \tag{5.4}$$

同样将电荷、电流密度作频谱分析，角频率为 ω 的成分分别表为 $\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$、$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$. 欧姆定律为

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \sigma \boldsymbol{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r}). \tag{5.5}$$

这里 $\boldsymbol{\mathscr{E}}$、$\boldsymbol{\mathscr{D}}$、$\boldsymbol{\mathscr{H}}$、$\boldsymbol{\mathscr{B}}$、ϵ、μ 和 σ 都是 ω 的函数，只是为节省书写没标出这个自变量. 因

此(5.4)不同于(1.74),(5.5)也不同于(4.500).对随时间周期变化的电荷、电流密度,连续性方程(1.31)成为

$$-\mathrm{i}\omega\rho+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0, \tag{5.6}$$

其中 $\rho(\boldsymbol{r})$和 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$也是 ω 的函数.在均匀介质中,ϵ、μ 和σ 均与空间位置$\boldsymbol{r}$ 无关.对具有一定角频率 ω 的情形,形如(5.1)的关系也成立.将它与(5.6)联立得

$$\left(\frac{\sigma}{\epsilon}-\mathrm{i}\omega\right)\rho(\boldsymbol{r})=0.$$

一般说来$\frac{\sigma}{\epsilon}$不会正好为纯虚数,此式左边圆括号内的表达式不会正好是零,因此有

$$\rho(\boldsymbol{r})=0, \tag{5.7}$$

表明存在高频电磁波的情况下导体内部的电荷密度也是零.导体内部没有电荷.另一方面,绝缘体中没有电流,$\boldsymbol{j}=0$,(5.6)因而表明电荷密度随时间变化的频谱分析中 $\omega\neq0$ 的成分在绝缘体中也是零,(5.7)对导体和绝缘体都成立.于是在均匀介质中具有一定频率的电磁波的麦克斯韦方程(1.70)~(1.73)在用了电磁物态方程(5.4)和欧姆定律(5.5)后可表为

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\mathscr{E}=0, &&\nabla\cdot\mathscr{H}=0,\\&\nabla\times\mathscr{E}=\mathrm{i}\omega\mu\mathscr{H}, &&\nabla\times\mathscr{H}=-\mathrm{i}\omega\epsilon'\mathscr{E},\end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

其中

$$\epsilon'=\epsilon+\mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega} \tag{5.9}$$

为介质的有效介电常数.对绝缘介质电导率 $\sigma=0$,有效介电常数 ϵ'就是介电常数 ϵ.导电介质的有效介电常数 ϵ'则在介电常数ϵ 上加了一项与导电率σ 成正比的虚部.用这种方法把电磁波在绝缘介质和导电介质中的麦克斯韦方程统一表成了(5.8)的形式.

为求电磁场在不同均匀介质的交界面上的边条件要用麦克斯韦方程的积分形式.考虑(1.72)在图 2-1 中跨界面回路 $a_1b_1b_2a_2a_1$ 包围的面上的积分.左边的面积分可化为沿回路的线积分.当 a_1 和 a_2 从界面两侧趋于同一点 a,b_1 和 b_2 趋于同一点 b 时,$\mathscr{E}$沿 a_2a_1 和 b_1b_2 的线积分都趋于零,沿回路的线积分成为介质 1 中电场强度$\mathscr{E}_1$ 沿界面上的线段 ab 的线积分与介质 2 中电场强度$\mathscr{E}_2$ 沿该线段积分之差.另一方面,在此极限下此回路包围的面积趋于零,而有限的电磁场$\left|\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial t}\right|$有界,这使右边的面积分趋于零.可见两侧电场强度的差$\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2$ 沿界面上任一曲线的线积分为零.这必须且只须界面两侧电场强度平行于界面的分量相等.用 $\boldsymbol{n}$ 表示界面上一点从介质 1 指向介质 2 的单位法矢,这一边条件可表为

$$\boldsymbol{n}\times(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)=0. \tag{5.10}$$

用(1.73)作同样的论证.在 a_1 和 a_2 趋于 a,b_1 和 b_2 趋于 b 的条件下它左边的线

积分趋于$\mathscr{H}_1-\mathscr{H}_2$沿 ab 的线积分,其中$\mathscr{H}_1$和$\mathscr{H}_2$分别为介质 1 和介质 2 中的磁场强度.在用欧姆定律(4.500)后右边面积分的被积函数成为 $\sigma\mathscr{E}+\frac{\partial\mathscr{D}}{\partial t}$.对有限大小的电磁场这个被积函数有界,因而在上述极限下面积分为零.这表明界面两侧磁场强度平行于界面的分量相等,可表为

$$\boldsymbol{n}\times(\mathscr{H}_1-\mathscr{H}_2)=0. \tag{5.11}$$

虽然均匀介质中不能有交变的电荷密度,它们却可存在于介质间的界面上.用 $\sigma_{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$表介质 1 和 2 的界面上电荷面密度频谱分析中角频率为 ω 的成分.将连续性方程(1.31)两边在图 2-2 所示跨界面的扁盒内作体积分,右边为零.在面元 Δs_1 和 Δs_2 分别从两侧趋于界面上的面元 Δs,它们之间的距离 δ 趋于零的条件下,左边得

$$[-\mathrm{i}\omega\sigma_{12}+\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{j}_2-\boldsymbol{j}_1)]\Delta s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},$$

$\boldsymbol{j}_1$ 和 $\boldsymbol{j}_2$ 分别为介质 1 和 2 中的电流密度矢量.这里还用了积分的中值定理.于是,在界面上

$$-\mathrm{i}\omega\sigma_{12}+\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{j}_2-\boldsymbol{j}_1)=0. \tag{5.12}$$

用欧姆定律(5.5)可将此式写为

$$-\mathrm{i}\omega\sigma_{12}+\boldsymbol{n}\cdot(\sigma_2\mathscr{E}_2-\sigma_1\mathscr{E}_1)=0. \tag{5.13}$$

另一方面,将(1.70)两边在图 2-2 所示扁盒内积分得

$$\boldsymbol{n}\cdot(\epsilon_2\mathscr{E}_2-\epsilon_1\mathscr{E}_1)=\sigma_{12}. \tag{5.14}$$

与上式联立得

$$\boldsymbol{n}\cdot(\epsilon'_2\mathscr{E}_2-\epsilon'_1\mathscr{E}_1)=0; \tag{5.15}$$

其中

$$\epsilon'_i=\epsilon_i+\frac{\mathrm{i}\sigma_i}{\omega},\qquad i=1,2,$$

为介质 i 中的有效介电常数,如(5.9)所定义.在绝缘介质 1 和 2 中 $\boldsymbol{j}_1=\boldsymbol{j}_2=0$,按(5.12)$\sigma_{12}=0$,(5.14)因而成为边条件

$$\boldsymbol{n}\cdot(\epsilon_2\mathscr{E}_2-\epsilon_1\mathscr{E}_1)=0. \tag{5.16}$$

与(5.15)比较知,导体与绝缘体的法向电场强度的边条件也可借助有效介电常数 ϵ'统一表达,在绝缘体中 $\sigma=0$,$\epsilon'=\epsilon$.将(1.71)两边在图 2-2 所示扁盒内积分,则得法向磁场强度的边条件

$$\boldsymbol{n}\cdot(\mu_2\mathscr{H}_2-\mu_1\mathscr{H}_1)=0. \tag{5.17}$$

其实此式和(5.15)都不是独立的边条件,它们分别可由(5.10)和(5.11)导出.例如从(5.8)第三式知,在界面上

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{n}\cdot(\mu_2\mathscr{H}_2-\mu_1\mathscr{H}_1). \tag{5.18}$$

另一方面(5.10)表明界面两侧电场强度沿界面的分量相同,从而$\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1$沿界面上

的任一回路的积分为零，因此(5.18)的左边在界面上的任意面积分为零.可见$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)$在界面上处处为零，从而(5.18)的右边为零，(5.17)成立.类似地，用(5.8)的末式可从(5.11)证明(5.15)成立.换句话说，电磁场在界面上只要满足麦克斯韦方程(5.8)和边条件

$$\boldsymbol{n}\times(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)=0,\qquad \boldsymbol{n}\times(\mathscr{H}_1-\mathscr{H}_2)=0,\tag{5.19}$$

必定也满足边条件(5.15)和(5.17).

在(5.8)后两式两边取旋度，左边用恒等式(1.111)和(5.8)的前两式，右边再次用(5.8)的后两式得

$$\nabla^2\mathscr{E}+k^2\mathscr{E}=0,\qquad \nabla^2\mathscr{H}+k^2\mathscr{H}=0,\tag{5.20}$$

其中

$$k^2=\omega^2\mu\epsilon'.\tag{5.21}$$

这就是均匀介质中具有一定频率的电磁波方程，它们是齐次亥姆霍兹方程.这两个方程也不是独立的.将(5.8)的后两式表为

$$\mathscr{H}=-\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}\nabla\times\mathscr{E},\qquad \mathscr{E}=\frac{\mathrm{i}}{\omega\epsilon'}\nabla\times\mathscr{H}.\tag{5.22}$$

从(5.20)第一式解出$\mathscr{E}(\boldsymbol{r})$后即可从此式第一式算出$\mathscr{H}(\boldsymbol{r})$，它自动满足(5.20)第二式；从(5.20)第二式解出$\mathscr{H}(\boldsymbol{r})$后也可从此式第二式算出$\mathscr{E}(\boldsymbol{r})$，它自动满足(5.20)第一式.在边条件(5.19)下求解(5.20)并利用(5.22)便可得分区均匀介质中电磁波的传播.若ϵ'为复数还可得介质对电磁波的吸收.

§5.2 电磁波在两均匀介质界面上的反射和折射，菲涅耳①公式和布儒斯特②定律，全反射

设介质不吸收电磁波，$\epsilon'=\epsilon$和μ均为实数，按(5.21)k^2为实数.在此情形下ϵ和μ一般为正数，$k^2>0$，k为实数.(5.20)有平面波解

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{r})=\mathscr{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},\qquad \mathscr{H}(\boldsymbol{r})=\mathscr{H}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\tag{5.23}$$

$\mathscr{E}_0$和$\mathscr{H}_0$为与$\boldsymbol{r}$无关的常矢量，为平面波的振幅，波矢量$\boldsymbol{k}$指传播方向，大小为

$$k=\omega\sqrt{\mu\epsilon}=\frac{\omega}{u},\tag{5.24}$$

u为波的相速度.将(5.23)代入(5.22)得

$$\mathscr{H}_0=\frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\times\mathscr{E}_0,\qquad \mathscr{E}_0=-\frac{1}{\omega\epsilon}\boldsymbol{k}\times\mathscr{H}_0.\tag{5.25}$$

---

① Fresnel.

② Brewster.

由于(5.24),此二式兼容,且$\mathscr{E}_0$、$\mathscr{H}_0$和$\boldsymbol{k}$彼此正交,组成右手正交矢量系.

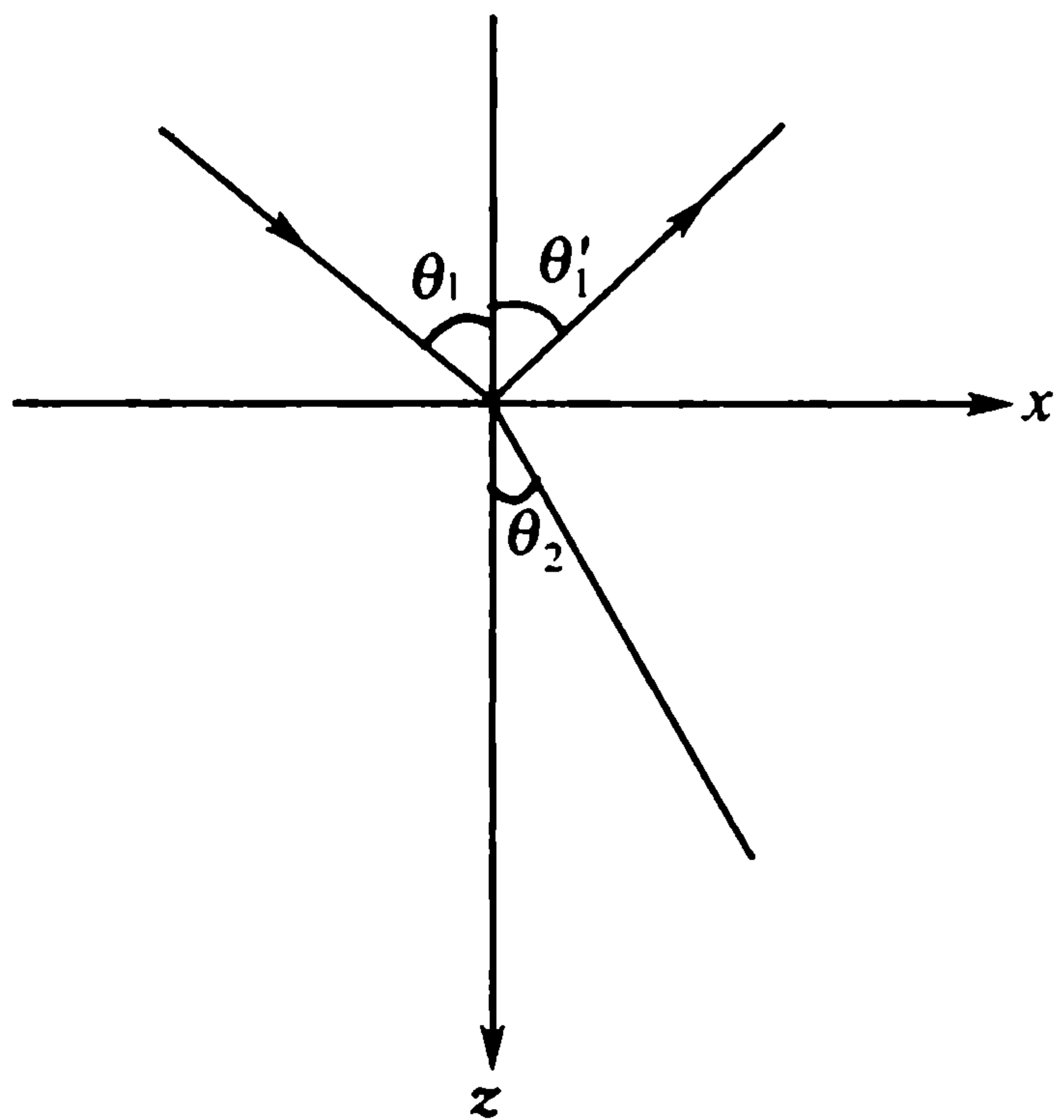


图 5-1　反射与折射

设有两均匀介质以一平面为界占据整个空间.以此界面为xy平面.令纸面垂直于此平面.取纸面与界面的交线为x轴,y轴垂直于纸面向外,z轴沿纸面向下,如图 5-1.称xy平面以上的介质为介质 1,以下的介质为介质 2.设有平面电磁波沿与z轴夹角为θ_1的方向自上方射向界面,称为入射波,θ_1称入射角.入射波波矢量$\boldsymbol{k}_1$与界面法向单位矢量$\boldsymbol{z}_0$组成的平面称为入射平面.恒可调整纸面与界面的交线方向,使入射平面就是zx平面.界面上介质性质的变化使电磁波不是单一的平面波,而是平面波的组合.介质 1 中除入射波外的平面波称为反射波.用$\boldsymbol{k}_1'$表反射波的波矢量,它与$-\boldsymbol{z}_0$方向的夹角θ_1'(参看图 5-1)称为反射角.介质 2 中平面波的传播方向一般不同于入射波,因而称为折射波.用$\boldsymbol{k}_2$表示折射波的波矢量,它与z轴的夹角θ_2称为折射角.用边条件(5.19)和关系(5.25)可导出反射波和折射波与入射波的关系.(5.19)中的单位法矢$\boldsymbol{n}$现在就是$\boldsymbol{z}_0$.将入射波表为$\mathscr{E}_{10}e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}}$,$\mathscr{H}_{10}e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}}$;反射波表为$\mathscr{E}_{10}'e^{i\boldsymbol{k}_1'\cdot\boldsymbol{r}}$,$\mathscr{H}_{10}'e^{i\boldsymbol{k}_1'\cdot\boldsymbol{r}}$;折射波表为$\mathscr{E}_{20}e^{i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}}$,$\mathscr{H}_{20}e^{i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}}$.按图 5-1 中坐标的取法$\boldsymbol{k}_1$的$y$分量$k_{1y}=0$,界面上的坐标$\boldsymbol{r}=(x,y,0)$.边条件(5.19)为

$$\boldsymbol{z}_0\times\mathscr{E}_{10}e^{ik_{1x}x}+\boldsymbol{z}_0\times\mathscr{E}_{10}'e^{i(k_{1x}'x+k_{1y}'y)}=\boldsymbol{z}_0\times\mathscr{E}_{20}e^{i(k_{2x}x+k_{2y}y)},$$

$$\boldsymbol{z}_0\times\mathscr{H}_{10}e^{ik_{1x}x}+\boldsymbol{z}_0\times\mathscr{H}_{10}'e^{i(k_{1x}'x+k_{1y}'y)}=\boldsymbol{z}_0\times\mathscr{H}_{20}e^{i(k_{2x}x+k_{2y}y)}.$$

此条件在界面上每一点都成立的充分兼必要条件是

$$k_{1x}=k_{1x}'=k_{2x},\qquad k_{1y}'=k_{2y}=0,\tag{5.26}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{z}_0\times(\mathscr{E}_{10}+\mathscr{E}_{10}')&=\boldsymbol{z}_0\times\mathscr{E}_{20},\\ \boldsymbol{z}_0\times(\mathscr{H}_{10}+\mathscr{H}_{10}')&=\boldsymbol{z}_0\times\mathscr{H}_{20}.\end{aligned}\right\}\tag{5.27}$$

由(5.26)第二式立得:反射波矢量$\boldsymbol{k}_1'$和折射波矢量$\boldsymbol{k}_2$都在zx平面内,即都在入射平面内.(5.24)表明入射波矢量长k_1和反射波矢量长k_1'相等.从(5.26)第一式的第一个等号便得

$$\sin\theta_1'=\frac{k_{1x}'}{k_1'}=\frac{k_{1x}}{k_1}=\sin\theta_1,$$

$$\theta_1'=\theta_1.\tag{5.28}$$

称反射波矢量与界面法向组成的平面为反射平面,即有:'反射平面与入射平面共面,且反射角等于入射角.'这便是电磁波的反射定律,早以光的反射定律为人们熟知.(5.24)又可表为

$$k=n\frac{\omega}{c},\tag{5.29}$$

其中

$$n = \frac{c}{u} = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}} \tag{5.30}$$

为介质的折射系数,c 为真空中的光速.因此

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2}, \tag{5.31}$$

其中 n_1 和 n_2 分别为介质 1 和介质 2 的折射系数.由(5.26)和此式得

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{k_{1x}/k_1}{k_{2x}/k_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{5.32}$$

这便是电磁波的折射定律,早以光的折射定律为伤们熟知.

(5.27)中的两式可分别表成分量形式

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}_{10x} + \mathscr{E}'_{10x} &= \mathscr{E}_{20x}, \\ \mathscr{E}_{10y} + \mathscr{E}'_{10y} &= \mathscr{E}_{20y}, \end{aligned}\right\} \tag{5.33}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{H}_{10x} + \mathscr{H}'_{10x} &= \mathscr{H}_{20x}, \\ \mathscr{H}_{10y} + \mathscr{H}'_{10y} &= \mathscr{H}_{20y}. \end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

由于所有关系都是线性的,可分两种情形分别讨论反射波和折射波的振幅与入射波振幅的关系.

1. 入射波电场垂直入射面偏振的情形.在此情形中 $\mathscr{E}_{10x} = \mathscr{E}_{10z} = 0$,(5.33)成为

$$\mathscr{E}'_{10x} = \mathscr{E}_{20x}, \qquad \mathscr{E}_{10y} + \mathscr{E}'_{10y} = \mathscr{E}_{20y}. \tag{5.35}$$

横波条件$\mathscr{E}_0 \cdot \boldsymbol{k} = 0$ 对此情形的入射波自动成立,对反射波和折射波分别给出

$$\mathscr{E}'_{10z} = \frac{k_{1x}}{k_{1z}}\mathscr{E}'_{10x} = \tan\theta_1 \mathscr{E}'_{10x}, \tag{5.36}$$

$$\mathscr{E}_{20z} = -\frac{k_{2x}}{k_{2z}}\mathscr{E}_{20x} = -\tan\theta_2 \mathscr{E}_{20x}. \tag{5.37}$$

由(5.25)和这组关系得在此情形中

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{H}_{10} &= \frac{k_1}{\omega\mu_1}\mathscr{E}_{10y}(\sin\theta_1 \boldsymbol{z}_0 - \cos\theta_1 \boldsymbol{x}_0), \\ \mathscr{H}'_{10} &= \frac{k_1}{\omega\mu_1}\left(\mathscr{E}'_{10y}\cos\theta_1 \boldsymbol{x}_0 - \frac{\mathscr{E}'_{10x}}{\cos\theta_1}\boldsymbol{y}_0 + \mathscr{E}'_{10y}\sin\theta_1 \boldsymbol{z}_0\right), \\ \mathscr{H}_{20} &= \frac{k_2}{\omega\mu_2}\left(-\mathscr{E}_{20y}\cos\theta_2 \boldsymbol{x}_0 + \frac{\mathscr{E}_{20x}}{\cos\theta_2}\boldsymbol{y}_0 + \mathscr{E}_{20y}\sin\theta_2 \boldsymbol{z}_0\right), \end{aligned}\right\} \tag{5.38}$$

$\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{y}_0$ 分别为 x 方向和 y 方向的单位矢量.将条件(5.34)加于此式得

$$\left.\begin{aligned} \frac{k_1}{\mu_1}\cos\theta_1(\mathscr{E}_{10y} - \mathscr{E}'_{10y}) &= \frac{k_2}{\mu_2}\mathscr{E}_{20y}\cos\theta_2, \\ \frac{k_1}{\mu_1\cos\theta_1}\mathscr{E}'_{10x} &= -\frac{k_2}{\mu_2\cos\theta_2}\mathscr{E}_{20x}. \end{aligned}\right\} \tag{5.39}$$

与(5.35)联立得

$$\mathscr{E}'_{10x} = \mathscr{E}_{20x} = 0, \tag{5.40}$$

$$\mathscr{E}'_{10y} = \frac{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\cos\theta_1 - \sqrt{\epsilon_2/\mu_2}\cos\theta_2}{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\cos\theta_1 + \sqrt{\epsilon_2/\mu_2}\cos\theta_2}\mathscr{E}_{10y}, \tag{5.41}$$

$$\mathscr{E}_{20y} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\cos\theta_1}{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\cos\theta_1 + \sqrt{\epsilon_2/\mu_2}\cos\theta_2}\mathscr{E}_{10y}. \tag{5.42}$$

将(5.40)代入(5.36)和(5.37)右边,得

$$\mathscr{E}'_{10z} = \mathscr{E}_{20z} = 0. \tag{5.43}$$

此式和(5.40)一起表明在此情形中反射波和折射波的电场也都垂直于入射面偏振.将(5.40)~(5.43)代入(5.38)得磁场振幅,并可见,入射波、反射波和折射波的磁场均沿入射平面偏振.对高频电磁波,例如光波,$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$,(5.41)和(5.42)简化为

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}'_{10y} &= \frac{\sqrt{\epsilon_1}\cos\theta_1 - \sqrt{\epsilon_2}\cos\theta_2}{\sqrt{\epsilon_1}\cos\theta_1 + \sqrt{\epsilon_2}\cos\theta_2}\mathscr{E}_{10y} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}\mathscr{E}_{10y}, \\ \mathscr{E}_{20y} &= \frac{2\sqrt{\epsilon_1}\cos\theta_1}{\sqrt{\epsilon_1}\cos\theta_1 + \sqrt{\epsilon_2}\cos\theta_2}\mathscr{E}_{10y} = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}\mathscr{E}_{10y}. \end{aligned}\right\} \tag{5.44}$$

2. 入射波电场沿入射面偏振的情形.在此情形中 $\mathscr{E}_{10y} = 0$,(5.33)成为

$$\mathscr{E}_{10x} + \mathscr{E}'_{10x} = \mathscr{E}_{20x}, \qquad \mathscr{E}'_{10y} = \mathscr{E}_{20y}. \tag{5.45}$$

对入射波横波条件要求

$$\mathscr{E}_{10z} = -\frac{k_{1x}}{k_{1z}}\mathscr{E}_{10x} = -\tan\theta_1\mathscr{E}_{10x}. \tag{5.46}$$

(5.25)现在给出

$$\mathscr{H}_{10} = \frac{k_1}{\mu_1\omega}\frac{\mathscr{E}_{10x}}{\cos\theta_1}\mathbf{y}_0 \tag{5.47}$$

和(5.38)的后两式.(5.34)则给出

$$\left.\begin{aligned} \frac{k_1}{\mu_1}\cos\theta_1\mathscr{E}'_{10y} &= -\frac{k_2}{\mu_2}\mathscr{E}_{20y}\cos\theta_2, \\ \frac{k_1}{\mu_1\cos\theta_1}(\mathscr{E}_{10x} - \mathscr{E}'_{10x}) &= \frac{k_2}{\mu_2\cos\theta_2}\mathscr{E}_{20x}. \end{aligned}\right\} \tag{5.48}$$

与(5.45)联立得

$$\mathscr{E}'_{10y} = \mathscr{E}_{20y} = 0, \tag{5.49}$$

$$\mathscr{E}'_{10x} = \frac{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\cos\theta_2 - \sqrt{\epsilon_2/\mu_2}\cos\theta_1}{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\cos\theta_2 + \sqrt{\epsilon_2/\mu_2}\cos\theta_1}\mathscr{E}_{10x} = \frac{\tan\theta_1 - (\epsilon_2/\epsilon_1)\tan\theta_2}{\tan\theta_1 + (\epsilon_2/\epsilon_1)\tan\theta_2}\mathscr{E}_{10x}, \tag{5.50}$$

$$\mathscr{E}_{20x}=\frac{2\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\cos\theta_2}{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\cos\theta_2+\sqrt{\epsilon_2/\mu_2}\cos\theta_1}\mathscr{E}_{10x}=\frac{2\tan\theta_1}{\tan\theta_1+(\epsilon_2/\epsilon_1)\tan\theta_2}\mathscr{E}_{10x}. \tag{5.51}$$

(5.49)表明此情形中反射波与折射波的电场也沿入射平面偏振. 将(5.49)～(5.51)代入(5.38)后两式和(5.47)得磁场振幅,并可见,入射波、反射波和折射波磁场均垂直入射平面偏振. 在 $\mu_1=\mu_2=\mu_0$ 条件下(5.50)和(5.51)简化为

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{E}'_{10x}&=\frac{\cos\theta_2\sin\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_1}{\cos\theta_2\sin\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_1}\mathscr{E}_{10x}=\frac{\tan(\theta_2-\theta_1)}{\tan(\theta_2+\theta_1)}\mathscr{E}_{10x},\\ \mathscr{E}_{20x}&=\frac{2\cos\theta_2\sin\theta_2}{\cos\theta_2\sin\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_1}\mathscr{E}_{10x}=\frac{\sin(2\theta_2)}{\sin(\theta_2+\theta_1)\cos(\theta_2-\theta_1)}\mathscr{E}_{10x}.\end{aligned}\right\} \tag{5.52}$$

这两式第一等号处都用了此条件下的关系

$$\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}; \tag{5.53}$$

第二等号表达的都是三角恒等式,可直接验证. 由电场的 x 分量经(5.46)、(5.36)和(5.37)可算得电场的 z 分量.

一般情形下入射波、反射波和折射波中电磁场的振幅为这两种情形电磁场振幅的叠加. (5.44)和(5.52)称为菲涅耳公式. 由(5.52)第一式可看出,若入射角与折射角之和为$\frac{\pi}{2}$,则电场沿入射平面偏振的入射波不被反射,全部折射入介质 2. 若入射波不偏振,含两种不同偏振成分,则在此条件下反射波只含电场垂直入射面的成分,是偏振的,反射导致电磁波偏振. 这便是光学中的布儒斯特定律. 使反射波电场完全垂直入射面偏振的入射角称为布儒斯特角. 由菲涅耳公式还可了解反射波和折射波与入射波的相角关系. 例如从光疏介质到光密介质的折射,由于 $n_2>n_1$,按折射定律(5.32) $\theta_2<\theta_1$,在此情形下(5.44)第一式表明对电场垂直入射面偏振的电磁波,界面上同一点入射波的电场强度与反射波的电场强度方向相反. 这表明它们的相角差 π. 从时间上讲这相当于差半个周期,从空间上讲相当于差半个波长. 这种现象因而称为半波损失.

折射定律(5.32)表明,对从光密介质到光疏介质的折射存在一临界入射角 θ_c,

$$\sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1}, \tag{5.54}$$

若入射角取此临界值折射角为$\frac{\pi}{2}$,折射波掠界面而过. 若入射角 $\theta_1>\theta_c$,则没有一个实的折射角 θ_2 能符合折射定律(5.32),表明在此条件下没有折射,只有反射,称为全反射. 不过只要允许取复值,以上的数学推导和所得的关系式在这种情形下依然成立,从中可获得有关全反射的知识. 在

$$\sin\theta_1>\frac{n_2}{n_1}=\frac{k_2}{k_1}$$

的条件下 $k_2 < k_{1x}$. 由(5.26)知 $k_2 < k_{2x}$，且

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2} = \mathrm{i}\chi, \quad \chi = \sqrt{k_{2x}^2 - k_2^2} > 0. \tag{5.55}$$

介质 2 中的电磁波为

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}_2(\boldsymbol{r}) &= \mathscr{E}_{20}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{2x}x}\mathrm{e}^{-\chi z}, \\ \mathscr{H}_2(\boldsymbol{r}) &= \mathscr{H}_{20}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{2x}x}\mathrm{e}^{-\chi z}. \end{aligned}\right\} \tag{5.56}$$

可见在全反射条件下介质 2 中仍有电磁波沿界面和入射面交线方向传播. 只是这种波随与界面的垂直距离 z 的增加而指数衰减. 电磁波透入介质 2 的深度由 χ^{-1} 表征，它具波长的量级. 若在 $z \geqslant a > 0$ 处用光密介质 3 代替光疏介质 2，它的折射指数 n_3 足够大，使

$$k_3 = n_3 \frac{\omega}{c} > k_{2x}, \tag{5.57}$$

则在介质 3 中的电磁场恢复为不衰减的平面电磁波，既沿 x 方向传播也沿 z 方向传播. 合成传播方向由此介质中平面波的波矢量 $\boldsymbol{k}_3$ 表示，它与界面法向 $\boldsymbol{z}_0$ 的交角 θ_3 符合关系

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_3} = \frac{n_3}{n_1}. \tag{5.58}$$

不过要有足够强的电磁波进入介质 3，它与介质 1 间夹的介质 2 的厚度 a 不能太大，应为波长的量级，否则在进入介质 3 前电磁波将衰减殆尽. 这种全反射条件下的透射已在实验中看到.

复值 θ_2 使 $\sin\theta_2 > 1$，从而使 $\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2\theta_2}$ 为纯虚数. 这使(5.44)第一式和(5.52)第一式分别可表为

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}'_{10y}/\mathscr{E}_{10y} &= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_\perp}, \\ \mathscr{E}'_{10x}/\mathscr{E}_{10x} &= -\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_{/\!/}}, \end{aligned}\right\}. \tag{5.59}$$

$\delta_\perp$ 与 $\delta_{/\!/}$ 都是实数相角. 它表明全反射中反射波振幅与入射波振幅大小相同，只是相角不同. 而且垂直和平行入射面偏振的两种成分在全反射中相移不同. 藉此规律可用全反射将一种偏振光改造成另一种偏振光.

§5.3 电磁波在有吸收的介质中的传播和在有吸收的介质表面上的反射，导体中的电磁波

介电常数 ϵ 和磁导率 μ 一般都可是复数. 上章末的分析表明在高频条件下 $\mu \to \mu_0$ 为实数，要考虑的主要是 ϵ 的虚部. 对导体，ϵ 应扩充为 ϵ'，其中增加一纯虚数 $\mathrm{i}\dfrac{\sigma}{\omega}$. 介电常数中的虚部使(5.24)定义的 k 成为复数，平面波(5.23)中的波矢量 $\boldsymbol{k}$ 也成为复的. 将它写成

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{k}_2, \tag{5.60}$$

$\boldsymbol{k}_1$ 与 $\boldsymbol{k}_2$ 为实矢量.平面波因子

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}}e^{-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}} \tag{5.61}$$

中出现衰减因子 $e^{-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}}$.沿 $\boldsymbol{k}_2$ 方向每前进$\dfrac{1}{k_2}$,平面波的振幅即衰减到原振幅的 e^{-1},表明介质对电磁波有吸收.上章末的分析还表明,介质吸收电磁波是由于在电磁波作用下激发起的介质内部运动能量中只有一部分以发射原模式电磁波的形式回到入射电磁波中,其余部分或以发射其他模式电磁波的形式散射掉,或耗散成热运动.这就使入射电磁波的振幅逐渐减小.将(5.60)平方得

$$k^2 = k_1^2 - k_2^2 + 2i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2. \tag{5.62}$$

衰减方向与传播方向并不一定相同,它们的关系与电磁波传播的边条件有关.在这两个方向相同的条件下此式简化为

$$k^2 = k_1^2 - k_2^2 + 2ik_1k_2 \tag{5.63}$$

很多绝缘体介质对电磁波的吸收很弱,或者说对电磁波是很透明的.只在比波长大得多的尺度上才显现出电磁波振幅的明显衰减.在此条件下

$$k_2 \ll k_1, \tag{5.64}$$

上式又可简化为

$$k^2 = k_1^2 + 2ik_1k_2. \tag{5.65}$$

上节的讨论中可以看出折射系数 n 只与波矢量的实部有关,可令

$$k_1 = n\frac{\omega}{c}, \qquad k_2 = \eta\frac{\omega}{c}, \tag{5.66}$$

上式可表为

$$k^2 = (n^2 + 2in\eta)\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{5.67}$$

另一方面,在电导率 $\sigma=0$,磁导率 $\mu=\mu_0$ 条件下,(5.21)和(4.498)给出

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} + i\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}\right), \tag{5.68}$$

ϵ_1 和 ϵ_2 为介电常数 ϵ 的实部和虚部.与上式比较得

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}}, \qquad \eta = \frac{\epsilon_2}{2\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}}. \tag{5.69}$$

设介电常数由(4.530)表示,则有

$$\left.\begin{aligned} n^2 &= 1 + A'\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}, \\ \eta &= \frac{A'}{2n}\frac{\omega\Gamma}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}, \\ A' &= \frac{A}{\epsilon_0} = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0}. \end{aligned}\right\} \tag{5.70}$$

这个色散公式表示出在介质固有角频率 ω_0 处对电磁波的共振吸收和折射系数随频率的反常变化.这种反常表现为 n^2-1 在 $\omega=\omega_0$ 附近变号.一般情形下介电常数并不一定具有(4.530)的典型形式.但只要因果律成立,克拉默斯-克勒尼希色散关系(4.509)应当成立.它所表达的介电常数实部 ϵ_1 和虚部 ϵ_2 的关系可借助(5.69)由可实际测量的 n 与 η 的关系检验.折射系数 n 的物理意义是清楚的.η 的物理意义则是:介质中电磁波的振幅经一真空波长 $\lambda_0=\frac{c}{\omega}$ 距离后衰减至原先的 $e^{-\eta}$.因而可称 η 为介质对电磁波的吸收系数.

电磁波在导体中产生电流,造成焦尔①热而被强烈吸收.与导电性对有效介电常数的贡献 $i\frac{\sigma}{\omega}$ 相比,介电常数的虚部常可略.于是有

$$\epsilon' = \epsilon_1 + i\frac{\sigma}{\omega}. \tag{5.71}$$

代入(5.21)后与(5.62)比较,得

$$k_1^2 - k_2^2 = \mu\epsilon_1\omega^2, \qquad \boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2 = \frac{1}{2}\mu\sigma\omega. \tag{5.72}$$

在传播方向 $\boldsymbol{k}_1$ 与衰减方向 $\boldsymbol{k}_2$ 一致,$\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2=k_1k_2$ 的条件下解得

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{\frac{\mu\epsilon_1}{2}}\,\omega\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon_1^2}}+1\right]^{1/2}, \\ k_2 &= \sqrt{\frac{\mu\epsilon_1}{2}}\,\omega\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon_1^2}}-1\right]^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.73}$$

如果介电常数虚部 ϵ_2 不可忽略,也可定义有效导电率

$$\sigma' = \omega\epsilon_2 + \sigma, \tag{5.74}$$

将有效介电常数表为

$$\epsilon' = \epsilon_1 + i\frac{\sigma'}{\omega}. \tag{5.75}$$

与(5.71)相比,此式只是用 σ' 替代了 σ.ϵ_2 可略表现为 σ' 随 ω 变化的线性项可略.将 σ 换成 σ'(5.73)便一般地成立.

设一束平面电磁波垂直于分界平面从透明绝缘介质射入导体介质.将界面指向导体的法向取为 z 方向,界面作 xy 平面,$z=0$.导体内的电磁波为

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}(\boldsymbol{r}) &= \mathscr{E}_0 e^{-k_2 z}e^{ik_1 z}, \\ \mathscr{H}(\boldsymbol{r}) &= \mathscr{H}_0 e^{-k_2 z}e^{ik_1 z}, \end{aligned}\right\} \tag{5.76}$$

传播方向与衰减方向一致,均沿 z 方向.由(5.8)第四式的推导过程可以看出,

---

① Joule.

(5.73)中的 σ 来自导体中的传导电流，$\omega\epsilon_1$ 来自其中的位移电流，$\frac{\sigma}{\omega\epsilon_1}$为这两部分贡献之比.分两种情况作讨论：

1. $\frac{\sigma}{\omega\epsilon_1}\ll 1$ 的情形.此情形中传导电流远小于位移电流.不良导体，或导电性虽好但电磁波频率甚高，均属这种情形.将(5.73)展成$\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon_1^2}$的幂级数，到一次幂得

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{\mu\epsilon_1}\,\omega\left(1+\frac{\sigma^2}{8\omega^2\epsilon_1^2}\right), \\ k_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_1}}\,\frac{\sigma}{2}\left(1-\frac{\sigma^2}{8\omega^2\epsilon_1^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5.77}$$

由此知

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{\sigma}{2\omega\epsilon_1}\left(1-\frac{\sigma^2}{4\omega^2\epsilon_1^2}\right)\simeq\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_1}\ll 1, \tag{5.78}$$

表明一个波长内电磁波的衰减可以忽略.(5.77)第一式还表明这种导体中电磁波的相速

$$u = \frac{\omega}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon_1}}\left(1-\frac{\sigma^2}{8\omega^2\epsilon_1^2}\right)\simeq\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon_1}}, \tag{5.79}$$

与在绝缘体中类似.传导电流的修正是使 ω 小的电磁波相速减小.(5.77)第二式则表明 k_2 有一高频极限$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_1}}\frac{\sigma}{2}$.随 ω 减小，k_2 从此极限减小.

2. $\frac{\sigma}{\omega\epsilon_1}\gg 1$ 的情形.良导体，例如金属属于这种情形.忽略(5.73)中与$\frac{\sigma}{\omega\epsilon_1}$和$\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon_1^2}$相加减的 1，得

$$k_1\simeq k_2\simeq\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}. \tag{5.80}$$

此式和(5.76)表明，在

$$\frac{1}{k_2}\simeq\frac{1}{k_1} = \frac{\lambda}{2\pi}\equiv\lambdabar \tag{5.81}$$

长度上电磁波的振幅即衰减到原来的$\frac{1}{e}$，λ 为电磁波的波长.电磁波在导体内经几个波长便衰减殆尽，因而不能存在于导体内部，只能存在于导体表面极薄的一层.这一结论不只适用于衰减方向与传播方向一致的电磁波，而是一般地成立的.这可直接从(5.72)看出.若在衰减方向与传播方向一致条件下此式已被满足，则在此二

方向有一非零夹角条件下，对给定 μ、ϵ_1 和 σ 的同样导体，对给定 ω 的同样频率的电磁波，要仍然满足此式必须同时增加 k_1 和 k_2 的值，从而使衰减长度 $\frac{1}{k_2}$ 更小. 从导体表面算起，电磁波将在更短的距离内衰减殆尽. 在没有电磁波的地方就没有交变电场，按(5.5)也就没有交变电流. 可见交变电流也只能存在于导体表面极薄的一层. 电磁波、交变电场和交变电流只存在于导体表面附近的现象称为趋肤效应.

$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \tag{5.82}$$

称为趋肤深度. 例如铜，对 50Hz 交变电场 $d = 0.9\text{cm}$，对 100MHz 交变电场 $d = 0.71 \times 10^{-3}\text{cm}$.

细心的读者可能已看出，将 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 反向，即用 $-\boldsymbol{k}$ 代替 $\boldsymbol{k}$，方程(5.20)仍然满足. 即是说，可将(5.76)中的 k_1 和 k_2 改号. 这就将随着深入导体内部而衰减的电磁波变成了随着深入导体内部而增长的电磁波. 这种电磁波不是集中于导体表面附近，而是在导体深部暴涨. 会不会发生这种情形呢？对于无穷大的导体不能排除这种可能性. 然而实际导体都是有限的，四周由表面包围. 如果从表面向内电磁波的振幅指数上涨，从各点向内延伸的电磁波便不可能在导体内部平滑相连. 不论麦克斯韦方程(5.8)还是波方程(5.20)都要求电磁场对坐标二次可微. 因此电磁场和它对坐标的一次微商在导体内应处处连续，或者说电磁场在导体内应处处平滑相连. 只有随着深入导体内部振幅指数衰减的电磁波才能符合此要求. 实际发生的便只能是趋肤效应，而不是电磁波在导体内的暴涨.

回到透明绝缘介质与导体交界的 xy 平面. 用

$$\boldsymbol{\mathscr{E}}_I(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\mathscr{E}}_{I0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_I z}, \qquad \boldsymbol{\mathscr{H}}_I(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\mathscr{H}}_{I0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_I z} \tag{5.83}$$

表垂直于界面自绝缘介质入射的电磁波，

$$\boldsymbol{\mathscr{E}}'_I(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\mathscr{E}}'_{I0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_I z}, \qquad \boldsymbol{\mathscr{H}}'_I(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\mathscr{H}}'_{I0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_I z} \tag{5.84}$$

表自界面反射回绝缘介质的电磁波. 射入导体的电磁波仍由(5.76)表示. 将入射波电场偏振方向取为 x 轴，$\mathscr{E}_{I0y} = 0$，边条件(5.10)成为

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{E}_{I0x} + \mathscr{E}'_{I0x} = \mathscr{E}_{0x}, \\ &\mathscr{E}'_{I0y} = \mathscr{E}_{0y}. \end{aligned}\right\} \tag{5.85}$$

由(5.22)得

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\mathscr{H}}_{I0} &= \frac{k_I}{\omega\mu_I}\mathscr{E}_{I0x}\boldsymbol{y}_0, \\ \boldsymbol{\mathscr{H}}'_{I0} &= \frac{k_I}{\omega\mu_I}(\mathscr{E}'_{I0y}\boldsymbol{x}_0 - \mathscr{E}'_{I0x}\boldsymbol{y}_0), \\ \boldsymbol{\mathscr{H}}_0 &= -\frac{k}{\omega\mu}(\mathscr{E}_{0y}\boldsymbol{x}_0 - \mathscr{E}_{0x}\boldsymbol{y}_0), \end{aligned}\right\} \tag{5.86}$$

其中 μ_I 和 μ 分别为绝缘介质和导体中的磁导率，$k = k_1 + \mathrm{i}k_2$. 边条件(5.11)给出

$$\left.\begin{aligned}\frac{k_I}{\mu_I}(\mathscr{E}_{I0x}-\mathscr{E}'_{I0x}) &= \frac{k}{\mu}\mathscr{E}_{0x},\\ \frac{k_I}{\mu_I}\mathscr{E}'_{I0y} &= -\frac{k}{\mu}\mathscr{E}_{0y}.\end{aligned}\right\} \tag{5.87}$$

与(5.85)联立解得

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{E}'_{I0y} &= \mathscr{E}_{0y} = 0,\\ \mathscr{E}'_{I0x} &= \frac{\mu k_I - \mu_I k}{\mu k_I + \mu_I k}\mathscr{E}_{I0x},\\ \mathscr{E}_{0x} &= \frac{2\mu k_I}{\mu k_I + \mu_I k}\mathscr{E}_{I0x}.\end{aligned}\right\} \tag{5.88}$$

乘上时间因子 $e^{-i\omega t}$ 后，由电场强度$\boldsymbol{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r},t)$的实部和磁场强度$\boldsymbol{\mathscr{H}}(\boldsymbol{r},t)$的实部可按(1.233)算出反射波和入射波能流密度时间平均值之比

$$R = \frac{|\mathscr{E}'_{I0x}|^2}{|\mathscr{E}_{I0x}|^2} = \left|\frac{\mu k_I - \mu_I k}{\mu k_I + \mu_I k}\right|^2 = \frac{(\mu k_I - \mu_I k_1)^2 + (\mu_I k_2)^2}{(\mu k_I + \mu_I k_1)^2 + (\mu_I k_2)^2}, \tag{5.89}$$

称为反射系数.对传导电流远大于位移电流的导体，由(5.24)和(5.80)得

$$\frac{\mu k_I}{\mu_I k_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_I \mu}{\epsilon_1 \mu_I}}\sqrt{\frac{2\epsilon_1\omega}{\sigma}} \ll 1, \tag{5.90}$$

$$\begin{aligned}R &= \frac{[1-(\mu k_I)/(\mu_I k_1)]^2+1}{[1+(\mu k_I)/(\mu_I k_1)]^2+1} \simeq 1 - 2\frac{\mu k_I}{\mu_I k_1}\\ &= 1 - \sqrt{\frac{\epsilon_I\mu}{\epsilon_1\mu_I}}\sqrt{\frac{8\epsilon_1\omega}{\sigma}} \simeq 1.\end{aligned} \tag{5.91}$$

可见即使垂直入射的电磁波也几乎被良导体完全反射回去.电磁波只能进入金属表面很薄的一层，由此导致的能量耗散是很小的.

只要允许取复值，上节关于任意入射角条件下的一般折射、反射关系的数学推导和结果依然成立.只是要特别注意其中各量的物理含义和物理解释.例如若介质2为导体其中的 θ_2 取复值，不再表示通常意义下的折射角.

§5.4 从表面传来的电磁波，基尔霍夫[1]公式，惠更斯[2]原理与电磁波的衍射

回到没有吸收的均匀介质.在无源条件下一点的电磁波可视为从它四周传来的.这可从波动方程的推迟解严格表出.设一点 $\boldsymbol{r}'=(x',y',z')$周围有一确定空间区域无源，典型波动方程(4.113)右边 $\Xi(\boldsymbol{r},t)=0$，成为无源波动方程

---

① G. Kirchhoff.

② C. Huygens.

$$\nabla^2\Psi(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\Psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=0. \tag{5.92}$$

由于源的傅里叶变换系数 $\xi(\boldsymbol{r})\equiv\xi(\omega,\boldsymbol{r})=0$,(4.114)定义的波的傅里叶系数 $\psi(\boldsymbol{r})\equiv\psi(\omega,\boldsymbol{r})$满足的方程(4.118)成为齐次方程

$$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r})+k^2\psi(\boldsymbol{r})=0, \tag{5.93}$$

k 由(4.117)定义.采用推迟格林函数(4.127)求解此方程,它满足点源的亥姆霍兹方程(4.119).在 $\boldsymbol{r}'$周围的无源区域中作一封闭曲面 s 包围 $\boldsymbol{r}'$,它所包围的体积为 $\mathscr{V}$.在此体积中用公式(2.61),其中 $\psi_1(\boldsymbol{r})\equiv\psi(\boldsymbol{r})$, $\psi_2(\boldsymbol{r})\equiv g_+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$.利用方程(5.93)和(4.119)算出体积分,在结果中交换符号 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$,再经整理后得

$$\psi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\oint_s\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)\mathrm{d}s', \tag{5.94}$$

其中 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$, $\frac{\partial}{\partial n'}$表对表面上 $\boldsymbol{r}'$处外向法线坐标的微商.此式对封闭曲面 s 包围的无源空间中任一点 $\boldsymbol{r}$ 成立.由于

$$\frac{\partial}{\partial n'}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}=\boldsymbol{n}'\cdot\nabla'\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}-\mathrm{i}k\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right)\cdot\boldsymbol{n}',$$

其中 $\boldsymbol{n}'$为 $\boldsymbol{r}'$处表面 s 的外向单位法矢, ∇'为对 $\boldsymbol{r}'$的梯度, $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$,(5.94)可写为

$$\psi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\oint_s\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\left[\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}+\left(\mathrm{i}k-\frac{1}{R}\right)\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{R}}{R}\cdot\boldsymbol{n}'\right]\mathrm{d}s'. \tag{5.95}$$

将所得 $\psi(\boldsymbol{r})$重新写为 $\psi(\omega,\boldsymbol{r})$,代回(4.122)得

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi}\oint_s\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{r}',t')}{\partial n'}-\left(\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{1}{R}\right)\Psi(\boldsymbol{r}',t')\frac{\boldsymbol{R}}{R}\cdot\boldsymbol{n}'\right]\mathrm{d}s', \tag{5.96}$$

其中

$$t'=t-\frac{R}{u}. \tag{5.97}$$

(5.95)和(5.96)称为基尔霍夫公式.将(5.96)与(4.134)比较可以看出,表面 s 上各点的波扮演着波源的角色, $\boldsymbol{r}$ 处的波可看成这些‘波源’发出的波的叠加.这使人想起光学中的惠更斯原理.该原理称:‘波前上的每一点都可当作一个波源,波向前传播形成的新波前可视为由这些波源发出的子波叠加而成.’基尔霍夫公式(5.96)可当作惠更斯原理的定量表示.光学中用惠更斯原理分析衍射现象.作为一个例子,下面用基尔霍夫公式对夫琅禾费①衍射作定量分析.

如图 5-2,一束平面波自背面($z<0$ 处)射向不透明的 xy 平面.平面上开了一个宽 $2a$,长 $2b$ 的矩形孔,波可由此孔进入 $z>0$ 的空间.将坐标原点取在矩形孔的中心, x 轴沿孔宽的方向, y 轴沿孔长的方向, xyz 组成右手正交系.在 $z>0$ 的

① Fraunhofer.

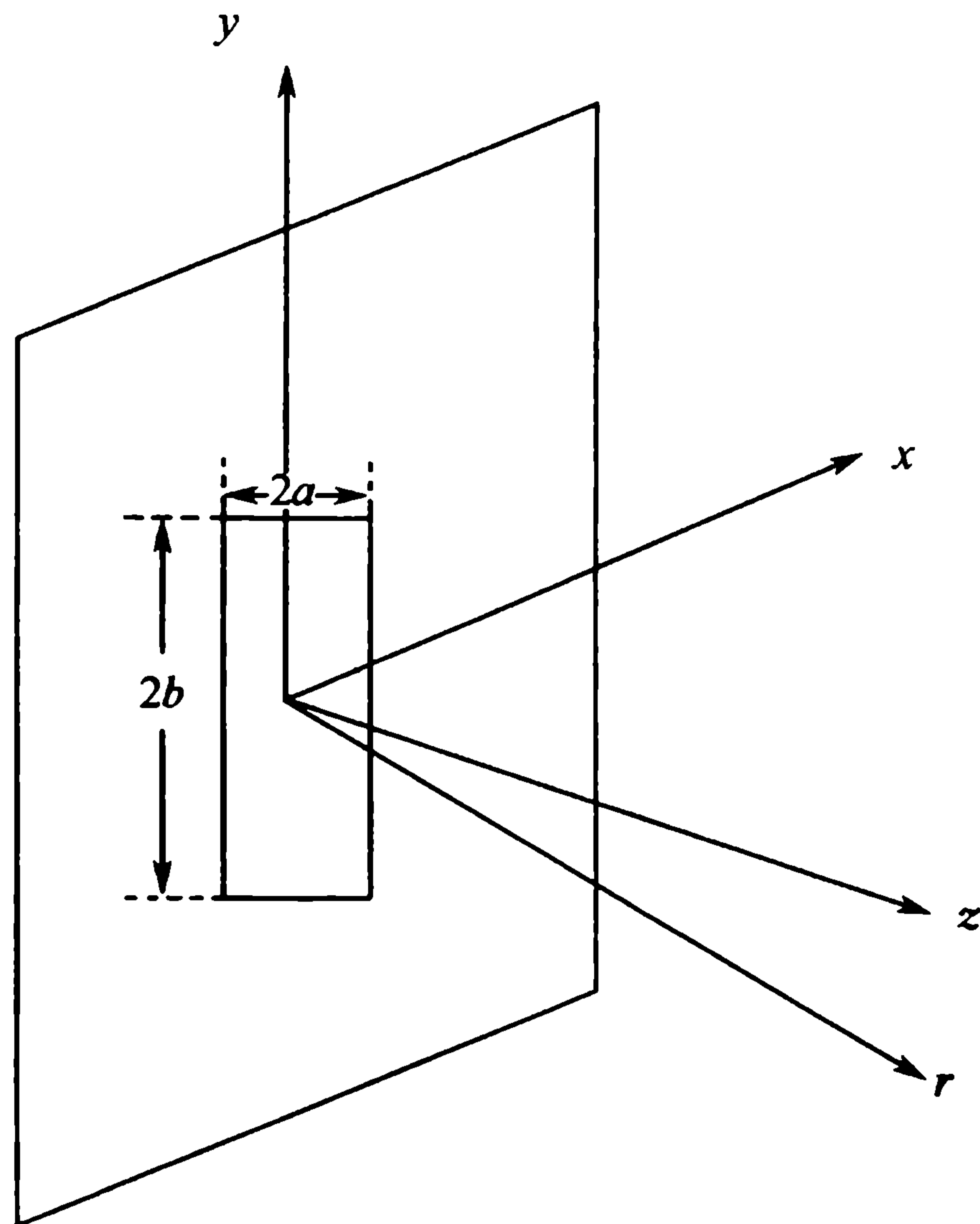


图 5-2　夫琅禾费衍射

一侧距孔甚远处观察传过来的电磁波.夫琅禾费衍射即指在此条件下看到的衍射现象.考虑由 xy 平面和 $z>0$ 一侧无穷远处的无穷大半球面组成的封闭曲面,用(5.95)计算 $z>0$ 半空间中一点具有一定频率的波函数值 ψ.由于并无波从 $z>0$ 一方入射,无穷远处无穷大半球面上的波函数及其微商均为零.设除孔所占区域外 xy 平面上的波函数及其微商也是零,(5.95)中的面积分只须在孔所占矩形上进行.设入射平面波为

$$\psi(\boldsymbol{r}') = \psi_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'},$$

$$\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'} = -\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}')}{\partial z} = -ik_z\psi_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}.$$

在离孔很远的 $\boldsymbol{r}$ 处,由于 $\boldsymbol{r}'$在孔上,$\frac{r'}{r}$为小量,

$$R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'} = r\sqrt{1 - 2\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\cdot\boldsymbol{r}' + \frac{r'^2}{r^2}}$$

$$\approx r\sqrt{1 - 2\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^2}} \approx r - \frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{r}' \approx r, \tag{5.98}$$

$$kR \approx kr \gg 1, \quad \frac{1}{R} \ll k. \tag{5.99}$$

由(5.95)得

$$\psi(\boldsymbol{r}) = -i\psi_0\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int_{-b}^{b}dy'\int_{-a}^{a}dx' e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}'}(k_z + k_z'), \tag{5.100}$$

其中 $\boldsymbol{k}'=k\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$.(5.98)成立的条件为 $\boldsymbol{r}$ 处与孔的距离比孔本身的尺度大得多,在此前提下(5.99)成立的条件则是 r 比波长大得多.实际要作的积分是

$$\int_{-b}^{b}\mathrm{d}y'\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}'}=\int_{-b}^{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_y-k_y')y'}\mathrm{d}y'\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x-k_x')x'}\mathrm{d}x'$$
$$=4\frac{\sin[(k_x-k_x')a]}{k_x-k_x'}\frac{\sin[(k_y-k_y')b]}{k_y-k_y'}.$$

流入 $\boldsymbol{k}'$方向单位立体角的能量经时间平均后正比于(5.100)中与$\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}$相乘的因子的绝对值平方,即

$$I=I_0(k_z+k_z')^2\left\{\frac{\sin[(k_x-k_x')a]}{k_x-k_x'}\frac{\sin[(k_y-k_y')b]}{k_y-k_y'}\right\}^2,\qquad(5.101)$$

I_0 为一与方向无关的常数.通常电磁波垂直于 xy 平面入射,$k_x=k_y=0,k_z=k$.分别用 θ_1、θ_2 和 θ_3 表示观察方向 $\boldsymbol{k}'$与x、y 和z 轴的夹角,

$$k_x'=k\cos\theta_1,\quad k_y'=k\cos\theta_2,\quad k_z'=k\cos\theta_3.$$

在此情况下(5.101)成为

$$I=I_0\frac{(1+\cos\theta_3)^2}{k^2}\left[\frac{\sin(ak\cos\theta_1)}{\cos\theta_1}\frac{\sin(bk\cos\theta_2)}{\cos\theta_2}\right]^2.\qquad(5.102)$$

此式与实验相符甚好.

§5.5 电磁波在非均匀介质内的传播,几何光学极限,程函与费马[①]原理,光线方程

在非均匀介质中,ϵ、μ 和σ 都不再是常数,而是空间坐标的函数.在此条件下,由麦克斯韦方程(1.70)~(1.73),电磁物态方程(5.4),欧姆定律(5.5)和连续性方程(5.6)得到的具一定频率的电磁场方程是

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot(\epsilon'\mathscr{E})=0,\quad \nabla\cdot(\mu\mathscr{H})=0,\\&\nabla\times\mathscr{E}=\mathrm{i}\omega\mu\mathscr{H},\quad \nabla\times\mathscr{H}=-\mathrm{i}\omega\epsilon'\mathscr{E},\end{aligned}\right\}\qquad(5.103)$$

后两式与(5.8)的后两式相同.当对此二式两边取旋度时,由于出现 μ 和 ϵ'对坐标的微商,不再得波方程(5.20).设 μ 或 ϵ'发生显著变化的空间尺度为 a,μ 或 ϵ'对坐标的每次微商在数量级上便相当于除以 a.而$\mathscr{E}$或$\mathscr{H}$对坐标的每次微商在数量级上则相当于除以波长 λ.若 μ 和 ϵ'在一个波长的尺度上的变化可忽略不计,即若 $a\gg\lambda$,则 μ 和 ϵ'对坐标的微商与$\mathscr{E}$和$\mathscr{H}$对坐标的微商相比可忽略不计.在此条件

---

① Fermat.

下,对(5.103)后两式两边取旋度后再用(5.103),忽略 μ 和 ϵ' 的微商后仍得波方程(5.20).只是现在 k^2 不再是常数,而是坐标的函数.将它的真空值记为

$$k_0^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2}, \tag{5.104}$$

介质中

$$k^2 = k_0^2 n^2, \qquad n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu_0\epsilon_0}}. \tag{5.105}$$

对透明绝缘介质,$\sigma=0$,$\epsilon'=\epsilon$ 和 μ 为正实数,n 即折射系数.k^2 与空间位置有关即 n 与位置有关.

(5.20)中两个方程的每一分量方程都可用具有一定频率的波方程的典型形式

$$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r}) + k^2\psi(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{5.106}$$

代表,其中 k^2 为坐标 $\boldsymbol{r}$ 的函数.任何复数可分解为一个绝对值因子和一个相因子的积,因此可令

$$\psi(\boldsymbol{r}) = C(\boldsymbol{r})e^{ik_0S(\boldsymbol{r})}, \tag{5.107}$$

其中 k_0 由(5.104)定义,$C(\boldsymbol{r})\geqslant 0$ 和 $S(\boldsymbol{r})$为坐标 $\boldsymbol{r}$ 的实函数.代入(5.106)左边,要求所得复数的实部和虚部分别为零,得

$$\nabla^2 C - C(k_0\nabla S)^2 + Ck^2 = 0, \tag{5.108}$$

$$2(\nabla C)\cdot(\nabla S) + C\nabla^2 S = 0. \tag{5.109}$$

其中第二式又可写为

$$\nabla\cdot(C^2\nabla S) = 0,$$

表示矢量场

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = C^2(\boldsymbol{r})\nabla S(\boldsymbol{r}) \tag{5.110}$$

无散.波动可视为等相位面的行进,波传播的方向因而垂直于等相位面,即垂直于由方程

$$S = \text{常数} \tag{5.111}$$

决定的曲面,与∇S 所指的方向平行.可见(5.110)定义的 $\boldsymbol{J}$ 指波传播的方向.从以往关于波动的经验知,可认为 $\boldsymbol{J}$ 正比于能流密度矢量在一周期内的平均.对具有一定频率的情形,各量都作周期变化,经一周期平均后即不随时间变化.能量密度也是这样.按连续性方程,经一周期平均后的能流密度矢量应无散.由此可理解矢量场 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$的无散性.这一分析也加强了波沿$\nabla S$ 方向传播的概念.

用(5.105)将(5.108)写为

$$(\nabla S)^2 - \frac{\lambda\!\!\!^{-2}_0}{C}\nabla^2 C = n^2, \tag{5.112}$$

其中

$$\lambda\!\!\!^{-}_0 \equiv \frac{1}{k_0} = \frac{\lambda_0}{2\pi},$$

λ_0 为圆频率为 $\omega = ck_0$ 的电磁波在真空中的波长. 可见(5.112)左边第二项在数量级上可估计为 C 在一个波长尺度上的相对变化. 如果介质是均匀的, k 为常数, (5.106)有平面波解. 将平面波写成(5.107)的形式, 则 C 为与坐标无关的常数, $k_0 S = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$. 在非均匀介质中 k 与坐标 $\boldsymbol{r}$ 有关, C 也就不再是常数, 而与坐标有关. 不过在 k 随 $\boldsymbol{r}$ 只缓慢变化, 在一个波长尺度上的变化可忽略不计的条件下, C 随 $\boldsymbol{r}$ 的变化必也缓慢. 如果 C 在一个波长尺度上的变化可忽略不计, 则称达到了几何光学极限. (5.112)右边的折射系数 n 为 1 的量级, 而它左边第二项在几何光学极限下远小于 1, 相比之下可忽略不计. 该式因而成为

$$(\nabla S)^2 = n^2. \tag{5.113}$$

处处垂直等相位面(5.111)的曲线为电磁波行进的路线, 称为光线. 用参数方程 $x(s), y(s)$ 和 $z(s)$ 表示光线, 其中参数 s 为从该光线上一给定点到所论点(x, y, z)的曲线长. 因此

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}, \tag{5.114}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2} = 1. \tag{5.115}$$

处处垂直等相位面的条件要求光线上每点的切向单位矢量 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)$ 恒沿该点 ∇S 所指方向, 因而

$$\nabla S = \eta \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}, \tag{5.116}$$

η 为比例系数. 将此式两边平方, 左边用(5.113), 右边用(5.115), 得 $\eta = n$,

$$\nabla S = n \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}, \tag{5.117}$$

由此又可得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\nabla S = n\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right)^2 = n. \tag{5.118}$$

沿光线将此式两边从 $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 到 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ 积分, 得

$$S(\boldsymbol{r}) - S(\boldsymbol{r}_0) = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} n\,\mathrm{d}s = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} n(x', y', z')\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s'}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s'}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s'}\right)^2}\,\mathrm{d}s'. \tag{5.119}$$

考虑由于光线的变更引起的此式两端的变更. 将两条光线始点的参数同取为 $s' = s_0$; 设互相比较的两条光线长度一样, 末点的参数也必相同, 可同记为 $s' = s$. 设两条光线无限靠近, 即光线的变更无穷小, 由此引起的(5.119)左边的变更即它的变分

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{r})}{\partial x}\delta x + \frac{\partial S(\boldsymbol{r})}{\partial y}\delta y + \frac{\partial S(\boldsymbol{r})}{\partial z}\delta z - \frac{\partial S(\boldsymbol{r}_0)}{\partial x_0}\delta x_0 - \frac{\partial S(\boldsymbol{r}_0)}{\partial y_0}\delta y_0 - \frac{\partial S(\boldsymbol{r}_0)}{\partial z_0}\delta z_0, \tag{5.120}$$

右边的变更即变分

$$\delta\int_{r_0}^{r} n\mathrm{d}s = \int_{s_0}^{s}\left[\frac{\partial n}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial n}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial n}{\partial z'}\delta z' + n\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s'}\delta\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s'} + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s'}\delta\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s'} + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s'}\delta\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s'}\right)\right]\mathrm{d}s'$$

$$= \int_{s_0}^{s}\left[\frac{\partial n}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial n}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial n}{\partial z'}\delta z' + n\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s'}\frac{\mathrm{d}\delta x'}{\mathrm{d}s'} + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s'}\frac{\mathrm{d}\delta y'}{\mathrm{d}s'} + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s'}\frac{\mathrm{d}\delta z'}{\mathrm{d}s'}\right)\right]\mathrm{d}s'$$

$$= n(\boldsymbol{r})\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\delta x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\delta y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\delta z\right) - n(\boldsymbol{r}_0)\left(\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s_0}\delta x_0 + \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}s_0}\delta y_0 + \frac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}s_0}\delta z_0\right)$$

$$- \int_{s_0}^{s}\left\{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s'}\left(n\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s'}\right) - \frac{\partial n}{\partial x'}\right]\delta x' + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s'}\left(n\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s'}\right) - \frac{\partial n}{\partial y'}\right]\delta y'\right.$$

$$\left. + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s'}\left(n\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s'}\right) - \frac{\partial n}{\partial z'}\right]\delta z'\right\}\mathrm{d}s', \tag{5.121}$$

第一个等号处用了约束条件(5.115),第二个等号处交换了变分与微分的次序,第三个等号处则作了部分积分.作为(5.119)两边的变分,(5.120)和(5.121)右边应相等.设(5.117)在 $\boldsymbol{r}_0$ 处成立,这一等式可写为

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{r})}{\partial x}\delta x + \frac{\partial S(\boldsymbol{r})}{\partial y}\delta y + \frac{\partial S(\boldsymbol{r})}{\partial z}\delta z$$

$$= n(\boldsymbol{r})\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\delta x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\delta y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\delta z\right) - \int_{s_0}^{s}\left\{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s'}\left(n\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s'}\right) - \frac{\partial n}{\partial x'}\right]\delta x'\right.$$

$$\left. + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s'}\left(n\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s'}\right) - \frac{\partial n}{\partial y'}\right]\delta y' + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s'}\left(n\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s'}\right) - \frac{\partial n}{\partial z'}\right]\delta z'\right\}\mathrm{d}s'. \tag{5.122}$$

由于变分 δx、δy 和 δz 都是任意的,(5.117)在 $\boldsymbol{r}$ 处也成立的充分兼必要条件为此式右边的积分为零.这只须积分号下每个方括号都是零.将此要求写成矢量方程的形式就是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right) = \nabla n. \tag{5.123}$$

此方程规定了光线的行进方式,称为光线方程.将它两边与 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 点乘,得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\nabla n = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s},$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \frac{n}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}.$$

此式表明只要约束条件(5.115)在光线上一点成立,光线方程(5.123)即保证它在光线上每一点都成立,光线方程(5.123)与约束条件(5.115)相洽.(5.123)表示矢量 $n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 沿光线的逐点变化.此矢量长为 n,沿光线切向,因而指光的传播方向.(5.123)表示此矢量的变化沿折射系数 n 的梯度方向,因而垂直于等 n 面.以等 n 面为界面,光线切矢量 $n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 平行于界面的分量在界面两侧相等.§5.2 正是据此证明了折射定律(5.32).光线方程(5.123)可视为折射定律的逐点表达,光在非均

匀介质中的行进可视为逐点折射过程.由于(5.117)直接导致(5.113),以上推导除给出光线方程外还给出方程(5.113)的一个解法.设已知 S 的一个等值面

$$S(\boldsymbol{r}_0) = 常数, \tag{5.124}$$

常数值可任意设定,便可由(5.119)算出它在任一点 $\boldsymbol{r}$ 的值 $S(\boldsymbol{r})$.(5.119)右边的积分沿(5.123)规定的路线,此路线还必须垂直于曲面(5.124).

从另一角度来看待几何光学极限下的上述结果.对任意两点 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}$,以及联结这两点的一条曲线,可定义线积分

$$S(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) \equiv \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} n\mathrm{d}s = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} n(x',y',z')\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s'}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s'}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s'}\right)^2}\mathrm{d}s', \tag{5.125}$$

其中 $\mathrm{d}s$ 由(5.114)定义.这样定义的 S 是 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}$ 两点的函数,同时是联结这两点的曲线的泛函,称为这条曲线的光程.与(5.121)一样的推导得由于始末点 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}$ 以及联结它们的曲线的变更而引起的变分

$$\begin{aligned}
&\delta S(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) \\
&= \delta\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} n\mathrm{d}s = n(\boldsymbol{r})\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\delta x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\delta y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\delta z\right) - n(\boldsymbol{r}_0)\left(\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s_0}\delta x_0 + \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}s_0}\delta y_0 + \frac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}s_0}\delta z_0\right) \\
&\quad - \int_{s_0}^{s}\left\{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s'}\left(n\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s'}\right) - \frac{\partial n}{\partial x'}\right]\delta x' + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s'}\left(n\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s'}\right) - \frac{\partial n}{\partial y'}\right]\delta y'\right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s'}\left(n\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s'}\right) - \frac{\partial n}{\partial z'}\right]\delta z'\right\}\mathrm{d}s'.
\end{aligned} \tag{5.126}$$

如果取定 $\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{r}$ 间的联线为(5.123)规定的光线,(5.125)定义的 $S(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 便成为坐标 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 的确定函数,称为程函.由于 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 变更而引起的程函的变分为

$$\begin{aligned}
\delta S(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) &= n(\boldsymbol{r})\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\delta x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\delta y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\delta z\right) \\
&\quad - n(\boldsymbol{r}_0)\left(\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s_0}\delta x_0 + \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}s_0}\delta y_0 + \frac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}s_0}\delta z_0\right).
\end{aligned} \tag{5.127}$$

可见

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial S}{\partial x} = n(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = n(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = n(\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}, \\
&\frac{\partial S}{\partial x_0} = -n(\boldsymbol{r}_0)\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s_0}, \quad \frac{\partial S}{\partial y_0} = -n(\boldsymbol{r}_0)\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}s_0}, \quad \frac{\partial S}{\partial z_0} = -n(\boldsymbol{r}_0)\frac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}s_0}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.128}$$

给定 $\boldsymbol{r}_0$,程函 S 作为 $\boldsymbol{r}$ 的函数满足方程(5.117)从而是方程(5.113)的解. $k_0S(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 是几何光学极限下由点 $\boldsymbol{r}_0$ 发出的波在 $\boldsymbol{r}$ 处的相位.给定始末点 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}$,(5.125)定义的光程 S 便只是此二点间联线的泛函.由于联线的变更引起的光程的变分为

$$\delta S = -\int_{s_0}^{s}\left\{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s'}\left(n\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s'}\right)-\frac{\partial n}{\partial x'}\right]\delta x' + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s'}\left(n\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s'}\right)-\frac{\partial n}{\partial y'}\right]\delta y' + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s'}\left(n\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s'}\right)-\frac{\partial n}{\partial z'}\right]\delta z'\right\}\mathrm{d}s'. \tag{5.129}$$

可见光线方程(5.123)等价于要求光程的变分为零.于是几何光学的基本原理又可表述为:

"两点间各种可能的联线中,光线使光程取极值."

这就是费马原理.在这里,它是波动光学在几何光学极限下的推论.

§5.6 电磁波在波导内的传播,光波导与光纤

可以用反射性能好的材料,如导体,将电磁波约束在一定范围内,令它沿一定方向按一定方式传播.这样设计的器件称为波导.趋肤深度为零的导体称为理想导体.一无穷长,处处横截面相同,壁为理想导体,内部为真空或无吸收均匀绝缘介质的波导管称为理想波导.由于边条件(5.19),若从理想波导内部趋于管壁,电场强度$\mathscr{E}$平行管壁的分量应趋于零.这便是理想波导的边条件.在波导内部,具一定频率的电磁波满足方程组(5.8),其中 $\epsilon'=\epsilon$ 和 μ 均为正实数,并因而满足齐次亥姆霍兹方程组(5.20).

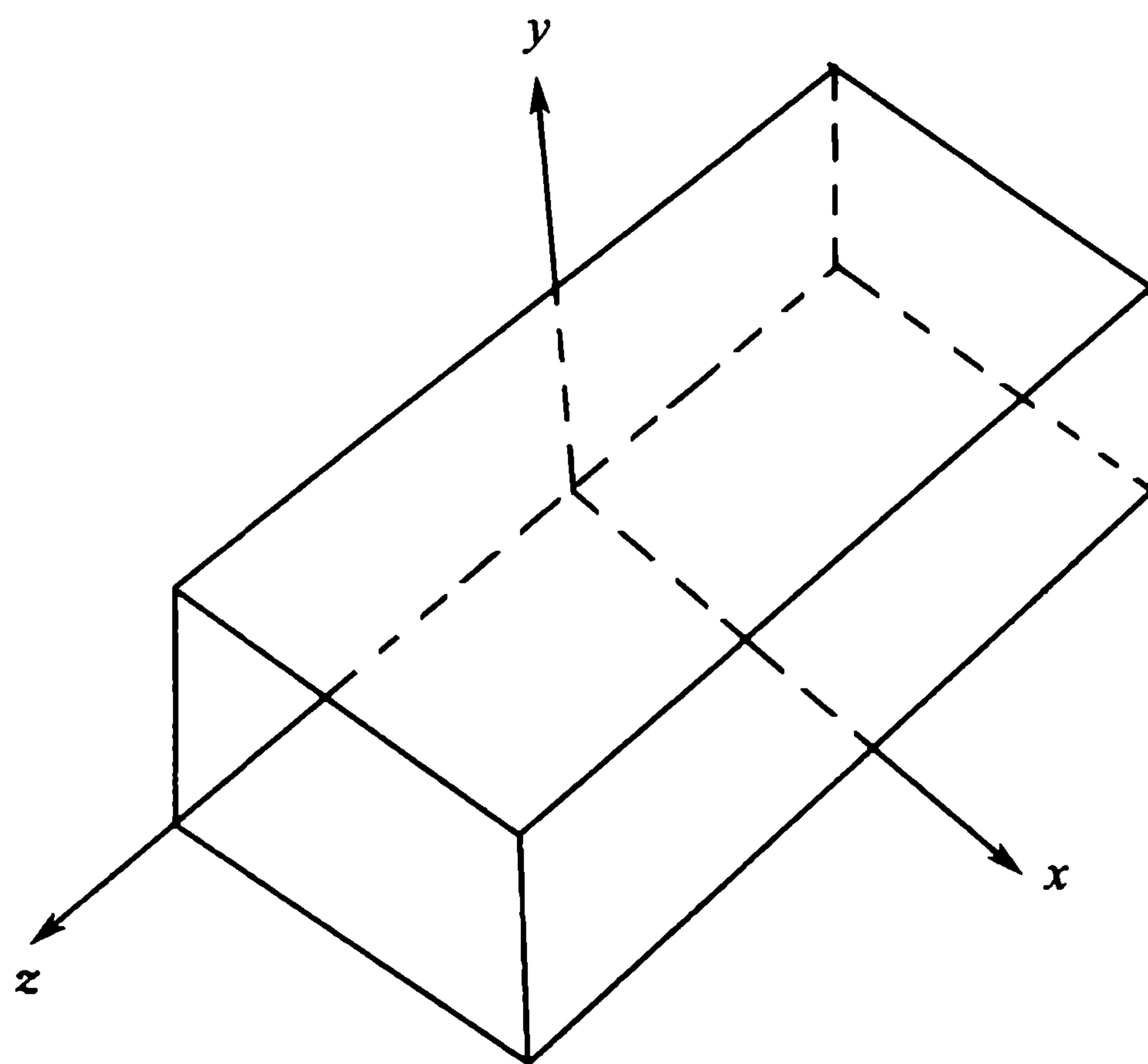


图 5-3　矩形波导

考虑矩形理想波导,它的内部横截面为矩形.如图 5-3,将坐标原点取在矩形横截面的左下角,分别沿矩形的宽和高取 x 轴和 y 轴,并按右手规则沿管长方向取 z 轴.典型的齐次亥姆霍兹方程(5.93)有分离变量解

$$\psi(x,y,z) = [\alpha_1\cos(k_x x)+\alpha_2\sin(k_x x)][\beta_1\cos(k_y y)+\beta_2\sin(k_y y)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}, \tag{5.130}$$

其中

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{u^2} = \mu\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{5.131}$$

(5.130)在波导管的横截面内为驻波,沿管长方向为行波.对沿 z 轴正方向传播的波,$k_z>0$.对理想波导中的电场强度和磁场强度,则在满足亥姆霍兹方程组(5.20)的基础上还要满足方程组(5.8)和理想波导边条件.矩形理想波导中电磁场的分离变量解便是

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}_x(\boldsymbol{r}) &= a_1\cos(k_x x)\sin(k_y y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}, \\ \mathscr{E}_y(\boldsymbol{r}) &= a_2\sin(k_x x)\cos(k_y y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}, \\ \mathscr{E}_z(\boldsymbol{r}) &= a_3\sin(k_x x)\sin(k_y y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}, \end{aligned}\right\} \tag{5.132}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{H}_x(\boldsymbol{r}) &= b_1\sin(k_x x)\cos(k_y y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}, \\ \mathscr{H}_y(\boldsymbol{r}) &= b_2\cos(k_x x)\sin(k_y y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}, \\ \mathscr{H}_z(\boldsymbol{r}) &= b_3\cos(k_x x)\cos(k_y y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}, \end{aligned}\right\} \tag{5.133}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} k_x &= \frac{l_1\pi}{s_1}, \qquad k_y = \frac{l_2\pi}{s_2}, \\ k_z &= \sqrt{\frac{\omega^2}{u^2} - \frac{(l_1\pi)^2}{s_1^2} - \frac{(l_2\pi)^2}{s_2^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{5.134}$$

s_1 和 s_2 分别为波导内部横截面矩形的宽和高,l_1、$l_2=0,1,2,\cdots$为非负整数,

$$a_1k_x + a_2k_y - \mathrm{i}a_3k_z = 0, \tag{5.135}$$

且

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{\omega\mu}(a_2k_z + \mathrm{i}a_3k_y), \\ b_2 &= \frac{1}{\omega\mu}(a_1k_z + \mathrm{i}a_3k_x), \\ b_3 &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}(a_1k_y - a_2k_x). \end{aligned}\right\} \tag{5.136}$$

对一组给定的整数(l_1, l_2),这组解有三个待定常数 a_1、a_2 和 a_3.不过由于(5.135),这三个数中只有两个是独立的.将它们取为(a_1, a_2).它们的两组彼此独立的取值从(5.132)和(5.133)中选出两组彼此独立的解.若取

$$\frac{a_1}{a_2} = -\frac{k_y}{k_x}, \tag{5.137}$$

由(5.135)得 $a_3=0$,按(5.132)电场强度的纵分量,即沿电磁波传播方向 z 的分量,为零.这种电场方向与传播方向垂直的电磁波称为磁型波,或横电型波,记为TE型.若取

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{k_x}{k_y}, \tag{5.138}$$

由(5.136)第三式得 $b_3=0$,按(5.133)磁场强度的纵分量为零.这种磁场方向与传播方向垂直的电磁波称为电型波,或横磁型波,记为 TM 型.为使电磁场强不恒等于零,l_1 和 l_2 不能都为零.l_1 和 l_2 中若有一个为零,按(5.134)和(5.132)$\mathscr{E}_z=0$,即必是 TE 型波.为使电磁波沿波导传播,必须 $k_z^2>0$,对一定的(l_1,l_2)这要求

$$|\omega|>u\sqrt{\left(\frac{l_1\pi}{s_1}\right)^2+\left(\frac{l_2\pi}{s_2}\right)^2}. \tag{5.139}$$

此式右边给出临界(角)频率,只有(角)频率高于这个临界值的电磁波才能沿 z 方向传播.否则,$k_z=\mathrm{i}\chi$ 成为虚数,电磁波将以 $\mathrm{e}^{-\chi z}$的方式沿 z 方向指数衰减.与临界频率相应的电磁波在无界介质中的波长

$$\lambda_c(l_1,l_2)=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{l_1}{s_1}\right)^2+\left(\frac{l_2}{s_2}\right)^2}} \tag{5.140}$$

称为临界波长.只有在无界介质中波长小于临界波长的电磁波才能在波导中传播.临界波长随 l_1 和 l_2 的增加而减小.设 $s_1>s_2$,最大临界波长为

$$\lambda_c(1,0)=2s_1, \tag{5.141}$$

即波导内部横截面长边长的二倍.波长比最大临界波长长的电磁波完全不能在波导内传播.波长短于 $2s_1$ 却长于 $2s_2$ 的电磁波在波导内只能是 $l_1=1,l_2=0$ 的 TE 型波.如此等等.

沿波导管的行波相速为

$$v=\frac{\omega}{k_z}. \tag{5.142}$$

由于 k_x 和 k_y 不能同为零,按(5.131)$k_z<\frac{\omega}{u}$,因此 $v>u$.若波导内为真空则有 $v>c$,行波相速大于真空中的光速.好在一般说来并无信息借平面波以相速传播,这里也无信息借波导内的行波以相速传播,这种'超光速'并不违背相对论和因果律.平面波的相速,以及这里行波的相速,表达的只是不同空间点相位的关系.波导中电磁波在管壁间来回反射.垂直等相位面长为 u 的矢量 $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{u}$ 和 z 轴组成的平面与等相位面的交线,以及沿 z 方向长为 v 的矢量 $\boldsymbol{v}$,分别为一直角三角形的一边,$\boldsymbol{u}$ 为直角边,$\boldsymbol{v}$ 为斜边.这就是 $v>u$ 的来历.(5.134)又表明 k_z 与角频率 ω 和波的模式(l_1,l_2)有关,这使(5.142)定义的行波相速 v 与波的频率和模式都有关.这便是波导中电磁波的色散.

再看内部截面为圆的圆柱形理想波导.将原点放在一个横截面的圆心上,取此横截面为 xy 平面,在此平面内任取互相垂直的两轴为 x 轴和 y 轴.按右手规则取 z 轴,它就是波导内部圆柱的中心轴.取(3.112)定义的柱坐标,笛卡儿坐标可用它按(3.111)给出.将典型的亥姆霍兹方程(5.93)写成对柱坐标的偏微分方程就是

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0. \tag{5.143}$$

此式有分离变量解

$$\psi(\rho,\theta,z)=f(\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z};\tag{5.144}$$

为使 ψ 为空间点的单值函数,要求 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta+2\pi)}$, m 应为整数. 将此解代入(5.143),得 $f(\rho)$的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}+\left(k_\rho^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)f=0,\quad k_\rho=\sqrt{k^2-k_z^2}.\tag{5.145}$$

作变换 $\xi=k_\rho\rho$,此方程成为贝塞尔方程

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}+\left(1-\frac{m^2}{\xi^2}\right)f=0.\tag{5.146}$$

为使解(5.144)在 $\rho=0$ 处有界,必须取正规解

$$f(\rho)=a\mathrm{J}_m(k_\rho\rho),\tag{5.147}$$

a 为积分常数,$\mathrm{J}_m(\xi)$为 ξ 的 m 阶贝塞尔函数. 一般情形下(5.143)的解为分离变量解(5.144)的叠加. 将电磁场强度用(3.113)定义的柱坐标单位矢量系展开:

$$\boldsymbol{\mathscr{E}}(\rho,\theta,z)=\mathscr{E}_\rho(\rho,\theta,z)\boldsymbol{\rho}_0+\mathscr{E}_\theta(\rho,\theta,z)\boldsymbol{\theta}_0+\mathscr{E}_z(\rho,\theta,z)\boldsymbol{z}_0,\tag{5.148}$$

$$\boldsymbol{\mathscr{H}}(\rho,\theta,z)=\mathscr{H}_\rho(\rho,\theta,z)\boldsymbol{\rho}_0+\mathscr{H}_\theta(\rho,\theta,z)\boldsymbol{\theta}_0+\mathscr{H}_z(\rho,\theta,z)\boldsymbol{z}_0.\tag{5.149}$$

对以一定相速沿 z 方向传播的电磁波,电磁场的各分量应具形式

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{E}_i(\rho,\theta,z)&=e_i(\rho,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z},\\ \mathscr{H}_i(\rho,\theta,z)&=h_i(\rho,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}.\end{aligned}\right\}\tag{5.150}$$

其中下标 i 代表ρ、θ 和 z. 将此形式代入(5.148)和(5.149),再代入(5.8)的后两式,利用柱坐标旋度公式(3.131)得

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial e_z}{\partial\theta}-\mathrm{i}k_z e_\theta&=\mathrm{i}\omega\mu h_\rho,\\ \mathrm{i}k_z e_\rho-\frac{\partial e_z}{\partial\rho}&=\mathrm{i}\omega\mu h_\theta,\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial h_z}{\partial\theta}-\mathrm{i}k_z h_\theta&=-\mathrm{i}\omega\epsilon e_\rho,\\ \mathrm{i}k_z h_\rho-\frac{\partial h_z}{\partial\rho}&=-\mathrm{i}\omega\epsilon e_\theta.\end{aligned}\right\}\tag{5.151}$$

由此解得

$$\left.\begin{aligned}e_\theta&=-\frac{\mathrm{i}}{k_\rho^2}\left(\omega\mu\frac{\partial h_z}{\partial\rho}-\frac{k_z}{\rho}\frac{\partial e_z}{\partial\theta}\right),\\ e_\rho&=\frac{\mathrm{i}}{k_\rho^2}\left(\frac{\omega\mu}{\rho}\frac{\partial h_z}{\partial\theta}+k_z\frac{\partial e_z}{\partial\rho}\right),\\ h_\theta&=\frac{\mathrm{i}}{k_\rho^2}\left(\frac{k_z}{\rho}\frac{\partial h_z}{\partial\theta}+\omega\epsilon\frac{\partial e_z}{\partial\rho}\right),\\ h_\rho&=\frac{\mathrm{i}}{k_\rho^2}\left(k_z\frac{\partial h_z}{\partial\rho}-\frac{\omega\epsilon}{\rho}\frac{\partial e_z}{\partial\theta}\right).\end{aligned}\right\}\tag{5.152}$$

将 $\mathscr{E}_z$ 和 $\mathscr{H}_z$ 取为亥姆霍兹方程的分离变量解(5.144),即取

$$e_z(\rho,\theta) = a\mathrm{J}_m(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}, \quad h_z(\rho,\theta) = b\mathrm{J}_m(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}. \tag{5.153}$$

代入(5.152)右边,并将结果代回(5.150)得

$$\left.\begin{aligned}
\mathscr{E}_\rho(\rho,\theta,z) &= \left[-b\frac{m\omega\mu}{k_\rho^2\rho}\mathrm{J}_m(k_\rho\rho) + \mathrm{i}a\frac{k_z}{k_\rho}\mathrm{J}'_m(k_\rho\rho)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta+k_z z)},\\
\mathscr{E}_\theta(\rho,\theta,z) &= -\left[a\frac{k_z m}{k_\rho^2\rho}\mathrm{J}_m(k_\rho\rho) + \mathrm{i}b\frac{\omega\mu}{k_\rho}\mathrm{J}'_m(k_\rho\rho)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta+k_z z)},\\
\mathscr{E}_z(\rho,\theta,z) &= a\mathrm{J}_m(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta+k_z z)},
\end{aligned}\right\} \tag{5.154}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathscr{H}_\rho(\rho,\theta,z) &= \left[a\frac{m\omega\varepsilon}{k_\rho^2\rho}\mathrm{J}_m(k_\rho\rho) + \mathrm{i}b\frac{k_z}{k_\rho}\mathrm{J}'_m(k_\rho\rho)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta+k_z z)},\\
\mathscr{H}_\theta(\rho,\theta,z) &= \left[-b\frac{k_z m}{k_\rho^2\rho}\mathrm{J}_m(k_\rho\rho) + \mathrm{i}a\frac{\omega\varepsilon}{k_\rho}\mathrm{J}'_m(k_\rho\rho)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta+k_z z)},\\
\mathscr{H}_z(\rho,\theta,z) &= b\mathrm{J}_m(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta+k_z z)},
\end{aligned}\right\} \tag{5.155}$$

其中 $\mathrm{J}'_m(\xi) = \dfrac{\mathrm{dJ}_m(\xi)}{\mathrm{d}\xi}$. 具体验证表明它们确是方程组(5.8)的解.

理想波导边条件现在要求 $\mathscr{E}_\theta$ 和 $\mathscr{E}_z$ 在波导圆柱内表面上为零. 用 R 表示圆柱内部横截面半径,此条件就是

$$\mathscr{E}_\theta(R,\theta,z) = \mathscr{E}_z(R,\theta,z) = 0. \tag{5.156}$$

解(5.154)和(5.155)中有两个积分常数 a 和 b. 若 $a\neq0$,为使(5.154)第三式表达的 $\mathscr{E}_z$ 符合此边条件,必须且只须 $\mathrm{J}_m(k_\rho R)=0$. 用 ξ_{mn} 表 m 阶贝塞尔函数的第 n 个正根,$\mathrm{J}_m(\xi_{mn})=0$. 边条件遂要求

$$k_\rho = \frac{\xi_{mn}}{R} \equiv k_{\rho,mn}. \tag{5.157}$$

由于 J_m 和 J'_m 没有相同的正根,为使(5.154)第二式表达的 $\mathscr{E}_\theta$ 符合边条件(5.156),必须且只须 $b=0$. 由(5.155)知这使 $\mathscr{H}_z=0$. 这个解因而表示 TM 型波. 另一方面,若 $a=0$,为保证解不会恒等于零必须 $b\neq0$. 在此条件下要使(5.154)第二式表达的 $\mathscr{E}_\theta$ 符合边条件必须且只须 $\mathrm{J}'_m(k_\rho R)=0$. 用 ξ'_{mn} 表示 m 阶贝塞尔函数一阶微商的第 n 个正根,$\mathrm{J}'_m(\xi'_{mn})=0$. 边条件遂要求

$$k_\rho = \frac{\xi'_{mn}}{R} \equiv k'_{\rho,mn}. \tag{5.158}$$

这个解的 $\mathscr{E}_z=0$,因而表示 TE 型波. 为使 TM 波确为 z 方向的行波,必须

$$k_z^2 = k^2 - k_\rho^2 = \frac{\omega^2}{u^2} - \frac{\xi_{mn}^2}{R^2} > 0, \tag{5.159}$$

它的(m,n)模式的临界(角)频率为

$$\omega_c(m,n) = \frac{u\xi_{mn}}{R}, \tag{5.160}$$

相应的临界波长为

$$\lambda_c(m,n) = \frac{2\pi R}{\xi_{mn}}. \tag{5.161}$$

只有(角)频率高于临界值(5.160),或波长小于此临界波长的电磁波才能以此模式沿波导传播.类似地,(m,n)模式 TE 波的临界(角)频率和临界波长分别为

$$\omega_c'(m,n) = \frac{u\xi_{mn}'}{R}, \tag{5.162}$$

$$\lambda_c'(m,n) = \frac{2\pi R}{\xi_{mn}'}. \tag{5.163}$$

也可利用光疏介质对从光密介质传来的电磁波的全反射制造绝缘体波导.称无穷长,处处横截面相同,由无吸收绝缘材料制成的波导为理想绝缘波导.圆柱形理想绝缘波导由一无穷长均匀光密绝缘圆柱体嵌在向外充满全空间的均匀光疏绝缘材料中组成.圆柱体内、外的介电常数 ϵ、ϵ'和磁导率μ、μ'均为正实常数,且有不等式

$$\mu\epsilon > \mu'\epsilon'. \tag{5.164}$$

对一定角频率 ω,内、外介质中的波矢量平方 $k^2=\omega^2\mu\epsilon$ 和$k'^2=\omega^2\mu'\epsilon'$因而有不等式

$$k^2 > k'^2. \tag{5.165}$$

于是存在正实数 k_z^2 的一个区间,其中

$$k^2 > k_z^2 > k'^2. \tag{5.166}$$

在此区间中,圆柱体内有

$$k_\rho^2 = k^2 - k_z^2 > 0, \tag{5.167}$$

k_ρ 可取为正实数;而圆柱体外则有

$$k_\rho'^2 = k'^2 - k_z^2 < 0, \tag{5.168}$$

$k_\rho'=\mathrm{i}\chi$ 为虚数,

$$\chi = \sqrt{k_z^2 - k'^2} \tag{5.169}$$

为正实数.圆柱体内方程组(5.8)的解仍是(5.154)和(5.155).为使电磁场在无穷远处不致趋于无穷,圆柱体外的解应取为

$$\left.\begin{aligned}
\mathscr{E}_\rho(\rho,\theta,z) &= \left[b'\frac{m\omega\mu'}{\chi^2\rho}\mathrm{K}_m(\chi\rho) - \mathrm{i}a'\frac{k_z}{\chi}\mathrm{K}'_m(\chi\rho)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta+k_zz)},\\
\mathscr{E}_\theta(\rho,\theta,z) &= \left[a'\frac{k_zm}{\chi^2\rho}\mathrm{K}_m(\chi\rho) + \mathrm{i}b'\frac{\omega\mu'}{\chi}\mathrm{K}'_m(\chi\rho)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta+k_zz)},\\
\mathscr{E}_z(\rho,\theta,z) &= a'\mathrm{K}_m(\chi\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta+k_zz)},
\end{aligned}\right\} \tag{5.170}$$

$$
\left.\begin{aligned}
\mathscr{H}_\rho(\rho,\theta,z) &= -\left[a'\frac{m\omega\epsilon'}{\chi^2\rho}\mathrm{K}_m(\chi\rho)+\mathrm{i}b'\frac{k_z}{\chi}\mathrm{K}'_m(\chi\rho)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta+k_z z)},\\
\mathscr{H}_\theta(\rho,\theta,z) &= \left[b'\frac{k_z m}{\chi^2\rho}\mathrm{K}_m(\chi\rho)-\mathrm{i}a'\frac{\omega\epsilon'}{\chi}\mathrm{K}'_m(\chi\rho)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta+k_z z)},\\
\mathscr{H}_z(\rho,\theta,z) &= b'\mathrm{K}_m(\chi\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta+k_z z)},
\end{aligned}\right\}\tag{5.171}
$$

其中 $\mathrm{K}_m(\zeta)$ 为 ζ 的 m 阶第二类变型贝塞尔函数,有渐近形式 $\mathrm{K}_m(\zeta)\underset{\zeta\to\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{\pi}{2\zeta}}\mathrm{e}^{-\zeta}$, $\mathrm{K}'_m(\zeta)\equiv\dfrac{\mathrm{dK}_m(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}$, a' 和 b' 为积分常数. 边条件(5.19)要求 $\mathscr{E}_\theta$、$\mathscr{E}_z$、$\mathscr{H}_\theta$ 和 $\mathscr{H}_z$ 在圆柱表面上连续. 设圆柱半径为 R,这就要求

$$
\left.\begin{aligned}
&-\frac{k_z m}{k_\rho^2 R}\mathrm{J}_m(k_\rho R)a-\mathrm{i}\frac{\omega\mu}{k_\rho}\mathrm{J}'_m(k_\rho R)b-\frac{k_z m}{\chi^2 R}\mathrm{K}_m(\chi R)a'-\mathrm{i}\frac{\omega\mu'}{\chi}\mathrm{K}'_m(\chi R)b'=0,\\
&\mathrm{J}_m(k_\rho R)a-\mathrm{K}_m(\chi R)a'=0,\\
&\mathrm{i}\frac{\omega\epsilon}{k_\rho}\mathrm{J}'_m(k_\rho R)a-\frac{k_z m}{k_\rho^2 R}\mathrm{J}_m(k_\rho R)b+\mathrm{i}\frac{\omega\epsilon'}{\chi}\mathrm{K}'_m(\chi R)a'-\frac{k_z m}{\chi^2 R}\mathrm{K}_m(\chi R)b'=0,\\
&\mathrm{J}_m(k_\rho R)b-\mathrm{K}_m(\chi R)b'=0.
\end{aligned}\right\}\tag{5.172}
$$

作为 a、b、a' 和 b' 的线性齐次代数方程组,此式有非零解的充分兼必要条件是系数行列式为零,即要求

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{J}_m^2(k_\rho R)\mathrm{K}_m^2(\chi R)\left(\frac{k_z m}{R}\right)^2\left(\frac{1}{k_\rho^2}+\frac{1}{\chi^2}\right)^2-\mathrm{J}_m^2(k_\rho R)\mathrm{K}_m'^2(\chi R)\frac{k'^2}{\chi^2}\\
&-\mathrm{J}_m'^2(k_\rho R)\mathrm{K}_m^2(\chi R)\frac{k^2}{k_\rho^2}-\mathrm{J}_m(k_\rho R)\mathrm{J}'_m(k_\rho R)\\
&\times\mathrm{K}_m(\chi R)\mathrm{K}'_m(\chi R)\frac{\omega^2}{k_\rho\chi}(\mu\epsilon'+\mu'\epsilon)=0.
\end{aligned}\tag{5.173}
$$

对给定的 k_z 此式是 ω 的方程,从中可解出函数关系 $\omega(k_z)$. (5.166)是对 k_z 取值范围的限制,便也是对 ω 取值范围的限制.

$m=0$ 的情形特别简单,可就此情形对绝缘波导作较具体的了解. 此情形中(5.173)左边第一项为零,其余三项可分解为两个因子的积. 利用

$$
\mathrm{J}'_0(\xi)=-\mathrm{J}_1(\xi),\qquad \mathrm{K}'_0(\zeta)=-\mathrm{K}_1(\zeta),\tag{5.174}
$$

可将它写成

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\omega\epsilon'}{\chi}\mathrm{J}_0(k_\rho R)\mathrm{K}_1(\chi R)+\frac{\omega\epsilon}{k_\rho}\mathrm{J}_1(k_\rho R)\mathrm{K}_0(\chi R)\right]\\
&\times\left(\frac{\omega\mu}{k_\rho}\mathrm{J}_1(k_\rho R)\mathrm{K}_0(\chi R)+\frac{\omega\mu'}{\chi}\mathrm{J}_0(k_\rho R)\mathrm{K}_1(\chi R)\right)=0.
\end{aligned}\tag{5.175}
$$

在(5.154)和(5.155)中令 $m=0$, $b=0$,用(5.174)得

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{E}_\rho(\rho,\theta,z) = -\mathrm{i}a\frac{k_z}{k_\rho}\mathrm{J}_1(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}, \quad \mathscr{E}_\theta(\rho,\theta,z) = 0,\\
&\mathscr{E}_z(\rho,\theta,z) = a\mathrm{J}_0(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z},\\
&\mathscr{H}_\rho(\rho,\theta,z) = \mathscr{H}_z(\rho,\theta,z) = 0,\\
&\mathscr{H}_\theta(\rho,\theta,z) = -\mathrm{i}a\frac{\omega\epsilon}{k_\rho}\mathrm{J}_1(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.176}$$

在(5.170)和(5.171)中令 $m=0, b'=0$,用(5.174)得

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{E}_\rho(\rho,\theta,z) = \mathrm{i}a'\frac{k_z}{\chi}\mathrm{K}_1(\chi\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}, \quad \mathscr{E}_\theta(\rho,\theta,z) = 0,\\
&\mathscr{E}_z(\rho,\theta,z) = a'\mathrm{K}_0(\chi\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z},\\
&\mathscr{H}_\rho(\rho,\theta,z) = \mathscr{H}_z(\rho,\theta,z) = 0,\\
&\mathscr{H}_\theta(\rho,\theta,z) = \mathrm{i}a'\frac{\omega\epsilon'}{\chi}\mathrm{K}_1(\chi\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.177}$$

$\mathscr{E}_\theta=\mathscr{H}_z=0$ 在圆柱表面上自然连续,边条件(5.19)只要求

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{J}_0(k_\rho R)a - \mathrm{K}_0(\chi R)a' = 0,\\
&\frac{\omega\epsilon}{k_\rho}\mathrm{J}_1(k_\rho R)a + \frac{\omega\epsilon'}{\chi}\mathrm{K}_1(\chi R)a' = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{5.178}$$

此式作为 a 和 a' 的线性齐次代数方程组,系数行列式恰为(5.175)左边第一因子.要求它为零得

$$\frac{\omega\epsilon'}{\chi}\mathrm{J}_0(k_\rho R)\mathrm{K}_1(\chi R) + \frac{\omega\epsilon}{k_\rho}\mathrm{J}_1(k_\rho R)\mathrm{K}_0(\chi R) = 0. \tag{5.179}$$

在此条件下得电磁场在圆柱体内外的解分别为(5.176)和(5.177),且其中

$$\frac{a'}{a} = \frac{\mathrm{J}_0(k_\rho R)}{\mathrm{K}_0(\chi R)}. \tag{5.180}$$

这个解中磁场纵向分量为零,因此表示 TM 型波.

若在(5.154)和(5.155)中令 $m=0, a=0$,则得

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{E}_\rho(\rho,\theta,z) = \mathscr{E}_z(\rho,\theta,z) = 0,\\
&\mathscr{E}_\theta(\rho,\theta,z) = \mathrm{i}b\frac{\omega\mu}{k_\rho}\mathrm{J}_1(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z},\\
&\mathscr{H}_\rho(\rho,\theta,z) = -\mathrm{i}b\frac{k_z}{k_\rho}\mathrm{J}_1(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}, \quad \mathscr{H}_\theta(\rho,\theta,z) = 0,\\
&\mathscr{H}_z(\rho,\theta,z) = b\mathrm{J}_0(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.181}$$

在(5.170)和(5.171)中令 $m=0, a'=0$,得

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{E}_\rho(\rho,\theta,z) = \mathscr{E}_z(\rho,\theta,z) = 0,\\
&\mathscr{E}_\theta(\rho,\theta,z) = -\mathrm{i}b'\frac{\omega\mu'}{\chi}\mathrm{K}_1(\chi\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z},\\
&\mathscr{H}_\rho(\rho,\theta,z) = \mathrm{i}b'\frac{k_z}{\chi}\mathrm{K}_1(\chi\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z},\quad \mathscr{H}_\theta(\rho,\theta,z) = 0,\\
&\mathscr{H}_z(\rho,\theta,z) = b'\mathrm{K}_0(\chi\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}.
\end{aligned}\right\}\tag{5.182}$$

$\mathscr{E}_z=\mathscr{H}_\theta=0$ 在圆柱表面上自然连续,边条件(5.19)只要求

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\omega\mu}{k_\rho}\mathrm{J}_1(k_\rho R)b + \frac{\omega\mu'}{\chi}\mathrm{K}_1(\chi R)b' = 0,\\
&\mathrm{J}_0(k_\rho R)b - \mathrm{K}_0(\chi R)b' = 0.
\end{aligned}\right\}\tag{5.183}$$

此式作为 b 和 b' 的线性齐次代数方程组,系数行列式恰为(5.175)左边第二因子与 -1 的积.要求它为零得

$$\frac{\omega\mu}{k_\rho}\mathrm{J}_1(k_\rho R)\mathrm{K}_0(\chi R) + \frac{\omega\mu'}{\chi}\mathrm{J}_0(k_\rho R)\mathrm{K}_1(\chi R) = 0.\tag{5.184}$$

在此条件下圆柱体内外电磁场的解分别为(5.181)和(5.182),且其中

$$\frac{b'}{b} = \frac{\mathrm{J}_0(k_\rho R)}{\mathrm{K}_0(\chi R)}.\tag{5.185}$$

这个解的电场无纵向分量,因而表示 TE 型波.

方程(5.179)和(5.184)仍然只能用数值方法求解.在 $\mu\to\mu_0$ 和 $\mu'\to\mu_0$ 的高频极限下(5.184)可简化为

$$\frac{1}{k_\rho R}\frac{\mathrm{J}_1(k_\rho R)}{\mathrm{J}_0(k_\rho R)} + \frac{1}{\chi R}\frac{\mathrm{K}_1(\chi R)}{\mathrm{K}_0(\chi R)} = 0,\tag{5.186}$$

其中

$$(k_\rho R)^2 + (\chi R)^2 = (\omega R)^2(\epsilon - \epsilon')\mu_0.\tag{5.187}$$

图 5-4 画出了函数 $-\dfrac{\mathrm{J}_1(\xi)}{\xi\mathrm{J}_0(\xi)}$ 和 $\dfrac{\mathrm{K}_1(\zeta)}{\zeta\mathrm{K}_0(\zeta)}$ 的曲线,纵坐标以同一刻度表此二函数的值,横坐标轴上同一点对应的 $\xi^2=k_\rho^2R^2$ 和 $\zeta^2=\chi^2R^2$ 分别标在图的上、下方,它们之间符合关系(5.187).此二曲线的交点便是(5.186)的根.在 $\zeta=0$ 处,按(5.187)

$$\xi^2 = \xi_{\max}^2 \equiv (\omega R)^2(\epsilon - \epsilon')\mu_0.\tag{5.188}$$

图中纵虚线的横坐标 ξ 值为 $\mathrm{J}_0(\xi)$ 的根,该处 $-\dfrac{\mathrm{J}_1(\xi)}{\xi\mathrm{J}_0(\xi)}$ 趋于无穷.在 ξ 小于 $\mathrm{J}_0(\xi)$ 的最小正根 ξ_{01} 处 $-\dfrac{\mathrm{J}_1(\xi)}{\xi\mathrm{J}_0(\xi)}<0$,而 $\dfrac{\mathrm{K}_1(\zeta)}{\zeta\mathrm{K}_0(\zeta)}>0$,因此若 $\xi_{\max}\leqslant\xi_{01}$ 则方程(5.186)无解.由此得理想圆柱形绝缘波导中 $m=0$ 的 TE 型波的临界角频率为

$$\omega_c(0,1) = \frac{u\xi_{01}}{R}\left[1-\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right]^{-\frac{1}{2}} = 2.405\,\frac{u}{R}\left[1-\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right]^{-\frac{1}{2}},\tag{5.189}$$

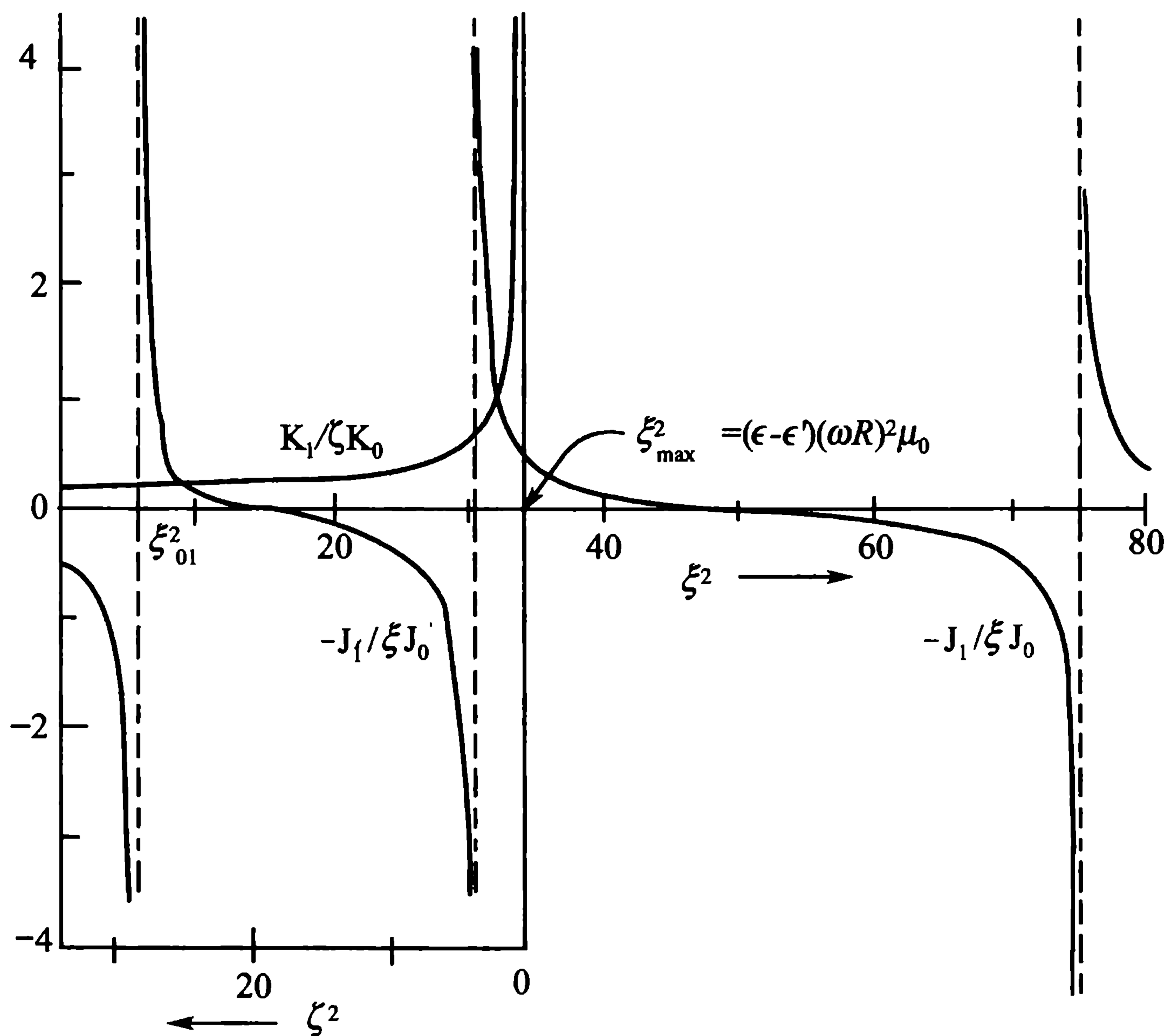


图 5-4　方程(5.186)的图解

其中 $u=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\simeq\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon}}$. 只有角频率超过此值的 $m=0$ 的 TE 型波才能在这种波导中传输.

根据材料的性质,绝缘波导被用于光波,即光频电磁波的传输. 这种波导便称为光波导. 由于光波波长短,可见光波长不足一微米,这种波导的尺寸很小,中间圆柱体半径为若干微米量级,外面低折射系数包层的厚度为数百微米的量级. 光波集中在中间圆柱体内传播,从圆柱体表面向外几个波长处电磁场即衰减为零. 光波导细长,又称光纤. 许多光纤集束为光缆,用于光通讯.

实际波导可接近理想波导但不会是理想波导. 在导体表面的非零趋肤深度内电磁波中的电场按欧姆定律驱动电流,导致焦尔热耗散. 即使在透明介质内电磁波也会被逐渐吸收. 这些都导致波导内电磁波的损耗. 有限的波导长度使入口和出口处电磁波的传播不同于它在波导内的传播. 在实际工程问题中这些都应从理论上予以考虑. 读者在遇到这些实际问题时可从专门著作中找到有关专门材料.

§5.7　电磁波在共振腔中的驻留,本征模式与本征频率

有良好反射性能的表面包围的体积中电磁波会在表面间来回反射形成驻波. 由于边条件的限制驻波只能以一些特定模式存在于此体积中,称为驻波的本征模

式，相应的频率也只能取一些特定值，称为本征频率. 如果体积内有随时间变化的电荷电流分布，将它们对时间作傅里叶变换，作频谱分析，其中与本征频率相等的分量会与相应的本征模式电磁驻波共振，将能量输入这些本征模式驻波中. 这是激发例如微波等频率很高的电磁波的基本方法. 这种器件因而称为共振腔. 驻波的本征模式和本征频率是共振腔的基本性质.

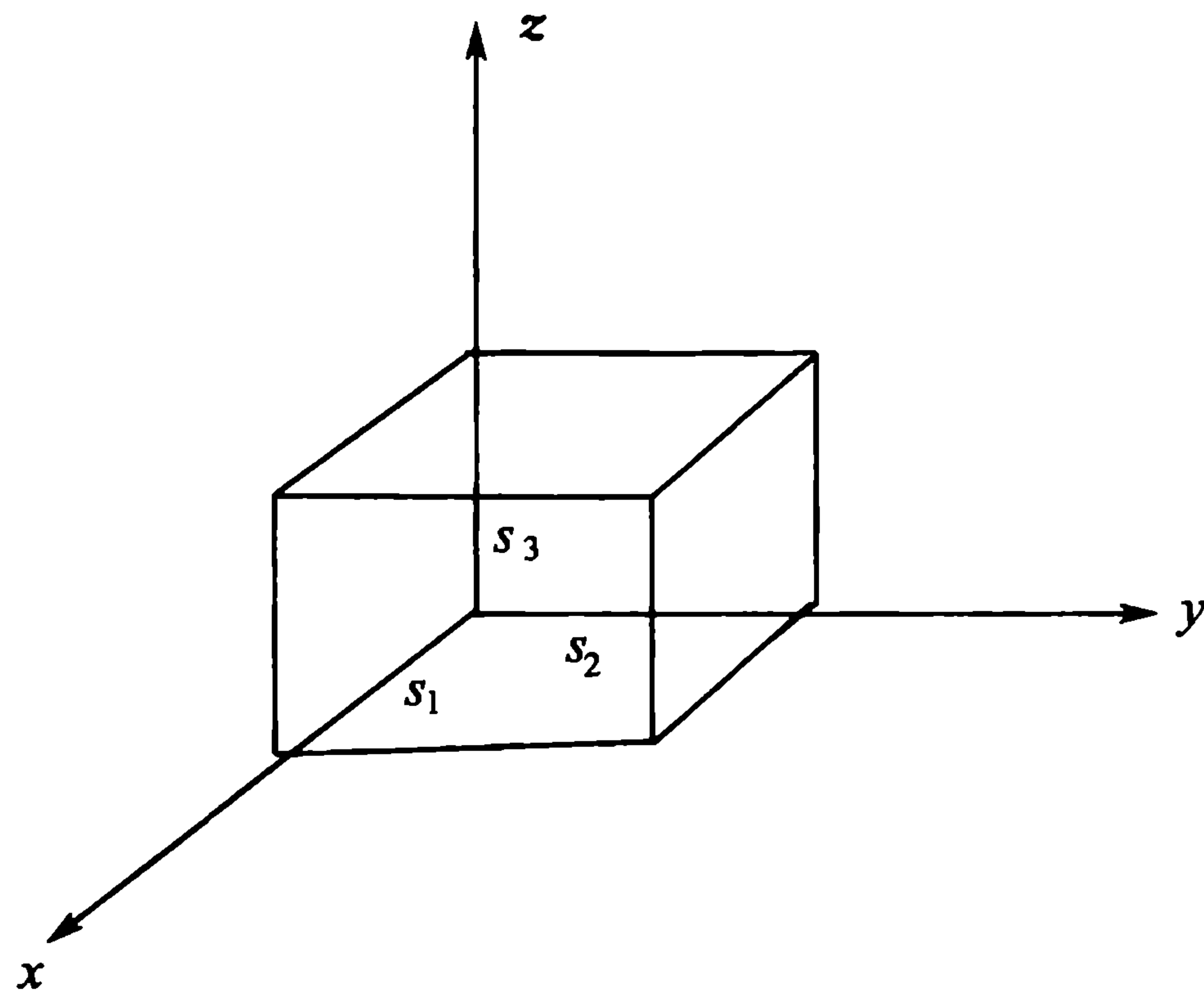


图 5-5　长方体共振腔

考虑一长方体共振腔，它的表面为理想导体，内部为无吸收透明介质. 取长方体一角的顶点为原点，按右手规则取过此点的三条互相垂直的棱为 x、y 和 z 轴，如图 5-5. 沿此三轴的棱长分别记为 s_1、s_2 和 s_3. 用 μ 和 ϵ 表腔内介质的磁导率和介电常数，由方程组(5.8)和理想导体边条件解得腔内电磁场

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{E}_x(\boldsymbol{r}) &= a_1\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z),\\ \mathscr{E}_y(\boldsymbol{r}) &= a_2\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z),\\ \mathscr{E}_z(\boldsymbol{r}) &= a_3\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z),\end{aligned}\right\} \tag{5.190}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{H}_x(\boldsymbol{r}) &= b_1\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z),\\ \mathscr{H}_y(\boldsymbol{r}) &= b_2\cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z),\\ \mathscr{H}_z(\boldsymbol{r}) &= b_3\cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z),\end{aligned}\right\} \tag{5.191}$$

其中

$$k_x = \frac{l_1\pi}{s_1},\quad k_y = \frac{l_2\pi}{s_2},\quad k_z = \frac{l_3\pi}{s_3}, \tag{5.192}$$

$$\omega = \omega_{l_1 l_2 l_3} \equiv u\sqrt{\left(\frac{l_1\pi}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{l_2\pi}{s_2}\right)^2 + \left(\frac{l_3\pi}{s_3}\right)^2},\quad u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \tag{5.193}$$

l_1、l_2 和 l_3 为非负整数，

$$a_1 k_x + a_2 k_y + a_3 k_z = 0, \tag{5.194}$$

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= -\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}(a_3k_y - a_2k_z), \\ b_2 &= -\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}(a_1k_z - a_3k_x), \\ b_3 &= -\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}(a_2k_x - a_1k_y). \end{aligned}\right\} \tag{5.195}$$

这些关系中(5.193)表示本征频率只能取一组分立值,每个值与三个整数 l_1、l_2 和 l_3 对应;其余关系表示驻波的本征模式.由于(5.194)和(5.195),六个振幅 a_1、a_2、a_3、b_1、b_2 和 b_3 中只有两个是独立的.对一组给定整数 l_1、l_2 和 l_3 有两个独立的驻波本征模式对应共同的本征频率 $\omega_{l_1l_2l_3}$.每一本征频率因而称为是二度简并的.

再考虑半径为 R 高为 h 的圆柱体共振腔,内部仍为无吸收透明介质,表面仍为理想导体.取底面为 xy 平面,由底面指向顶面的圆柱体中心轴为 z 轴,建立柱坐标.以满足圆柱表面边条件的解(5.154)和(5.155)为基础来组成圆柱体共振腔内的解.由于将其中的 k_z 换成 $-k_z$ 所得结果仍为(5.8)的解且仍满足圆柱表面边条件,$a\neq 0$ 从而 $b=0$ 的解为

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}_\rho(\rho,\theta,z) &= -a\frac{k_z}{k_\rho}\sin(k_zz)\mathrm{J}'_m(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}, \\ \mathscr{E}_\theta(\rho,\theta,z) &= -\mathrm{i}a\frac{k_zm}{k_\rho\rho}\sin(k_zz)\mathrm{J}_m(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}, \\ \mathscr{E}_z(\rho,\theta,z) &= a\cos(k_zz)\mathrm{J}_m(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}, \end{aligned}\right\} \tag{5.196}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{H}_\rho(\rho,\theta,z) &= a\frac{m\omega\epsilon}{k_\rho^2\rho}\cos(k_zz)\mathrm{J}_m(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}, \\ \mathscr{H}_\theta(\rho,\theta,z) &= \mathrm{i}a\frac{\omega\epsilon}{k_\rho}\cos(k_zz)\mathrm{J}'_m(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}, \\ \mathscr{H}_z(\rho,\theta,z) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.197}$$

其中 $k_\rho=\dfrac{\xi_{mn}}{R}$.这个解已保证 $\mathscr{E}_\rho(\rho,\theta,0)=\mathscr{E}_\theta(\rho,\theta,0)=0$,即已在圆柱底面上满足理想导体边条件.为保证在圆柱顶面上满足理想导体边条件,要求 $\mathscr{E}_\rho(\rho,\theta,h)=\mathscr{E}_\theta(\rho,\theta,h)=0$.这只须且必须

$$k_z = \frac{l\pi}{h}, \quad l = 0,1,2,\cdots. \tag{5.198}$$

仍称圆柱的轴向为纵向,此解磁场纵分量为零,圆柱体共振腔内电磁驻波的这一本征模式为横磁模式,也记为 TM.相应本征角频率为

$$\omega = \omega_{lmn} \equiv u\sqrt{\left(\frac{l\pi}{h}\right)^2 + \frac{\xi_{mn}^2}{R^2}}, \tag{5.199}$$

与三个整数 l、m 和 n 对应.

若 $a=0$,为保证电磁场不恒等于零必须 $b\neq 0$. 在此条件下(5.8)满足圆柱表面边条件的解为

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{E}_\rho(\rho,\theta,z) &= -b\frac{m\omega\mu}{k_\rho^2\rho}\sin(k_z z)\mathrm{J}_m(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta},\\ \mathscr{E}_\theta(\rho,\theta,z) &= -\mathrm{i}b\frac{\omega\mu}{k_\rho}\sin(k_z z)\mathrm{J}'_m(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta},\\ \mathscr{E}_z(\rho,\theta,z) &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{5.200}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{H}_\rho(\rho,\theta,z) &= b\frac{k_z}{k_\rho}\cos(k_z z)\mathrm{J}'_m(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta},\\ \mathscr{H}_\theta(\rho,\theta,z) &= \mathrm{i}b\frac{k_z m}{k_\rho^2\rho}\cos(k_z z)\mathrm{J}_m(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta},\\ \mathscr{H}_z(\rho,\theta,z) &= b\sin(k_z z)\mathrm{J}_m(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta},\end{aligned}\right\} \tag{5.201}$$

其中 $k_\rho=\dfrac{\xi'_{mn}}{R}$. 此解已在圆柱体底面上满足理想导体边条件. 为满足圆柱体顶面上的边条件只须且必须 k_z 取(5.198)规定的值. 此解电场纵分量为零,为横电模式,记为 TE. 相应本征角频率为

$$\omega = \omega'_{lmn} \equiv u\sqrt{\left(\frac{l\pi}{h}\right)^2+\left(\frac{\xi'_{mn}}{R}\right)^2}, \tag{5.202}$$

也与三个整数 l、m 和 n 对应.

习 题 五

1. 设电场强度和磁场强度分别由 $\boldsymbol{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 和 $\boldsymbol{\mathscr{H}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 的实部表示,介电常数 ϵ 和磁导率 μ 为实数,电导率 $\sigma=0$. 试证能量密度,能流密度矢量和动量密度经一周期平均后分别为

$$\left.\begin{aligned}\overline{U} &= \frac{1}{4}(\epsilon\,|\boldsymbol{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r})|^2+\mu\,|\boldsymbol{\mathscr{H}}(\boldsymbol{r})|^2),\\ \overline{\boldsymbol{S}} &= \frac{1}{4}(\boldsymbol{\mathscr{E}}^*(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{\mathscr{H}}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{\mathscr{H}}^*(\boldsymbol{r})),\\ \overline{\boldsymbol{G}} &= \frac{\epsilon\mu}{4}(\boldsymbol{\mathscr{E}}^*(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{\mathscr{H}}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{\mathscr{H}}^*(\boldsymbol{r})).\end{aligned}\right\} \tag{5.203}$$

2. 在均匀介质中 ϵ 和 μ 与空间位置无关,在上题中可设

$$\boldsymbol{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\mathscr{E}}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},\qquad \boldsymbol{\mathscr{H}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\mathscr{H}}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \tag{5.204}$$

$\boldsymbol{\mathscr{E}}_0$ 和 $\boldsymbol{\mathscr{H}}_0$ 为常矢量. 试证能量密度,能流密度矢量和动量密度一周期平均值(5.203)现可表为

$$\left.\begin{aligned}\overline{U} &= \frac{\epsilon}{2}\,|\boldsymbol{\mathscr{E}}_0|^2 = \frac{\mu}{2}\,|\boldsymbol{\mathscr{H}}_0|^2,\\ \overline{\boldsymbol{S}} &= \overline{U}\boldsymbol{u},\\ \overline{\boldsymbol{G}} &= \frac{\overline{U}}{u}\boldsymbol{k}_0,\end{aligned}\right\} \tag{5.205}$$

其中 $\boldsymbol{k}_0\equiv\dfrac{\boldsymbol{k}}{k}$, $\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{k}_0$, $u=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$. 由此可验证反射系数表达式(5.89)的第一个等号.

3. 试证方程组(5.8)中只有后两方程,即

$$\nabla\times\mathscr{E}=\mathrm{i}\omega\mu\mathscr{H}\quad 和\quad \nabla\times\mathscr{H}=-\mathrm{i}\omega\epsilon'\mathscr{E} \tag{5.206}$$

是独立的,其余方程可由它们导出.将此结果与边条件(5.10)、(5.11)、(5.15)和(5.17)中只有前两个独立,其余可由它们导出的结果作对比讨论.

4. 两均匀无吸收绝缘介质以平面为界.一平面电磁波自一介质射向另一介质,在界面被反射和折射.将反射波坡印亭矢量长与入射波坡印亭矢量长之比定义为反射系数,折射波坡印亭矢量长与入射波坡印亭矢量长之比定义为透射系数.求此二系数的表达式.

5. 试证明全反射条件下反射系数为 1.

6. 求全反射条件下光疏介质中的电磁场分布.

7. 考虑有显著吸收的均匀介质(如导体)中的衰减平面波(5.61),其中 $\boldsymbol{k}_1$ 与 $\boldsymbol{k}_2$ 夹角为 θ. 试证由(5.66)定义的 n 与 η 可表为

$$\left.\begin{aligned} n^2&=\frac{\sqrt{n_1^4+n_2^4/\cos^2\theta}+n_1^2}{2},\\ \eta^2&=\frac{\sqrt{n_1^4+n_2^4/\cos^2\theta}-n_1^2}{2},\end{aligned}\right\} \tag{5.207}$$

其中 n_1^2 和 n_2^2 分别为 $\dfrac{\mu\epsilon'}{\mu_0\epsilon_0}$ 的实部和虚部,μ 和 ϵ' 分别为介质的磁导率和有效介电常数.

8. 一无吸收均匀介质与一有显著吸收的均匀介质(如导体)以平面为界.一平面电磁波自无吸收介质射向界面,被反射和折射.试证 § 5.2 的反射定律依然成立,而折射定律则应修改为

$$\frac{\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{n_1^4+n_2^4/\cos^2\theta}+n_1^2}{2n_0^2}, \tag{5.208}$$

其中 θ_0 为入射角,θ 为折射角,n_0 为无吸收介质的折射系数,n_1^2 和 n_2^2 分别为 $\mu\epsilon' c^2$ 的实部和虚部,μ 和 ϵ' 分别为有显著吸收介质的磁导率和有效介电常数.

9. N 层均匀无吸收介质以互相平行的 $N-1$ 个平面为界彼此分开又充满整个空间.有平面电磁波自一端的介质 1 入射最后进入另一端的介质 N. 试证

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_N}=\frac{n_N}{n_1}, \tag{5.209}$$

其中 θ_1 和 n_1 分别为介质 1 中的入射角和折射系数,θ_N 和 n_N 分别为介质 N 中的折射角和折射系数.注意,由于介质 2 到介质 $N-1$ 诸中间介质中有往复的反射波,在有些界面上还可能有全反射,此式不是折射定律(5.32)的简单重复,而应由电磁波的边条件重新证明.

10. 三层均匀无吸收介质以两个互相平行的平面为界彼此分开充满全空间.有平面电磁波自一端的介质 1 入射进入另一端的介质 3. 试求它返回介质 1 的反射系数和进入介质 3 的透射系数.讨论夹在中间的介质 2 中的电磁波及其影响,特别讨论在介质 1 和 2 的界面上发生'全反射'的情形.

11. 在 § 5.4 讨论的夫琅禾费衍射中将矩形孔改为圆孔,仍设电磁波垂直于开孔的不透明平面入射,求衍射光强度的角分布.

12. 设有二无穷长同轴导体圆柱,内、外导体圆柱间为无吸收介质,是为同轴线.设内、外导体均为理想导体,中间无吸收介质的磁导率和介电常数分别为 μ 和 ϵ. 试求解能在其中传输的

TM 型和 TE 型电磁波.

提示 在(5.152)右边代入

$$\left.\begin{aligned} e_z(\rho,\theta) &= (a\mathrm{J}_m(k_\rho\rho) + a'\mathrm{N}_m(k_\rho\rho))\mathrm{e}^{im\theta}, \\ h_z(\rho,\theta) &= (b\mathrm{J}_m(k_\rho\rho) + b'\mathrm{N}_m(k_\rho\rho))\mathrm{e}^{im\theta}, \end{aligned}\right\} \tag{5.210}$$

其中 $\mathrm{N}_m(\xi)$为 ξ 的 m 阶诺伊曼①函数.

13. 壁为理想导体的圆柱形波导在一横截面处被理想导体截断.求可在其中传播的电磁波以及它们的临界频率和临界波长.

14. 壁为理想导体的圆柱形波导,以一横截面为界两边充以不同的均匀无吸收介质.有电磁波自一端入射,在横截界面处一部分被反射,一部分穿过界面透射至波导的另一端.参照第 4 题以坡印亭矢量长之比定义反射系数和透射系数,求此二系数.

15. 壁为理想导体的圆柱形波导从一端到另一端依次充以三种均匀无吸收介质 1、2 和 3,界面为圆柱的横截平面.设介质 1 和介质 3 相同,介质 2 与它们相较为光疏介质.有电磁波从介质 1 入射,一部分在介质 1、2 的界面被反射,另一部分经介质 2 透射入介质 3.求反射系数和透射系数.讨论在介质 1、2 的界面上发生‘全反射’的情形.

16. 在上题中改设介质 2 为光密介质.问在何种条件下此圆柱体成为一共振腔,在此种条件下求此共振腔中电磁驻波的本征模式和本征频率.

---

① Neumann.

第六章　运动带电粒子与电磁波相互作用问题应用举例

§6.1　沿给定轨道运动的带电粒子全程总辐射强度的角分布与谱分解

按(4.272)，t 时刻离带电粒子甚远处的观察者看到粒子向他所在方向单位立体角内发射的电磁波功率为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathscr{I}(t)}{\mathrm{d}\Omega} &= |\boldsymbol{X}(t)|^2, \\ \boldsymbol{X}(t) &= \sqrt{\frac{1}{\mu u}} R'(t)\, \mathscr{E}_2(t); \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

其中 $\boldsymbol{R}'$ 和 $\mathscr{E}_2$ 分别由(4.229)和(4.270)定义，是观测时刻 t 的函数；$\mathrm{d}\Omega$ 为观察者对带电粒子附近某原点所张立体角元. 将(6.1)第一式对时间 t 积分，便得辐射到单位立体角内的电磁波能量

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{X}(t)|^2 \mathrm{d}t. \tag{6.2}$$

作傅里叶分解：

$$\boldsymbol{X}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{Y}(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega. \tag{6.3}$$

它的逆变换为

$$\boldsymbol{Y}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{X}(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t. \tag{6.4}$$

将(6.4)代入(6.3)得

$$\boldsymbol{X}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \boldsymbol{X}(t') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t'-t)} \mathrm{d}\omega.$$

此式表明

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t'-t)} \mathrm{d}\omega = \delta(t' - t)$$

为 δ 函数. 其实这正是高等数学中证明傅里叶变换关系(6.3)和(6.4)的依据. 这个表达式又可写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega'-\omega)t} \mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega' - \omega). \tag{6.5}$$

将(6.3)代入(6.2),并利用此式得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{X}^*(t) \cdot \boldsymbol{X}(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\boldsymbol{Y}^*(\omega)\cdot\boldsymbol{Y}(\omega')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')t} \\ &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{Y}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

(6.1)定义的矢量 $\boldsymbol{X}(t)$是实的.按(6.4)便有 $\boldsymbol{Y}^*(\omega)=\boldsymbol{Y}(-\omega)$, $|\boldsymbol{Y}(\omega)|^2=|\boldsymbol{Y}(-\omega)|^2$.可见,沿某方向单位立体角内带电粒子辐射能量的谱分解为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} &= \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}\omega, \\ \frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} &= 4\pi|\boldsymbol{Y}(\omega)|^2.\end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

将(4.270)代入(6.1)中第二式,再将结果代入(6.4)得

$$\boldsymbol{Y}(\omega) = \frac{q}{8\pi^2}\sqrt{\frac{\mu}{u}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}'/u)\times\boldsymbol{a}']}{(1-\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{n}/u)^3}\mathrm{d}t. \tag{6.7}$$

其中$\boldsymbol{v}'$和$\boldsymbol{a}'$分别为t'时刻带电粒子的速度和加速度;t'由(4.237)定义,此时刻粒子发出的电磁波在 t 时刻到达观察者所在位置;$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{R}'/R'$为$t'$时刻由粒子指向观察者的单位矢量.设带电粒子在原点附近运动,而观察者与原点的距离 $r\to\infty$, $\boldsymbol{n}$ 也就是从原点指向观察者的单位矢量.在(6.7)右边作积分变量变换 $t\to t'$,由(4.237)和(4.244)得

$$\boldsymbol{Y}(\omega) = \frac{q}{8\pi^2}\sqrt{\frac{\mu}{u}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega[t'+R'(t')/u]}\frac{\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}'/u)\times\boldsymbol{a}']}{(1-\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{n}/u)^2}\mathrm{d}t' \tag{6.8}$$

按(4.229)

$$R' = \sqrt{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2} = r\sqrt{1-2\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}} \simeq r-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'. \tag{6.9}$$

代入(6.8),称 $t_0\equiv r/u$,得

$$\boldsymbol{Y}(\omega) = \frac{q}{8\pi^2}\sqrt{\frac{\mu}{u}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega[t'-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'(t')/u]}\frac{\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}'/u)\times\boldsymbol{a}']}{(1-\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{n}/u)^2}\mathrm{d}t'. \tag{6.10}$$

将此式代入(6.6)第二式得

$$\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} = \frac{q^2}{16\pi^3}\frac{\mu}{u}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega[t'-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'(t')/u]}\frac{\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}'/u)\times\boldsymbol{a}']}{(1-\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{n}/u)^2}\mathrm{d}t'\right|^2. \tag{6.11}$$

此式右边出现无穷积分.不过在要讨论的实际问题中,因带电粒子作加速运动而导致的辐射过程往往是在一段有限时间内完成的.在这段有限时间以外,加速度 $\boldsymbol{a}'=0$,(6.10)和(6.11)右边的被积函数为零,其中的积分实际都是有穷积分.这种

情形也可用在被积函数中插入因子 $e^{-\delta|t|}$ 来表达,即考虑积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega[t'-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'/u]-\delta|t|} \frac{\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}'/u)\times\boldsymbol{a}']}{(1-\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{n}/u)^2}dt', \tag{6.12}$$

其中的 δ 为一无穷小正数.(6.10)和(6.11)中的积分乃是此式定义的 I 在 $\delta\to 0$ 时的极限.以下的无穷积分均定义为这种极限.

在 ϵ、μ、从而 u 均为常数的条件下

$$\frac{d}{dt'}\left[\frac{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}'/u)}{1-\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{n}/u}\right] = \frac{\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}'/u)\times\boldsymbol{a}'/u]}{(1-\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{n}/u)^2}.$$

代入上式,作分部积分,最后令 $\delta\to 0$,得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega[t'-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'/u]} \frac{\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}'/u)\times\boldsymbol{a}']}{(1-\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{n}/u)^2}dt'$$

$$= \omega\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega[t'-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'/u]}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}')dt'.$$

代入(6.11)得

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2\mu\omega^2}{16\pi^3 u}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}')e^{i\omega[t'-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'/u]}dt'\right|^2$$

$$= \frac{q^2\omega^2}{16\pi^3\epsilon u^3}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}dt\right|^2. \tag{6.13}$$

在第二个等号右边将 t' 和 $\boldsymbol{r}'$ 改写成了 t 和 $\boldsymbol{r}$,这不过是名称的改变,它们仍分别代表运动带电粒子的时刻和它在该时刻的径矢量.此外,在这个等号处还用到(1.86)和(1.87),其右 $\boldsymbol{k}=\frac{\omega}{u}\boldsymbol{n}$.

如果有多个运动带电粒子,它们辐射的电磁波在观察者处会叠加起来.在计算辐射能量的角分布和谱分解时,首先要将(6.1)中的矢量 $\boldsymbol{X}(t)$ 对各粒子求和.在以后的推导中它导致

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{\omega^2}{16\pi^3\epsilon u^3}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\sum_i \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times q_i\boldsymbol{v}_i)e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i)}dt\right|^2, \tag{6.14}$$

其中 q_i、$\boldsymbol{r}_i$ 和 $\boldsymbol{v}_i$ 分别为第 i 粒子的电荷、t 时刻的径矢量和速度.在参与辐射的带电粒子极多,以致可认为它们组成连续流体的极限下,此式可表为

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{\omega^2}{16\pi^3\epsilon u^3}\left|\int dt\int d\mathscr{V}\boldsymbol{n}\times[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)]e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\right|^2, \tag{6.15}$$

$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ 为 t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 处的电流密度矢量.

§6.2 韧致辐射

带电粒子被碰撞,骤然改变速度而发出电磁波,称为韧致辐射.设速度的改变可认为是瞬间完成的.称此瞬间时刻为 $t=0$,碰撞的位置在 $\boldsymbol{r}=0$.$t<0$ 时粒子速度为 $\boldsymbol{v}_1$,$t>0$ 时粒子速度变为 $\boldsymbol{v}_2$.由于碰撞前和碰撞后粒子均作等速直线运动,轨

道方程为

$$\boldsymbol{r}(t)=\begin{cases}\boldsymbol{v}_1 t, & \text{如 } t<0,\\ \boldsymbol{v}_2 t, & \text{如 } t>0.\end{cases} \tag{6.16}$$

代入(6.13)得轫致辐射的角分布和谱分解

$$\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}=\frac{q^2\omega^2}{16\pi^3\epsilon u^3}\mid \boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2\mid^2, \tag{6.17}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{X}_1&=\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}_1)\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_1)t}\mathrm{d}t=-\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}_1)}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_1},\\ \boldsymbol{X}_2&=\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}_2)\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_2)t}\mathrm{d}t=\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}_2)}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_2};\end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

积分中用到前叙无穷积分取极限的规定,即在被积函数上乘以因子 $\mathrm{e}^{-\delta|t|}$,积分后令 $\delta\to 0$. 由于 $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直,$\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 均与 $\boldsymbol{n}$ 垂直. 轫致辐射的偏振方向为 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 方向,偏振矢量为该方向的单位矢量 $\boldsymbol{e}$. 显然有 $\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{n}$,因而

$$\boldsymbol{e}\cdot[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})]=-\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v}.$$

由此可知

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}&=\frac{q^2\omega^2}{16\pi^3\epsilon u^3}\left|\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)\right|^2\\ &=\frac{q^2\omega^2}{16\pi^3\epsilon u^3}\left|\boldsymbol{e}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{v}_1}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_1}-\frac{\boldsymbol{v}_2}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_2}\right)\right|^2\\ &=\frac{q^2}{16\pi^3\epsilon u^3}\left|\boldsymbol{e}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{v}_1}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_1/u}-\frac{\boldsymbol{v}_2}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2/u}\right)\right|^2.\end{aligned} \tag{6.19}$$

虽然(6.13)并没有直接显示出辐射与带电粒子加速度的关系,此式明确表示出,若粒子作等速直线运动辐射能量为零.

§6.3 同步辐射

圆周运动带电粒子的辐射曾经是提高同步回旋加速器中粒子能量的障碍. 然而深入的研究表明,如果将目标从获得高能粒子改为获得强电磁辐射,这种辐射可以成为一种颇具特色的强光源. 外界对作圆周运动的粒子提供的能量不是令它加速,而是补充它因辐射损失的能量,使它维持在一条固定的圆周轨道上. 带电粒子在这种不变圆周轨道上的辐射称为同步辐射.

自然界的磁场会令电子作圆周运动,发出同步辐射. 对天体周围发出的同步辐射的研究,是获取天体周围磁场和电子运动信息的重要手段.

20 世纪初,休特①就对同步辐射作了详细的理论研究. 1948 年观察到电子同

① G. A. Schott, Electromagnetic Radiation, Cambridge, 1912.

步加速器的同步辐射后，理论研究有了进一步的发展.同步辐射理论已是电动力学的成熟内容.

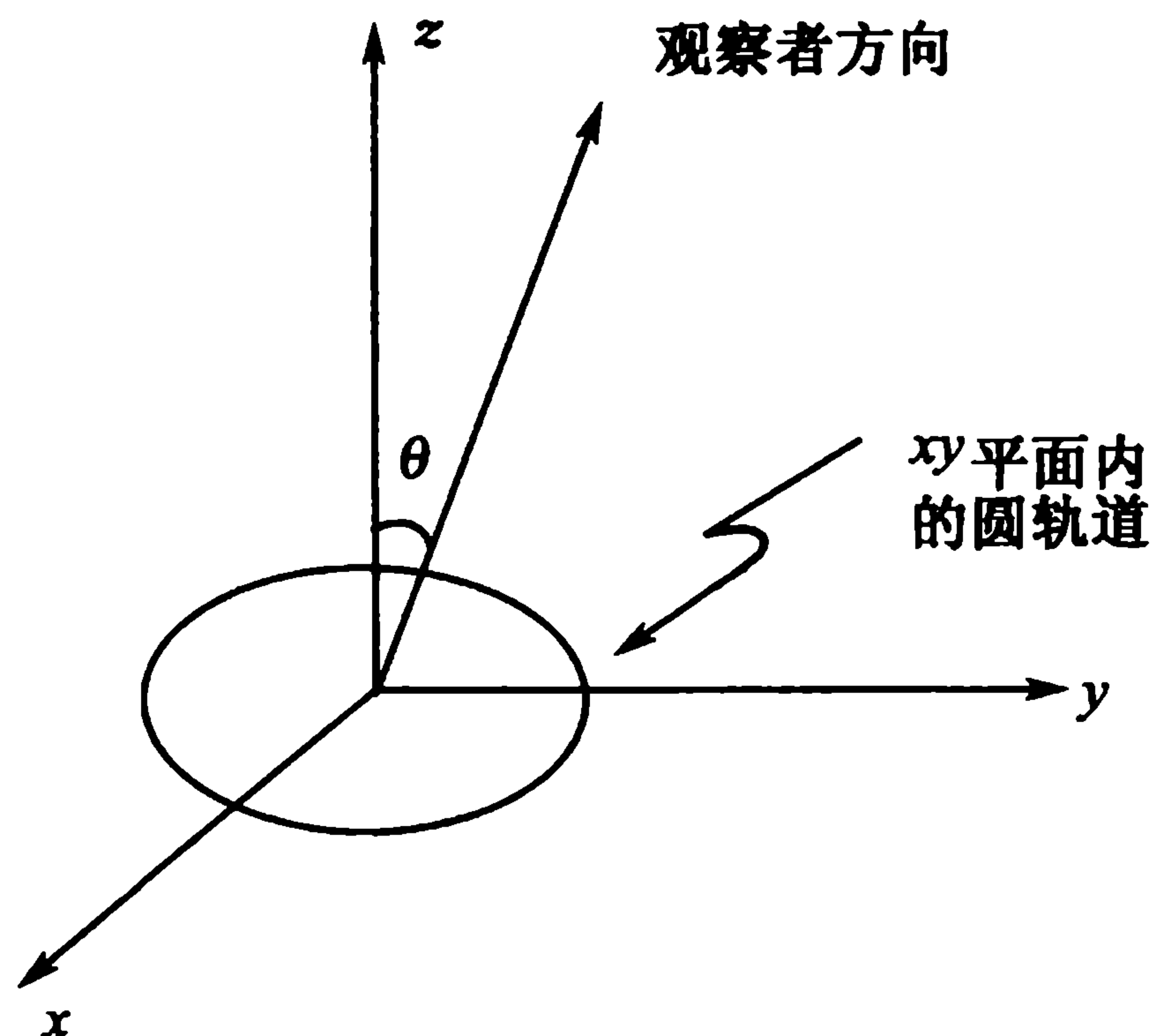


图 6-1　同步辐射示意图

如图 6-1，取圆周轨道平面为 xy 平面，圆心为原点，过原点垂直于 xy 平面取 z 轴，组成右手坐标系.适当选择时间原点，可将作圆周运动的带电粒子在 t 时刻的径矢量表成

$$\boldsymbol{r}(t)=r(\cos\omega_1 t\,\boldsymbol{x}_0+\sin\omega_1 t\,\boldsymbol{y}_0),\tag{6.20}$$

r 为圆周半径，ω_1 为圆周运动角频率，$\boldsymbol{x}_0$ 与 $\boldsymbol{y}_0$ 分别为 x 方向和 y 方向的单位矢量.由此可得粒子的速度

$$\boldsymbol{v}(t)=\dot{\boldsymbol{r}}(t)=r\omega_1(-\sin\omega_1 t\boldsymbol{x}_0+\cos\omega_1 t\boldsymbol{y}_0).\tag{6.21}$$

将观察者所在方向在 xy 平面上的投影取作 y 轴，并将此方向与 z 轴的夹角称为 θ，则

$$\boldsymbol{n}=\sin\theta\boldsymbol{y}_0+\cos\theta\boldsymbol{z}_0,\tag{6.22}$$

$\boldsymbol{z}_0$ 为 z 方向的单位矢量.于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}&=r\omega_1(-\cos\theta\cos\omega_1 t\,\boldsymbol{x}_0-\cos\theta\sin\omega_1 t\,\boldsymbol{y}_0+\sin\theta\sin\omega_1 t\,\boldsymbol{z}_0),\\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})&=r\omega_1(\sin\omega_1 t\,\boldsymbol{x}_0-\cos^2\theta\cos\omega_1 t\,\boldsymbol{y}_0+\sin\theta\cos\theta\cos\omega_1 t\,\boldsymbol{z}_0),\end{aligned}\tag{6.23}$$

$$e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}=e^{i\omega(t-\frac{1}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})}=e^{i\omega(t-\frac{r}{c}\sin\theta\sin\omega_1 t)}.\tag{6.24}$$

由于同步辐射都在真空中发生，已将 u 具体写成了真空中的光速 c.将(6.23)和(6.24)代入(6.13)，将其中的 ϵ 和 u 用它们的真空值 ϵ_0 和 c 代替，电荷 q 用基本粒子的电荷 $\pm e$ 代替，得真空中基本带电粒子(如电子、质子、……)同步辐射能量的角分布与谱分解

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega}=\frac{e^2r^2\omega^2\omega_1^2}{16\pi^3\epsilon_0c^3}\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}[F(t)\boldsymbol{x}_0-G(t)(\cos^2\theta\boldsymbol{y}_0-\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{z}_0)]dt\right|^2,\tag{6.25}$$

其中

$$F(t)=e^{-i\omega\frac{r}{c}\sin\theta\sin\omega_1 t}\sin\omega_1 t \tag{6.26}$$

和

$$G(t)=e^{-i\omega\frac{r}{c}\sin\theta\sin\omega_1 t}\cos\omega_1 t \tag{6.27}$$

都是时间 t 的周期函数,周期为$\frac{2\pi}{\omega_1}$.故可展成傅里叶级数

$$F(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n e^{-i\omega_n t},\qquad \omega_n=n\omega_1, \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned}f_n&=\frac{\omega_1}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_1}^{\pi/\omega_1}F(t)e^{in\omega_1 t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\left(n\varphi-\frac{\omega r}{c}\sin\theta\sin\varphi\right)}\sin\varphi d\varphi\\&=iJ'_n\left(\frac{\omega r}{c}\sin\theta\right);\end{aligned} \tag{6.29}$$

$$G(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_n e^{-i\omega_n t}, \tag{6.30}$$

$$\begin{aligned}g_n&=\frac{\omega_1}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_1}^{\pi/\omega_1}G(t)e^{in\omega_1 t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\left(n\varphi-\frac{\omega r}{c}\sin\theta\sin\varphi\right)}\cos\varphi d\varphi\\&=\frac{cn}{\omega r\sin\theta}J_n\left(\frac{\omega r}{c}\sin\theta\right).\end{aligned} \tag{6.31}$$

其中 $J_n(\xi)$为 ξ 的 n 阶贝塞尔函数,$J'_n(\xi)\equiv\frac{dJ_n(\xi)}{d\xi}$.在(6.29)和(6.31)的第二等号处,除分别代入了 F 和 G 的表达式(6.26)和(6.27)外,还作了积分变量变换 $\varphi=\omega_1 t$.此二式的第三等号处,分别用到关系,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n\varphi-\xi\sin\varphi)}\sin\varphi d\varphi=iJ'_n(\xi), \tag{6.32}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n\varphi-\xi\sin\varphi)}\cos\varphi d\varphi=\frac{n}{\xi}J_n(\xi). \tag{6.33}$$

它们可从贝塞尔函数的基本性质①

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n\varphi-\xi\sin\varphi)}d\varphi=J_n(\xi), \tag{6.34}$$

$$\frac{1}{2}[J_{n+1}(\xi)+J_{n-1}(\xi)]=\frac{n}{\xi}J_n(\xi), \tag{6.35}$$

得到.实际上,在(6.34)两边取对 ξ 的微商即得(6.32).而由(6.34),

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n\varphi-\xi\sin\varphi)}\cos\varphi d\varphi\\&=\frac{1}{4\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}e^{i[(n+1)\varphi-\xi\sin\varphi]}d\varphi+\int_{-\pi}^{\pi}e^{i[(n-1)\varphi-\xi\sin\varphi]}d\varphi\right\}\end{aligned}$$

---

① 见(A3.29),(A3.25).

$$= \frac{1}{2}[J_{n+1}(\xi) + J_{n-1}(\xi)].$$

再由(6.35)即得(6.33).

将(6.28)和(6.30)代入(6.25),利用(6.5)作出对 t 的积分,得

$$\frac{d^2 W}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 r^2 \omega^2 \omega_1^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\delta(\omega - \omega_n)[f_n \boldsymbol{x}_0 - g_n(\cos^2\theta \boldsymbol{y}_0 - \sin\theta\cos\theta \boldsymbol{z}_0)]\right|^2.$$

此式表明,同步辐射具离散谱,角频率只能取带电粒子圆周运动角频率的整数倍,$\omega = \omega_n = n\omega_1$.求和只包含 $n > 0$ 的项是因为按(6.6)$\omega \geqslant 0$;而 $\omega = 0$ 的项,由于右边的因子 ω^2,贡献为零. n 次谐波的角分布为

$$\frac{dW_n}{d\Omega} = \int_{\omega_n - 0}^{\omega_n + 0}\frac{d^2 W}{d\Omega d\omega}d\omega = \frac{n^2 e^2 r^2 \omega_1^4}{4\pi\epsilon_0 c^3}(|f_n|^2 + \cos^2\theta|g_n|^2)\delta(\omega - \omega_n)|_{\omega=\omega_n}.$$

由(6.5)知

$$\delta(\omega - \omega_n)|_{\omega=\omega_n} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2}dt = \lim_{T\to\infty}\frac{T}{2\pi},$$

T 为同步辐射经历的时间.称 $\bar{\mathscr{I}}_n = W_n/T$ 为 n 次谐波辐射的平均功率,从上两式及(6.29)和(6.31)得 n 次谐波辐射功率的角分布

$$\frac{d\bar{\mathscr{I}}_n}{d\Omega} = \frac{n^2 e^2 \omega_1^2}{8\pi^2\epsilon_0 c}\left[\cot^2\theta\, J_n^2\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right) + \frac{v^2}{c^2}J_n'^2\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right)\right], \qquad (6.36)$$

其中 $v = r\omega_1$ 为带电粒子圆周运动的线速度.由洛伦兹力公式(1.19)可得圆周运动角频率与圆周上均匀且垂直于轨道平面的磁感应强度 $\mathscr{B}$ 的关系

$$\omega_1 = \frac{e\mathscr{B}}{m}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

m 为粒子质量.代入上式得

$$\frac{d\bar{\mathscr{I}}_n}{d\Omega} = \frac{n^2 e^4 \mathscr{B}^2}{8\pi^2\epsilon_0 m^2 c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left[\cot^2\theta J_n^2\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right) + \frac{v^2}{c^2}J_n'^2\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right)\right]. \quad (6.37)$$

此式称为休特公式.由普通物理知,角频率为 ω_n 的电磁辐射能量为 $\hbar\omega_n$ 的整数倍,这个整数 N_n 为 n 次谐波辐射的光子数,$\hbar\omega_n$ 为 n 次谐波辐射的光子能量,$\hbar = \frac{h}{2\pi}$,$h = 6.626\times10^{-34}$J·s 为普朗克①常数.利用这种关系,可将(6.36)改为同步辐射 n 次谐波平均光子数 $\overline{N}_n = \bar{\mathscr{I}}_n/\hbar\omega_n$ 角分布的表达式

$$\frac{d\overline{N}_n}{d\Omega} = \frac{n\omega_1\alpha}{2\pi}\left[\cot^2\theta\, J_n^2\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right) + \frac{v^2}{c^2}J_n'^2\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right)\right], \qquad (6.38)$$

其中

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.0} \qquad (6.39)$$

---

① Planck.

为无量纲的精细结构常数,表征电磁作用的强弱.(6.38)与单位制无关.

(6.36)～(6.38)中的每一式都表示出同步辐射角分布和谱分解的详情.对于初次接触这种辐射的人,最重要的是它的定性特征.这些特征可以从公式导出,有些则可更方便地从定性讨论推定.同步辐射中带电粒子速度一般都非常接近光速,以致相对论因子 $\gamma\equiv1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\gg1$.这种粒子称为极端相对论的.极端相对论带电粒子的辐射有明显的特征.注意微分辐射强度一般表示式(4.278)右边第二因子.用 θ' 表示辐射方向与辐射时粒子运动方向的夹角,在真空中这一因子为

$$\left(\frac{1}{1-v\cos\theta'/c}\right)^5\approx\left(\frac{2\gamma^2}{2\gamma^2(1-\cos\theta')+\cos\theta'}\right)^5=\left(\frac{2\gamma^2}{4\gamma^2\sin^2\frac{\theta'}{2}+\cos\theta'}\right)^5. \tag{6.40}$$

推导中用了近似关系

$$\frac{v}{c}=\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\simeq1-\frac{1}{2\gamma^2}, \tag{6.41}$$

它对极端相对论粒子很好地成立.在 $\theta'=0$ 的方向上,因子(6.40)达到 γ^{10} 量级.对极端相对论粒子,这是一个非常大的数.随着 θ' 增加,(6.40)右边分母由于其中的第一项而迅速增加,整个因子迅速减小.到 $\theta'\simeq\frac{\pi}{2}$ 处,此因子降到 1 的量级.可见,极端相对论带电粒子的辐射集中于它运动方向的前方.有显著辐射的方向,其 θ' 角应符合条件

$$4\gamma^2\sin^2\frac{\theta'}{2}\leqslant1.$$

这便要求 $\theta'\approx0$,从而 $\sin\frac{\theta'}{2}\approx\frac{\theta'}{2}$.这个条件遂可表为

$$\gamma\theta'\leqslant1,\qquad\theta'\leqslant\frac{1}{\gamma}. \tag{6.42}$$

可见,极端相对论带电粒子的同步辐射集中在它圆周运动的轨道平面内.这意味着(6.36)～(6.38)右边只在 $\theta\approx\frac{\pi}{2}$ 处显著不为零.而且,辐射还集中在运动圆周的切线方向上.在一条给定的切线方向上,只能看到粒子运动到相应切点附近时发出的辐射,因此看到的同步辐射是一个个的脉冲.如图 6-2,在切点附近圆心角为 $\frac{2}{\gamma}$ 的小圆弧上运动的粒子发出的辐射可到达切线方向的远处.粒子每次在这段小圆弧上运动的时间为

$$\Delta t'=\frac{2}{\omega_1\gamma},$$

ω_1 为它作圆周运动的角速度.按(4.244),在切线方向甚远处看到的同步辐射脉冲延续的时间为

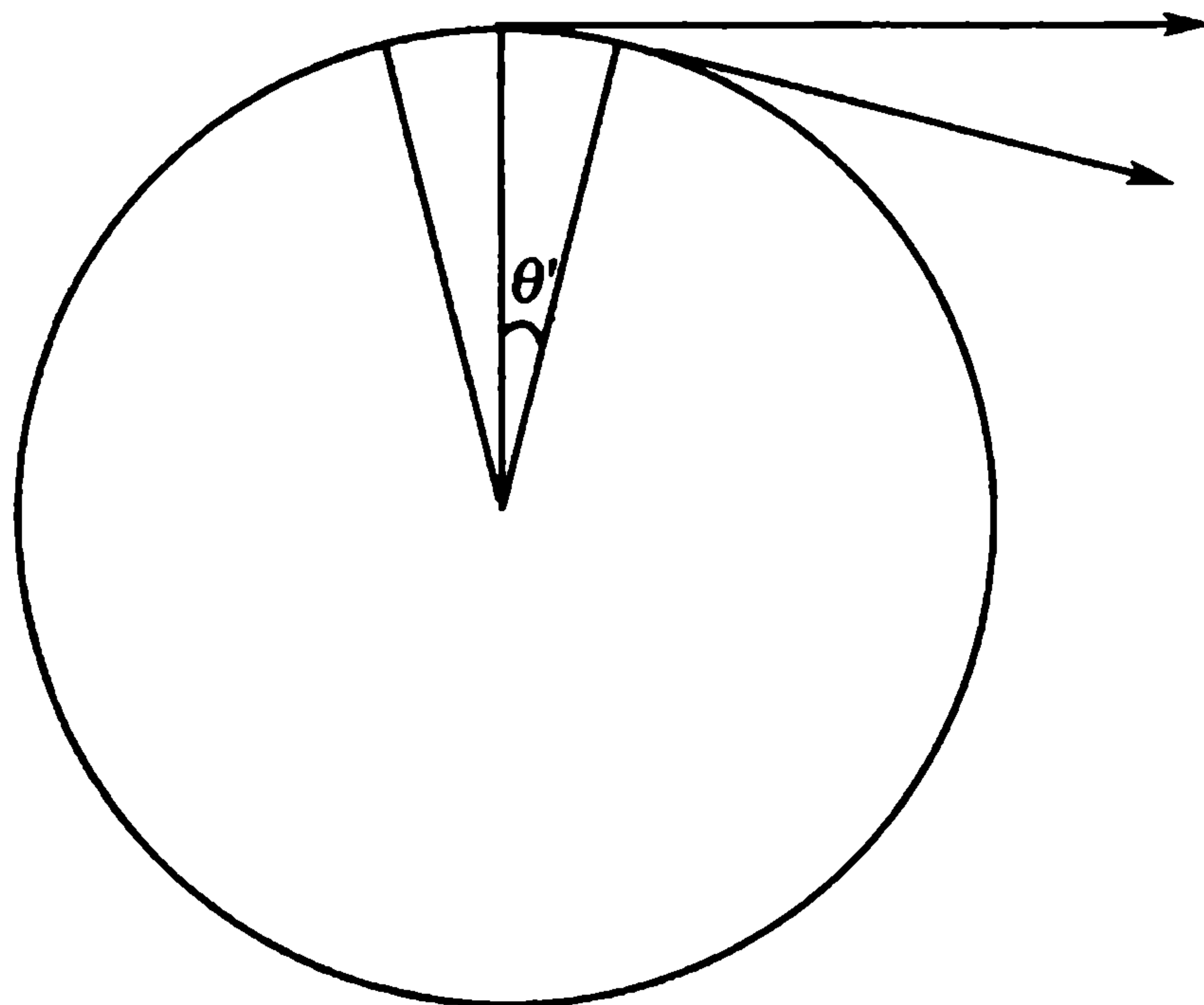


图 6-2 极端相对论粒子同步辐射方向示意图

$$\Delta t = \left(1 - \frac{v}{c}\right)\Delta t' \approx \frac{1}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Delta t' = \frac{1}{\omega_1 \gamma^3}, \tag{6.43}$$

推导中用了极端相对论条件 $v \approx c$. 脉冲是周期地到达的. 相邻两次同样脉冲到达的时间间隔为带电粒子圆周运动的周期 $\tau = \frac{2\pi}{\omega_1}$.

用 $\psi(t)$表示到达观测者处的同步辐射脉冲中某电磁场量(例如电场强度)随时间的变化. 它的傅里叶分解

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \tag{6.44}$$

即是它的谱分解. $\phi(\omega)$表示这一波脉冲的频率谱. 用 Δt 表示 ψ 显著不为零的时间区间,称为脉冲的时间宽度. 用 $\Delta\omega$ 表示 $\phi(\omega)$显著不为零的角频率区间,称为脉冲的频率宽度. 傅里叶分解(6.44)有性质(证明见附录四)

$$\Delta t \Delta\omega \geqslant \frac{1}{2}. \tag{6.45}$$

此式是在对 Δt 和 $\Delta\omega$ 作明确定义后得到的. 如果只是定性地用 Δt 表时间宽度, $\Delta\omega$ 表频率宽度,而不对它们作定量的定义,(6.45)常被代之以定性式

$$\Delta t \Delta\omega \approx 1. \tag{6.46}$$

将(6.43)表示的 Δt 代入此式,便得同步辐射一个脉冲的频率宽度估计值

$$\Delta\omega \approx \gamma^3 \omega_1. \tag{6.47}$$

脉冲中最丰富的单色电磁波的角频率应靠近此频率区间的中心,因而可用 $\gamma^3\omega_1$ 估计. 对极端相对论带电粒子的同步辐射,由于 $\gamma \gg 1$,频率分布的中心远远高于粒子圆周运动的频率,即远远高于基频. 轨道圆周长 $l = 2\pi r$. 圆周运动角速度 $\omega_1 = c/r = 2\pi c/l$. 同步辐射脉冲中强度最大的单色波角频率 $\omega \approx \gamma^3\omega_1 = 2\pi\gamma^3 c/l$,频率 $\nu \approx \gamma^3 c/l$,波长 $\lambda = \frac{c}{\nu} = l/\gamma^3$. 现有同步辐射装置 $l \approx 10^2\mathrm{m}$,如果运

动带电粒子为 5×10^2MeV 的电子，$\gamma=10^3$，同步辐射主要成分的波长 $\lambda\approx10^{-7}$m $=10^3$Å，在紫外波段.若电子能量增加到 5GeV，$\gamma=10^4$，则波长缩至 10^{-10}m$=1$Å，在 X 射线波段.(6.44)表明，同步辐射的每一脉冲都具连续频谱.(6.47)则表明，它具极丰富的频谱，一直延伸到 X 射线波段.

将周期地到来的脉冲场量 $\psi(t)$叠加起来，便得该场量随时间变化的久期表达式

$$\Psi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi(t+n\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega, \tag{6.48}$$

其中

$$\Phi(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega\tau}\phi(\omega)=\phi(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2n\pi\frac{\omega}{\omega_1}}. \tag{6.49}$$

利用恒等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\xi-n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2n\pi\xi}, \tag{6.50}$$

它可由将左边 ξ 的周期函数展成傅里叶级数直接得到.将此式代入(6.49)右边，再将所得的 $\Phi(\omega)$代入(6.48)，利用 δ 函数的性质作出积分，便得

$$\Psi(t)=\frac{\omega_1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\phi(n\omega_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_1 t}. \tag{6.51}$$

场量随时间的久期变化具有离散频谱，角频率恒为带电粒子圆周运动角频率 ω_1(基频)的整数倍.这与前面的讨论一致.不过久期离散谱与脉冲连续谱的形状是一样的，都由函数 $\phi(\omega)$表示.

再看(6.36)表示的谱分解.即考察它的右边随 n 的变化.已知对极端相对论带电粒子的同步辐射，$n\gg1$ 的谐波是主要的.对这种谐波，(6.36)右边方括号内的两项，由于贝塞尔函数的基本性质

$$\mathrm{J}_n'(\xi)=\frac{1}{2}[\mathrm{J}_{n-1}(\xi)-\mathrm{J}_{n+1}(\xi)], \tag{6.52}$$

贡献的形式相同.即它们的贡献随 n 的变化取决于$\left[n\mathrm{J}_n\left(n\dfrac{v}{c}\sin\theta\right)\right]^2$随 n 的变化.同步辐射主要集中在带电粒子轨道平面附近，$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{\gamma}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{\gamma}$范围内.极端相对论粒子 $\gamma\gg1,\theta\simeq\dfrac{\pi}{2}$，其同步辐射强度随 n 的变化取决于$\left[n\mathrm{J}_n\left(n\dfrac{v}{c}\right)\right]^2$在 $n\to\infty$条件下的渐近式.已知贝塞尔函数有渐近关系(证明见附录三)

$$\mathrm{J}_n(n\,\mathrm{sech}\,\eta)\sim\frac{\mathrm{e}^{n(\mathrm{th}\eta-\eta)}}{\sqrt{2n\pi\,\mathrm{th}\eta}},\qquad n\to\infty, \tag{6.53}$$

其中 η 为正实数.注意，对正实数 η，$\mathrm{sech}\,\eta\equiv\dfrac{2}{\mathrm{e}^\eta+\mathrm{e}^{-\eta}}$和 $\mathrm{th}\eta\equiv\dfrac{\mathrm{e}^\eta-\mathrm{e}^{-\eta}}{\mathrm{e}^\eta+\mathrm{e}^{-\eta}}$都是小于 1 的正数.这保证了(6.53)右边为正实数.令 $\mathrm{sech}\,\eta=\dfrac{v}{c}$，

$$\gamma^{-2} = 1 - \mathrm{sech}^2\eta = \mathrm{th}^2\eta.$$

对极端相对论情形，$\mathrm{sech}\,\eta \simeq 1$，$\eta \simeq 0$，$\mathrm{th}\,\eta \simeq \eta$，$\eta \simeq \dfrac{1}{\gamma}$. 由泰勒展开

$$\mathrm{th}\,\eta = \eta - \frac{\eta^3}{3} + \cdots,$$

还可得 $\mathrm{th}\,\eta - \eta = -\dfrac{\eta^3}{3}$. 同步辐射强度随谐波阶 n 分布的极大位置可由$n\mathrm{J}_n\left(n\dfrac{v}{c}\right)$的极大位置定得，即可由

$$\zeta(n) = \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-n/3\gamma^3}$$

的极大位置定得. 令$\dfrac{\mathrm{d}\zeta(n)}{\mathrm{d}n}=0$，得

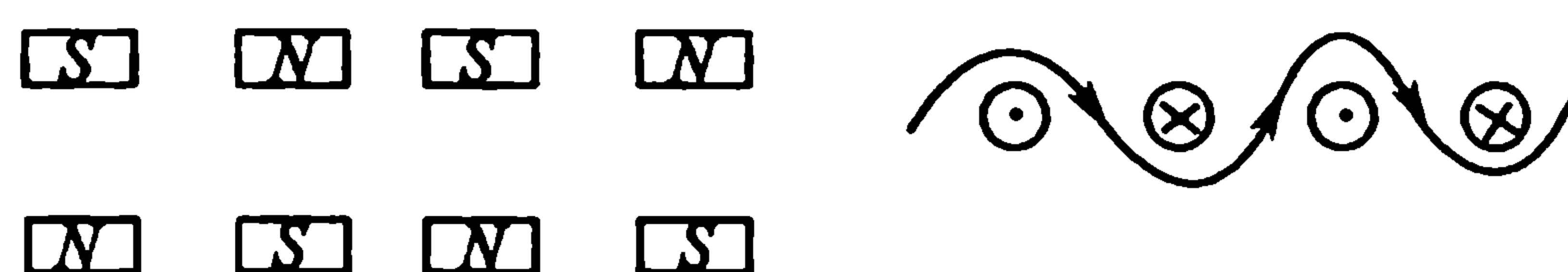
$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{3\gamma^3} = 0,$$

解得 $n = \dfrac{3}{2}\gamma^3$. 与前面定性讨论的结果一致.

同步辐射由于覆盖了从红外、可见光、紫外、直至 X 射线的极宽的频谱，由于它的高强度和偏振，特别由于对它的彻底的理论认识，现已成为一种广泛应用的新光源.

§6.4 摆动带电粒子的辐射

20 世纪后期对摆动带电粒子辐射的研究，直接导致发明自由电子激光(FEL). 这是一种在广大区间内频率连续可调的单色偏振光，颇具特色，常被作为新光源，与同步辐射并用. 使运动带电粒子作横向摆动的装置称为摇摆器(wiggler, undulator)，通常由磁极交替反向的相同磁铁沿与磁场垂直的方向周期排列而成(图 6-3(a)). 沿磁铁排列方向在两磁极间入射的带电粒子，在交替反向的磁场作用下，交替地向纵向两侧偏转，形成横向摆动(图 6-3(b)). 沿摇摆器纵向中心线取 z 轴，在 z 轴上适当位置取原点 O，由 O 沿摆动方向取 x 轴，再按右手规则取 y 轴，组成笛卡儿坐标系 $Oxyz$. 磁力对带电粒子的作用恒垂直于粒子运动方向，不改变粒子速度的大小. 若粒子纵向速度 $v_z \approx c$ 很大，而横向速度 v_x 很小，相对于 v_z 可当作小量，下面的讨论表明，在磁力作用下 v_z 的变化为高级小量. 即在一级



(a) 侧视示意图　　(b) 顶视及粒子轨道示意图

图 6-3　摇摆器及其中带电粒子摆动示意图

近似下 v_z 可视为常数,粒子的纵向坐标

$$z = v_z t + z_0. \tag{6.54}$$

与时间 t 有线性关系.用 λ_w 表示摇摆器磁场沿 z 变化的周期.粒子横向速度 v_x 也应以同样周期沿 z 变化.适当选取坐标原点,并设计好磁场,可将它表为

$$v_x = v_0\cos(k_w z) = v_0\cos(\omega_w t + \delta_0), \tag{6.55}$$

其中常数 v_0 为横向速度的振幅,

$$k_w = \frac{2\pi}{\lambda_w}, \quad \omega_w = k_w v_z, \quad \delta_0 = k_w z_0. \tag{6.56}$$

将(6.55)对时间积分,得粒子的横向坐标

$$x = x_0\sin(\omega_w t + \delta_0) = x_0\sin(k_w z), \tag{6.57}$$

其中

$$x_0 = v_0/\omega_w = v_0/k_w v_z \tag{6.58}$$

为粒子的横向振幅.由于粒子速度值 $v=\sqrt{v_x^2+v_z^2}$ 为常数,

$$v_z = \sqrt{v^2 - v_x^2} = v\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v^2}\cos^2(k_w z)} = \overline{v}_z + v_z', \tag{6.59}$$

其中

$$\overline{v}_z = v - \frac{v_0^2}{4v}, \qquad v_z' = -\frac{v_0^2}{4v}\cos(2k_w z). \tag{6.60}$$

(6.59)的末一等号处用到 $v_0 \ll v$,并对根号作了二项式展开.到 v_0/v 的一级小,(6.59)和(6.60)确实表示 v_z 为常数,(6.54)~(6.57)在一级近似下成立.上节的分析已表明,极端相对论带电粒子的辐射,集中在与其运动方向夹角不超过$\frac{1}{\gamma}$的方向范围内.如果粒子本身的运动方向与摇摆器纵向的夹角也限定为$\frac{1}{\gamma}$的量级,即限定

$$\frac{v_x}{v} \simeq \frac{v_x}{c} \approx \frac{1}{\gamma}, \tag{6.61}$$

则辐射方向与 z 轴的夹角也就是$\frac{1}{\gamma}$量级.在此条件下,按(6.60)第二式,

$$\frac{v_z'}{v} \simeq \frac{v_z'}{c} \approx \frac{1}{\gamma^2}. \tag{6.62}$$

取以 z 轴为极轴的球面坐标 θ,φ 表示观察者的方向,(6.13)中的单位矢量

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}_0\sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{y}_0\sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{z}_0\cos\theta, \tag{6.63}$$

其中 $\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$ 和 $\boldsymbol{z}_0$ 分别为 x、y 和 z 方向的单位矢量.在极端相对论带电粒子有显著辐射的方向上

$$\sin\theta \simeq \theta \approx \frac{1}{\gamma} \ll 1, \tag{6.64}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=v_x\sin\theta\cos\varphi+v_z\cos\theta\simeq c.\tag{6.65}$$

这是因为 $v_x\sin\theta\approx c\dfrac{1}{\gamma^2}$, $v_z\simeq c\left(1-\dfrac{1}{2\gamma^2}\right)\simeq c$,(6.65)在一级近似下成立. 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})&=(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}\simeq c\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}\\&=(c\sin\theta\cos\varphi-v_x)\boldsymbol{x}_0+c\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{y}_0+(c\cos\theta-v_z)\boldsymbol{z}_0.\end{aligned}\tag{6.66}$$

到$\dfrac{1}{\gamma}$的最低次幂,即一次幂,此式可表为

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})=c\boldsymbol{n}_1-v_0\cos(k_w\bar{z})\boldsymbol{x}_0,\tag{6.67}$$

其中 $c\boldsymbol{n}_1$ 为与粒子时空坐标无关的常矢量,适当选取时间零点可令

$$\bar{z}=\bar{v}_z t.\tag{6.68}$$

由(6.59)和(6.60)知

$$z=\bar{z}+z',\tag{6.69}$$

到$\dfrac{1}{\gamma}$的最低非零次幂,即二次幂,

$$z'=-\frac{v_0^2}{8k_w c^2}\sin(2k_w\bar{z})=-\frac{s^2}{4k_w\gamma^2}\sin(2k_w\bar{z}),\tag{6.70}$$

其中

$$s=\frac{\gamma}{\sqrt{2}}k_w x_0.\tag{6.71}$$

同样到$\dfrac{1}{\gamma}$的二次幂,由(6.60)第一式得

$$\begin{aligned}\bar{v}_z&=v\left(1-\frac{v_0^2}{4c^2}\right)=c\left(1-\frac{1}{2\gamma^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{2\gamma^2}\right)\\&=c\left(1-\frac{1+s^2}{2\gamma^2}\right),\end{aligned}\tag{6.72}$$

在第二等号处还用到(6.41)、(6.58)和(6.71);由(6.68)和(6.72)得

$$\omega t=k\bar{z}/\left(1-\frac{1+s^2}{2\gamma^2}\right)=k\bar{z}\,\frac{1+s^2+2\gamma^2}{2\gamma^2};\tag{6.73}$$

由(6.57)、(6.69)~(6.71)得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}&=k(x\sin\theta\cos\varphi+z\cos\theta)\\&=k\left[\frac{\sqrt{2}s}{\gamma k_w}\sin(k_w\bar{z})\theta\cos\varphi+\bar{z}\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)-\frac{s^2}{4k_w\gamma^2}\sin(2k_w\bar{z})\right].\end{aligned}\tag{6.74}$$

于是

$$\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=\frac{k}{k_r}[k_w\bar{z}-\eta\sin(k_w\bar{z})+\xi\sin(2k_w\bar{z})],\tag{6.75}$$

其中

$$k_r=\frac{2\gamma^2}{1+s^2+\gamma^2\theta^2}k_w,\tag{6.76}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\frac{s^2}{1+s^2+\gamma^2\theta^2}, \tag{6.77}$$

$$\eta = 2^{3/2}\frac{s\gamma\theta\cos\varphi}{1+s^2+\gamma^2\theta^2}. \tag{6.78}$$

由(6.34),对实数 ξ 和 φ,有展开式

$$e^{-i\xi\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\xi)e^{-in\varphi}. \tag{6.79}$$

两边取复共轭,利用整数阶贝塞尔函数 $J_n(\xi)$ 为实数的性质,得

$$e^{i\xi\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\xi)e^{in\varphi}. \tag{6.80}$$

由(6.75)、(6.79)和(6.80),

$$e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} = \sum_{n_1,n_2} J_{n_1}\left(\frac{k}{k_r}\xi\right)J_{n_2}\left(\frac{k}{k_r}\eta\right)e^{i\left(\frac{k}{k_r}+2n_1-n_2\right)k_w\bar{z}}. \tag{6.81}$$

此式右边和号下只有最后一个因子与时间 t 有关.这是一个具虚指数的指数因子,它的指数通过 $\bar{z}$ 随时间线性变化.按§6.1对无穷积分的定义,即在被积函数上乘因子 $e^{-\delta|t|}$,积分后再令正数 $\delta\to 0$,这一指数因子在 $(-\infty,\infty)$ 区间上的积分为零.(6.67)右边第一项对(6.13)右边的积分贡献为零.对摆动带电粒子的辐射,(6.13)右边要做的只是函数

$$v_0\cos(k_w\bar{z})e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$$
$$=\frac{v_0}{2}\sum_{n_1,n_2} J_{n_1}\left(\frac{k}{k_r}\xi\right)J_{n_2}\left(\frac{k}{k_r}\eta\right)\left[e^{i\left(\frac{k}{k_r}+2n_1-n_2+1\right)k_w\bar{z}} + e^{i\left(\frac{k}{k_r}+2n_1-n_2-1\right)k_w\bar{z}}\right]$$

对时间的积分.由于粒子只在摇摆器内横向速度不是零:$v_0\neq 0$,积分只对粒子在摇摆器内的时间进行.利用(6.68)将积分变量换成 $\bar{z}$,得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}dt$$
$$=\boldsymbol{x}_0\frac{v_0}{2\bar{v}_z}\sum_{n_1,n_2} J_{n_1}\left(\frac{k}{k_r}\xi\right)J_{n_2}\left(\frac{k}{k_r}\eta\right)\left[\int_0^L e^{i\left(\frac{k}{k_r}+2n_1-n_2+1\right)k_w\bar{z}}d\bar{z}\right.$$
$$\left.+\int_0^L e^{i\left(\frac{k}{k_r}+2n_1-n_2-1\right)k_w\bar{z}}d\bar{z}\right] \tag{6.82}$$

L 为摇摆器的长度.方括号内的两个积分都可表为

$$\int_0^L e^{i\left(\frac{k}{k_r}-K\right)k_w\bar{z}}d\bar{z} = \frac{1}{k_w}\int_0^{k_wL} e^{i\left(\frac{k}{k_r}-K\right)\zeta}d\zeta$$
$$= Le^{iN_w\pi\left(\frac{k}{k_r}-K\right)}\frac{\sin\left[N_w\pi\left(\frac{k}{k_r}-K\right)\right]}{N_w\pi\left(\frac{k}{k_r}-K\right)}, \tag{6.83}$$

其中 $N_w=\dfrac{L}{\lambda_w}=\dfrac{k_wL}{2\pi}$ 为粒子在摇摆器内摆动的次数.注意函数 $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ 的图像

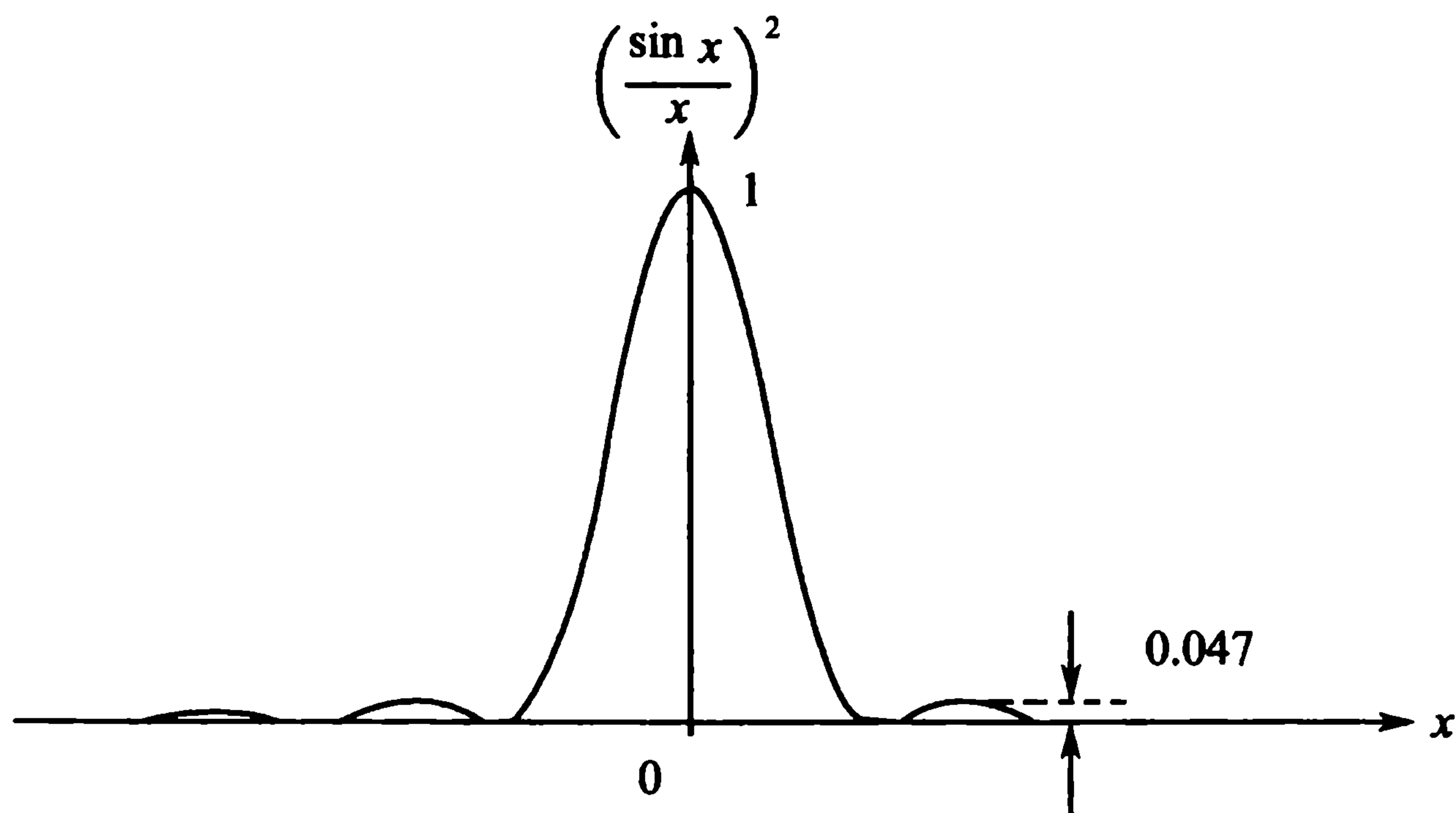


图 6-4 共振因子图像

(图 6-4),在 $x=0$ 处取主极大值 1,在 $x=\pi$ 处达到第一极小值 0.第二极大值 $0.047\ll 1$,以后的取值更小. 即这个函数只在 $x=0$ 附近 $\delta x\leqslant\pi$ 的区间内有显著不为零的值.由此可知,将(6.83)代入(6.82),再将结果代入(6.13)得到的摆动带电粒子辐射谱有清晰的共振结构.共振中心在

$$k = Kk_r \tag{6.84}$$

处,K 为正整数.相邻共振峰间距 $\Delta k=k_r$,共振峰宽度 $\delta k=k_r/N_w$.对摆动次数 $N_w\gg 1$ 的情形,共振峰是清楚地分开的.即是说,摆动带电粒子的辐射具有清晰的等距离的线状谱,每条谱线都是频率很好确定的单色光.(6.76)和(6.84)还表明,所发单色光的频率可以通过调节入射带电粒子的能量来调制.这些都是不同于同步辐射的良好品质.

与整数 K 对应的共振辐射称为 K 阶谐波.以上分析表明,摆动带电粒子辐射的各阶谐波是很好地分开的谱线,可分别单独研究.由(6.13)、(6.82)和(6.83)得 K 阶谐波的角分布和谱线结构

$$\frac{\mathrm{d}^2 W_K}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} = \frac{e^2 s^2\gamma^2 K^2 N_w^2}{2\pi\epsilon_0 c(1+s^2+\gamma^2\theta^2)^2}\left\{\frac{\sin[N_w\pi(k-Kk_r)/k_r]}{N_w\pi(k-Kk_r)/k_r}\right\}^2 F_K, \tag{6.85}$$

其中

$$F_K = \begin{cases} \left\{\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty}(-1)^\kappa \mathrm{J}_{2\kappa}(K\eta)\left[\mathrm{J}_{\frac{K+1}{2}+\kappa}(K\xi)-\mathrm{J}_{\frac{K-1}{2}+\kappa}(K\xi)\right]\right\}^2, & K=1,3,5,\cdots, \\ \left\{\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty}(-1)^\kappa \mathrm{J}_{2\kappa+1}(K\eta)\left[\mathrm{J}_{\frac{K}{2}+\kappa+1}(K\xi)-\mathrm{J}_{\frac{K}{2}+\kappa}(K\xi)\right]\right\}^2, & K=2,4,6,\cdots. \end{cases} \tag{6.86}$$

推导中用到贝塞尔函数的性质:对整数 n,

$$\mathrm{J}_{-n}(\xi) = (-1)^n\mathrm{J}_n(\xi); \tag{6.87}$$

还略去了$\frac{1}{\gamma}$和$\frac{1}{N_w}$的高次幂,因而只适用于 $\gamma\gg 1$ 和 $N_w\gg 1$ 的情形.好在这正是应

用摆动带电粒子辐射时的实际情形.当前采用的摆动带电粒子实际就是电子,$q=-e$;摆动可视为在真空中进行,因而 $\epsilon=\epsilon_0$.在从(6.13)到(6.85)的推导中已将这些值代入.

§6.5 摆动带电粒子与电磁波的相互作用,自由电子激光

上节讨论了摆动带电粒子的电磁辐射,即是讨论了带电粒子对电磁场的作用.然而作用是相互的.在粒子对电磁场作用的同时,电磁场也对粒子作用.这首先表现在粒子辐射电磁波的过程中自身受到的反冲.实际上,摇摆器中不会只有一个粒子,带电粒子是成束注入摇摆器的.而且它们是极端相对论的,沿摇摆器纵向的速度非常接近光速,因此与所发出的电磁波几乎同步沿摇摆器纵向移动.在这移动的过程中,带电粒子与电磁波持续地相互作用.此外,在向摇摆器注入带电粒子的同时,还可沿同方向注入一束电磁波.注入的电磁波与带电粒子辐射的电磁波叠加起来,与摆动带电粒子相互作用.这种作用的结果,可以是部分电磁波被带电粒子吸收,也可以是使带电粒子辐射更多的电磁波.带电粒子因与电磁波作用而额外发出的辐射称为诱致辐射.诱致辐射增强原有的电磁波,将它相干地放大.能将电磁波相干放大的装置称为激光器,相干地放大了的电磁波称为激光.可见,带电粒子的摇摆器可做成激光器.现在普遍采用电子作为这种激光器中的带电粒子,它们是未被原子束缚的自由电子.这种激光器因而称为自由电子激光器,产生的激光便称为自由电子激光,按英文字头简称 FEL.由上节知,摇摆器中电子辐射的波长可通过改变入射电子能量而连续地调节,使自由电子激光的波长连续可调.此外,自由电子激光的强度可做得较大.这些都是它优于传统激光的地方.传统激光采用光对原子内电子的诱致辐射实现光放大.原子内电子能量是量子化的,不能随意改变.这使得传统激光的波长不能连续调节,至多只能通过改变共振腔在原子光谱线自然宽度内微调.

由能量守恒可直观理解摆动电子吸收电磁波和受电磁波诱致辐射的机理,并判断它们分别在何种条件下发生.如电子沿 x 正向运动时电磁波中电场强度矢量沿 x 负方向,由于电子带负电,电磁波对电子作功为正,因而会增加电子能量.按能量守恒,电磁波能量必减少,即它被电子吸收了一部分.如电子沿 x 正向运动时电磁波中电场强度矢量也沿 x 正向,由于电子带负电,电磁波对电子作功为负,因而会减少电子能量.按能量守恒,电磁波能量必因此而增加,即电子因与电磁波作用而额外辐射,这便是诱致辐射.摆动电子轨道具波形,例如由(6.55)和(6.57)描写.电子运动方向与电磁波中电场强度方向的相对关系,表现为电子在其波形轨道中的相位与电子所在处电磁波的相位的相对关系.

由§4.4知,带电系统辐射的电磁波中,电场方向在垂直于传播方向的平面内

(横波),并沿电流密度矢量在此平面内投影的方向.沿 z 方向前进并沿 x 方向摆动的电子,朝 z 方向辐射的电磁波中电场应沿 x 方向振动.设沿 z 方向入射的电磁波中电场也沿 x 方向偏振,它与电子沿 z 方向辐射的电磁波叠加成的平面波可表示为

$$\boldsymbol{\mathscr{E}} = \boldsymbol{x}_0 \mathscr{E}_0 \sin(kz - \omega t + \phi_0). \tag{6.88}$$

由于与电子束的作用,振幅 $\mathscr{E}_0$ 和相角 ϕ_0 都会随位置变化.不过在一般条件下,电子流强不高,与电磁波的作用不强,$\mathscr{E}_0$ 和 ϕ_0 应是 z 的缓变函数,在一个波长范围内的变化可忽略,(6.88)表示的仍是一近似的平面波.设电子仍按(6.55)和(6.57)沿 x 方向摆动.电磁波(6.88)对电子作的功率为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = - ev_0 \mathscr{E}_0 \cos(k_w z)\sin(kz - \omega t + \phi_0). \tag{6.89}$$

沿 z 方向传播的电磁波自然有 $\theta = 0$,代入(6.75)~(6.78),得

$$kz - \omega t = -\frac{k}{k_r}[k_w \bar{z} + \xi \sin(2k_w \bar{z})], \tag{6.90}$$

$$k_r = \frac{2\gamma^2}{1 + s^2} k_w, \tag{6.91}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\frac{s^2}{1 + s^2}, \tag{6.92}$$

$\eta = 0$. $\bar{z}$ 随时间 t 按(6.68)线性变化.这便假设了 $t = 0$ 时 $\bar{z} = 0$.如果定义摇摆器入口处的纵向坐标为 $z = 0$,这就为每一个入射电子定义了一个计时的起点:称它到达摇摆器入口的时刻为 $t = 0$.然而,实际上不同电子到达入口的时刻是不同的,在入口处遇到的电磁波的相位 ϕ_0 也因此彼此不同.在采用表达式(6.90)时必须意识到,(6.88)中的相角 ϕ_0 对不同电子是不同的,而且通常是随机的.

在(6.80)两边取实部得

$$\cos(\xi \sin\varphi) = \mathrm{J}_0(\xi) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{J}_{2n}(\xi)\cos(2n\varphi), \tag{6.93}$$

取虚部得

$$\sin(\xi \sin\varphi) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{J}_{2n-1}(\xi)\sin[(2n - 1)\varphi]. \tag{6.94}$$

用此二式和(6.90),经三角函数的一些简单运算,到 $\frac{1}{\gamma}$ 的最低次幂,得

$$\begin{aligned}
&\cos(k_w z)\sin(kz - \omega t + \phi_0) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{J}_{2n-1}\left(\frac{k}{k_r}\xi\right)\left\{\sin\left[\left(\frac{k}{k_r} - 4n + 1\right)k_w \bar{z} - \phi_0\right] + \sin\left[\left(\frac{k}{k_r} - 4n + 3\right)k_w \bar{z} - \phi_0\right]\right. \\
&\quad \left. - \sin\left[\left(\frac{k}{k_r} + 4n - 3\right)k_w \bar{z} - \phi_0\right] - \sin\left[\left(\frac{k}{k_r} + 4n - 1\right)k_w \bar{z} - \phi_0\right]\right\} \\
&\quad - \frac{1}{2}\mathrm{J}_0\left(\frac{k}{k_r}\xi\right)\left\{\sin\left[\left(\frac{k}{k_r} - 1\right)k_w \bar{z} - \phi_0\right] + \sin\left[\left(\frac{k}{k_r} + 1\right)k_w \bar{z} - \phi_0\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_{2n}\left(\frac{k}{k_r}\xi\right)\left\{\sin\left[\left(\frac{k}{k_r}-4n-1\right)k_w\bar{z}-\phi_0\right]\right.$$

$$+\sin\left[\left(\frac{k}{k_r}-4n+1\right)k_w\bar{z}-\phi_0\right]+\sin\left[\left(\frac{k}{k_r}+4n-1\right)k_w\bar{z}-\phi_0\right]$$

$$\left.+\sin\left[\left(\frac{k}{k_r}+4n+1\right)k_w\bar{z}-\phi_0\right]\right\}. \tag{6.95}$$

将此式代入(6.89)右边,对时间 t 积分,按(6.68)即对 $\bar{z}$ 积分,可得电子在摇摆器中因与电磁波作用而发生的能量变化.作为 $\bar{z}$ 的函数,(6.95)右边为正弦函数 $\sin(Qk_w\bar{z}-\phi_0)$的线性组合,亦即指数函数 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}Qk_w\bar{z}}$的线性组合.由(6.83)知,这种函数沿摇摆器纵向的积分,只当

$$|Q|<\frac{1}{N_w} \tag{6.96}$$

时显著不为零.电子在摇摆器中摆动的次数 N_w 通常是一大正数,这使(6.95)右边至少有一半项数不满足此条件.剔除这些项,将可能符合此条件的项代入(6.89),得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=-\frac{ev_0\mathscr{E}_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\mathrm{J}_{n-1}\left(\frac{k}{k_r}\xi\right)-\mathrm{J}_n\left(\frac{k}{k_r}\xi\right)\right]\sin\left[\left(\frac{k}{k_r}-2n+1\right)k_w\bar{z}-\phi_0\right]. \tag{6.97}$$

对给定的 k,此式右边和号内实际上至多只有一项能符合条件(6.96).设其中第 n 项满足此条件,必有

$$k\simeq Kk_r,\qquad K=2n-1\text{ 为奇数}, \tag{6.98}$$

这正是上节得到的摇摆器中带电粒子辐射的共振条件(6.84).谐波阶数 K 此处限定为奇数是限定$\theta=0$ 的结果.对 K 阶谐波共振作用,(6.97)给出,到$\frac{1}{\gamma}$的最低次幂

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}\bar{z}}=-\frac{es\mathscr{E}_0}{\sqrt{2}\gamma}(-1)^{\frac{K-1}{2}}\left[\mathrm{J}_{\frac{K-1}{2}}(K\xi)-\mathrm{J}_{\frac{K+1}{2}}(K\xi)\right]\sin(\phi), \tag{6.99}$$

其中

$$\Delta=E-E_0, \tag{6.100}$$

$$\phi=k\bar{z}-\omega t+Kk_w\bar{z}+\phi_0, \tag{6.101}$$

E_0 为电子在摇摆器入口处的能量.(6.99)右边与 $\sin(\phi)$相乘的因子,符号是固定的.如果能将相角 ϕ 维持在一恰当值附近,就能使电子能量持续减少,从而使电磁波能量持续增加,实现光放大,形成激光.令$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=0$,得

$$k(\bar{v}_z-c)+Kk_w\bar{v}_z=0. \tag{6.102}$$

由(6.72)知,此式表示

$$k = \frac{2\gamma^2}{1+s^2} K k_w = K k_r.$$

这正是共振条件(6.98). 另一方面,由(6.56)第一式和 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$知,(6.102)表示

$$c\frac{\lambda_w}{\overline{v}_z} - \lambda_w = K\lambda,$$

即电子经一摇摆周期 λ_w 时电磁波等相位面超出电子的距离恰为波长的整数倍. 这使电磁波与电子摆动间的相位关系保持不变,从而形成共振.

实际上,电子摆动与电磁波的相对相角 ϕ 会随时间 t 变化,即会随电子纵向平均位置 $\overline{z}$ 变化. 将(6.101)两边对 $\overline{z}$ 求微商,得

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\overline{z}} = k + K k_w - \frac{\omega}{\overline{v}_z}.$$

$\frac{1}{\overline{v}_z}$是电子能量E 的函数. 利用

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}v_z} = \gamma^2 E \frac{v_z}{c^2}$$

将这个函数在 $E=E_0$ 附近作泰勒展开,取到 $\Delta=E-E_0$ 的一次幂,代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\overline{z}} = a + b\Delta, \tag{6.103}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= k + K k_w - \frac{\omega}{\overline{v}_z(E_0)}, \\ b &= \frac{c^2\omega}{\gamma_0^2 E_0\, \overline{v}_z^3(E_0)}, \end{aligned}\right\} \tag{6.104}$$

$\gamma_0 \equiv \gamma(E_0)$. (6.99)与(6.103)联立可解出 Δ 与 ϕ 沿摇摆器纵向的变化,再由能量守恒便可推断电磁波能量随时间的变化.

将(6.103)两端再对 $\overline{z}$ 作一次微商,然后利用(6.99)消去$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}\overline{z}}$,得

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\,\overline{z}^2} + \Omega\sin\phi = 0, \tag{6.105}$$

$$\Omega = \frac{bes\mathscr{E}_0}{\sqrt{2}\gamma}(-1)^{\frac{K-1}{2}}\left[\mathrm{J}_{\frac{K-1}{2}}(K\xi) - \mathrm{J}_{\frac{K+1}{2}}(K\xi)\right]. \tag{6.106}$$

按前面的讨论,$\mathscr{E}_0$、γ 和 s 都应是 $\overline{z}$ 的缓变函数. 在它们的变化足够缓慢,以致 Ω 可视为常数的条件下,(6.105)成为经典力学中已研究过的单摆方程. 电磁波与电子运动参数沿摇摆器纵向变化足够缓慢的情形称为低增益情形. 引进无量纲变量 $\zeta=\overline{z}/L$,(6.103)和(6.105)分别成为无量纲方程

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\zeta} = a_0 + b_0\Delta_0, \tag{6.107}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\zeta^2}+\Omega_0\sin\phi=0,\tag{6.108}$$

其中 $\Delta_0=\Delta/E_0$ 为无量纲函数,

$$a_0=aL,\quad b_0=bLE_0,\quad \Omega_0=\Omega L^2\tag{6.109}$$

均为无量纲参数.

在将摇摆器当作激光发生器而不是放大器使用时,最初是没有电磁波输入的,在入口处 $\mathscr{E}_0=0$.在电子首次穿过摇摆器的过程中辐射出电磁波,$\mathscr{E}_0$ 仍然很小.为产生较强的激光,在摇摆器两端放置反射镜,形成共振腔.被镜面反射的电磁波反复通过摇摆器,如果每次都因与穿越摇摆器的电子作用而放大,最后就成为一束较强的自由电子激光,$\mathscr{E}_0$ 变得很大.不过最初几次通过摇摆器时 $\mathscr{E}_0$ 不大,称为小讯号阶段.在小讯号阶段,$\mathscr{E}_0$ 可当作小量,由(6.106)和(6.109)定义的 Ω_0 也是小量.下面,在此条件下求解单摆方程(6.108).

设解为

$$\phi(\zeta)=\phi_0+a_0\zeta+\psi(\zeta).\tag{6.110}$$

若 $\mathscr{E}_0=0$,则 $\Omega_0=0$,此式右边前两项的和就是(6.108)的解,且符合起始条件 $\phi(0)=\phi_0$.$\mathscr{E}_0=0$ 又表明摇摆器内无电磁波,电子能量不会变化,$\Delta_0=0$,(6.110)前两项之和还符合(6.107).这些都表明,在 $\mathscr{E}_0$ 为小量的条件下,$\psi(\zeta)$ 为小量,作为零级近似可视它为零.(6.108)的一级近似便是

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\zeta^2}=-\Omega_0\sin(\phi_0+a_0\zeta).\tag{6.111}$$

初条件 $\phi(0)=\phi_0$ 要求(6.110)中

$$\psi(0)=0.\tag{6.112}$$

初条件 $\Delta_0(0)=0$ 导致初条件 $\left.\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=0}=a_0$,这转而要求(6.110)中

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=0}=0.\tag{6.113}$$

在初条件(6.112)和(6.113)下,(6.111)的积分为

$$\begin{aligned}\psi(\zeta,\phi_0)&=-\Omega_0\int_0^{\zeta}\mathrm{d}\zeta'\int_0^{\zeta'}\mathrm{d}\zeta''\sin(\phi_0+a_0\zeta'')\\&=\Omega_0\left\{\frac{1}{a_0^2}[\sin(\phi_0+a_0\zeta)-\sin\phi_0]-\frac{\zeta}{a_0}\cos\phi_0\right\}.\end{aligned}\tag{6.114}$$

用(6.106)和(6.109)可将(6.99)表为

$$\frac{\mathrm{d}\Delta_0}{\mathrm{d}\zeta}=-\frac{\Omega_0}{b_0}\sin\phi.\tag{6.115}$$

将(6.110)代入此式右边,注意 ψ 为小量,到 ψ 的一次幂得

$$\frac{\mathrm{d}\Delta_0}{\mathrm{d}\zeta}=-\frac{\Omega_0}{b_0}[\sin(\phi_0+a_0\zeta)+\cos(\phi_0+a_0\zeta)\psi(\zeta,\phi_0)]$$

$$= -\frac{\Omega_0}{b_0}\left\{\sin(\phi_0 + a_0\zeta) + \frac{\Omega_0}{2a_0^2}[\sin(2\phi_0 + 2a_0\zeta) - \sin(2\phi_0 + a_0\zeta)\right.$$

$$\left. + \sin(a_0\zeta) - a_0\zeta\cos(2\phi_0 + a_0\zeta) - a_0\zeta\cos(a_0\zeta)]\right\}.$$

设电子到达入口处时的能量 E_0 是固定的,相角 ϕ_0 则各不相同.将电子在摇摆器中的能量增量对 ϕ_0 求平均.设电子随到达入口的时间分布是完全随机的,随 ϕ_0 的分布必是均匀的.将上式对均匀分布的 ϕ_0 求平均,得

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\Delta}_0}{\mathrm{d}\zeta} = \overline{\frac{\mathrm{d}\Delta_0}{\mathrm{d}\zeta}} = -\frac{\Omega_0^2}{2b_0a_0^2}[\sin(a_0\zeta) - a_0\zeta\cos(a_0\zeta)].$$

将此式沿纵向在整个摇摆器中积分,得电子在摇摆器终端的相对能量增量平均值

$$\overline{\Delta}_0(1) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\overline{\Delta}_0}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta = -\frac{\Omega_0^2}{b_0}f(a_0), \tag{6.116}$$

其中

$$f(a_0) \equiv \frac{1}{a_0^3}\left(1 - \cos a_0 - \frac{a_0}{2}\sin a_0\right). \tag{6.117}$$

设一束能量为 E_0 的电子通过摇摆器,电流密度为 j.单位时间通过单位面积的电子数便是 j/e.每个电子平均能量增量为 $\overline{\Delta}(1) = E_0\overline{\Delta}_0(1)$,这使单位时间内通过摇摆器单位面积的电子损失能量

$$-\frac{j}{e}\overline{\Delta}(1) = -\frac{j}{e}E_0\overline{\Delta}_0(1) = \frac{jE_0\Omega_0^2}{eb_0}f(a_0).$$

按能量守恒,这便是单位时间内通过摇摆器单位面积的电磁波能量的增量,亦即坡印亭矢量长的时间平均 $\overline{S}(\zeta)$在摇摆器两端的差:

$$\overline{S}(1) - \overline{S}(0) = \frac{jE_0\Omega_0^2}{eb_0}f(a_0). \tag{6.118}$$

定义

$$g \equiv \frac{\overline{S}(1) - \overline{S}(0)}{\overline{S}(0)} \tag{6.119}$$

为电磁波通过摇摆器的增益,便有

$$g = \frac{jE_0\Omega_0^2}{eb_0\overline{S}(0)}f(a_0). \tag{6.120}$$

由(1.233),(1.83)~(1.87),和

$$\overline{\sin^2 x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

知平面波(6.88)的坡印亭矢量长的时间平均为

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c\mathscr{E}_0^2. \tag{6.121}$$

代入(6.120),利用(6.109)、(6.106)和(6.104)得

$$g = \frac{\omega e j s^2 L^3}{\epsilon_0 m c^4 \gamma^5}\left[\mathrm{J}_{\frac{K-1}{2}}(K\xi) - \mathrm{J}_{\frac{K+1}{2}}(K\xi)\right]^2 f(a_0). \tag{6.122}$$

此式适用于低增益情形，所有变量皆在摇摆器入口处取值.

(6.122)右边是一正数与 $f(a_0)$ 的积. $f(a_0)$ 的正负决定 g 的正负，即决定电磁波在摆动器中是放大还是被吸收. $f(a_0)$ 因而称为增益函数. 图 6-5 是 $f(a_0)$ 的图像. 它是一个奇函数，在 $a_0=0$ 处为 0. $a_0=0$ 即共振条件(6.102). 共振处增益为零好像很奇怪，实际很好理解. 共振表示始终维持电子加速或减速，对电子束整体而言却是能量既不增加也不减少，电磁波的能量便也既不减少也不增加，增益为零. $a_0 \neq 0$ 表示偏离共振，因而称 a_0 为失谐量. 图 6-5 表明 a_0 取一恰当正值可得最大增益.

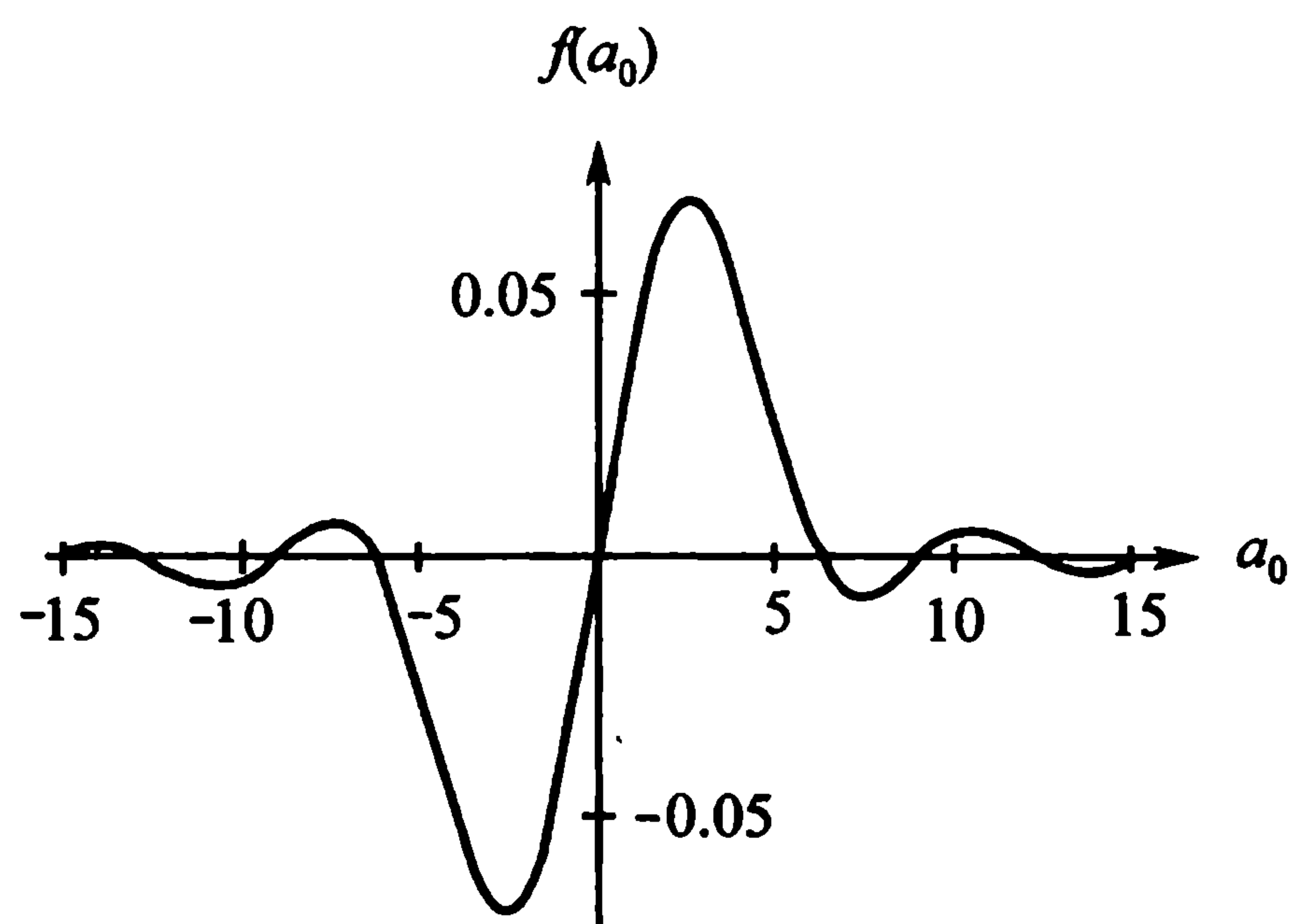


图 6-5 增益函数

§6.6 磁流体动力学，磁扩散、磁冻结与磁流体动力波

流体物质由原子、分子组成. 原子、分子又由带正电的原子核和带负电的电子组成. 如果原子、分子离解为原子核和电子，或部分离解为正离子和电子，只要整体保持电中性，这种流体便称为等离子体. 等离子体运动过程中，可能出现局域非零的电荷电流密度，因而会与电磁场耦合. 等离子体与电磁场的耦合运动是等离子体物理的研究对象，是经典电动力学饶有兴趣的一支. 由于演化中的恒星和一些行星内部处于等离子体状态，也由于它在受控热核反应研究中的重要地位，等离子体物理在近半个世纪受到高度重视.

如果所考虑的问题只涉及电子和离子的大尺度运动，这种尺度从时间上讲远大于电子和离子两次碰撞间的时间间隔，从空间上讲远大于它们的平均自由程，则有足够的时间和空间通过电子和离子的碰撞达到各种平衡，其中包括局域电中性，即按宏观尺度看等离子体在每一瞬间和每一空间点上都是电中性的，电荷密度为零. 这样的等离子体称为磁流体. 由于电流密度不一定处处为零，磁流体可以有明显的磁效应. 由于电荷密度处处为零，磁流体中没有由电荷直接产生的电场，其中的电场只能由磁场的变化感应而生.

磁流体的运动可用密度场 $\rho(\boldsymbol{r},t)$，速度场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$，压力场 $\mathscr{P}(\boldsymbol{r},t)$，电流密度场 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$，电场 $\boldsymbol{\mathscr{E}}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\boldsymbol{\mathscr{D}}(\boldsymbol{r},t)$，以及磁场 $\boldsymbol{\mathscr{B}}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\boldsymbol{\mathscr{H}}(\boldsymbol{r},t)$ 描述. 其中 $\boldsymbol{\mathscr{D}}$、$\boldsymbol{\mathscr{H}}$ 与 $\boldsymbol{\mathscr{E}}$、$\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 由(1.74)联系，$\rho(\boldsymbol{r},t)$ 与 $\mathscr{P}(\boldsymbol{r},t)$ 由物态方程联系. 它们之间还要满足连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{6.123}$$

欧拉方程

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla \boldsymbol{v}\right)=-\nabla\mathscr{P}+\boldsymbol{j}\times\mathscr{B}+\boldsymbol{f}, \tag{6.124}$$

法拉第定律

$$\nabla\times\mathscr{E}=-\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial t}, \tag{6.125}$$

和安培定律

$$\nabla\times\mathscr{B}=\mu\boldsymbol{j}. \tag{6.126}$$

(6.124)右边的 $\boldsymbol{f}$ 表示流体中电磁力和压力以外的力密度,如黏力密度、万有引力密度…….(6.126)右边略去了位移电流的贡献,这是因为磁流体中电场只由磁场变化感应产生,位移电流远小于传导电流.此外,电流与电磁场间还受欧姆定律制约.在静止流体中,它可表为

$$\boldsymbol{j}=\sigma\mathscr{E}, \tag{6.127}$$

σ 为电导率,这里设为常数.对运动的流体,此式逐点在随流体运动的坐标系中成立.用 $\boldsymbol{j}'$ 和 $\mathscr{E}'$ 分别表示在此坐标系中的电流密度矢量和电场强度矢量,(6.127)即 $\boldsymbol{j}'=\sigma\mathscr{E}'$.电流密度矢量与电荷密度组成四矢量,在不同惯性系间作洛伦兹变换.不过在两个相对运动速度绝对值 $v\ll c$ 的坐标系间洛伦兹变换趋于伽利略变换.具体地说,在此条件下 $\frac{v}{c}$ 为小量.将洛伦兹变换的表达式展成 $\frac{v}{c}$ 的幂级数,保留到它的一次幂,便得到伽利略变换.经此变换,得空间固定坐标系中流体一点的电流密度矢量

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}'+\rho_e\boldsymbol{v},$$

其中 ρ_e 为该点流体的电荷密度.对磁流体取 $\rho_e=0$,故有

$$\boldsymbol{j}'=\boldsymbol{j}.$$

经电磁场洛伦兹变换(1.205)的逆变换,保留到 $\frac{v}{c}$ 的一次幂,得

$$\mathscr{E}'=\mathscr{E}+\boldsymbol{v}\times\mathscr{B},$$

$\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{B}$ 分别为空间固定坐标系中看流体内的电场强度和磁感应强度.由此二式可得空间固定坐标系中运动磁流体内的欧姆定律

$$\boldsymbol{j}=\sigma(\mathscr{E}+\boldsymbol{v}\times\mathscr{B}). \tag{6.128}$$

用(6.126)消去此式中的 $\boldsymbol{j}$,将结果写成 $\mathscr{E}$ 的表达式,代入(6.125)左边得

$$\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\mathscr{B})-\frac{1}{\mu\sigma}\nabla\times(\nabla\times\mathscr{B}). \tag{6.129}$$

还可用(6.126)消去(6.124)右边的 $\boldsymbol{j}$,得

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla \boldsymbol{v}\right)=-\nabla\mathscr{P}-\frac{1}{\mu}\mathscr{B}\times(\nabla\times\mathscr{B})+\boldsymbol{f}. \tag{6.130}$$

可见,在略去位移电流的条件下,非相对论磁流体可用密度场 $\rho(\boldsymbol{r},t)$,速度场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$,压力场 $\mathscr{P}(\boldsymbol{r},t)$ 和磁场 $\mathscr{B}(\boldsymbol{r},t)$ 描写.电流密度矢量场 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ 和电场强度

矢量场$\mathscr{E}(\boldsymbol{r},t)$可由它们表出.(6.123)、(6.130)、(6.129),连同物态方程$\mathscr{P}(\rho)$是这样定义的非相对论磁流体动力学的完备的基本方程组.(6.129)导致

$$\frac{\partial \nabla \cdot \mathscr{B}}{\partial t}=0,$$

它保证只要在某起始时刻$\nabla \cdot \mathscr{B}=0$,(1.71)恒成立.麦克斯韦方程中的(1.71)在此处可只当作起始条件使用.在此条件下,(6.129)简化为

$$\frac{\partial \mathscr{B}}{\partial t}=\nabla \times(\boldsymbol{v} \times \mathscr{B})+\frac{1}{\mu \sigma} \nabla^{2} \mathscr{B}. \tag{6.131}$$

在各种具体条件下求解磁流体动力学的基本方程组(6.123)、(6.130)和(6.131)是专业工作者的事.本书只想用很小的篇幅阐明这些方程表达的一些定性规律.在流体静止或缓慢运动的区域,$\boldsymbol{v} \approx 0$,(6.131)成为磁场的扩散方程

$$\frac{\partial \mathscr{B}}{\partial t}=D \nabla^{2} \mathscr{B}, \tag{6.132}$$

扩散系数为

$$D=\frac{1}{\mu \sigma}. \tag{6.133}$$

扩散方程(6.132)有基本解

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{r}, t)=\frac{\mathscr{B}_{0}}{(4 \pi D t)^{3 / 2}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{0}\right)^{2}}{4 D t}}, \tag{6.134}$$

它表示 $t=0$ 时只在 $\boldsymbol{r}_0$ 处存在的磁场到 t 时刻扩散成了一宽度为

$$2 \sqrt{D t}=2 \sqrt{\frac{t}{\mu \sigma}} \tag{6.135}$$

的高斯分布.由基本解(6.134)可得(6.132)的通解

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{r}, t)=\frac{1}{(4 \pi D t)^{3 / 2}} \int \mathrm{e}^{-\frac{\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{0}\right)^{2}}{4 D t}} \mathscr{B}\left(\boldsymbol{r}_{0}, 0\right) \mathrm{d} \mathscr{V}, \tag{6.136}$$

对 $\boldsymbol{r}_0$ 的体积分在整个磁流体中进行.(6.136)满足方程(6.132)并符合任意给定的起始条件

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathscr{B}(\boldsymbol{r}, t)=\mathscr{B}(\boldsymbol{r}, 0). \tag{6.137}$$

它表明在此情形中磁场分布随时间的变化是各点磁场扩散的结果.这种现象称为磁扩散.

在许多情形中,磁流体是非常好的良导体,电阻几乎是零,电导率几乎是无穷大.在这种情况下,(6.131)右边第二项可以忽略,从而

$$\frac{\partial \mathscr{B}}{\partial t}=\nabla \times(\boldsymbol{v} \times \mathscr{B}). \tag{6.138}$$

考虑一闭合回路 Γ 包围的面上的磁通量.由于$\nabla \cdot \mathscr{B}=0$,磁通量只和包围它的回路 Γ 有关,而与究竟取以 Γ 为边界的哪个面无关.于是可将它记为

$$\Phi_\Gamma = \int_{s_\Gamma} \mathscr{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

s_Γ 为以 Γ 为周界的一个面.随着时间的推移,面 s_Γ 上的磁感应强度会变,周界 Γ 本身也会因其中流点的移动而变.这两方面的变化都会引起 Φ_Γ 随时间的变化,变化的全微分为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Phi_\Gamma &= \int_{s_\Gamma} \mathrm{d}\mathscr{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_\Gamma \mathscr{B} \cdot (\boldsymbol{v}\mathrm{d}t \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}) \\ &= \left[\int_{s_\Gamma} \frac{\partial \mathscr{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_\Gamma (\mathscr{B} \times \boldsymbol{v}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \right] \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

对方括号内第二项用斯托克斯定理,得 Φ_Γ 对时间的全微商

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_\Gamma}{\mathrm{d}t} = \int_{s_\Gamma} \left[\frac{\partial \mathscr{B}}{\partial t} - \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \mathscr{B}) \right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0, \tag{6.139}$$

最后等号处用了方程(6.138).可见,由一串流点组成的闭合回路包围的曲面上磁通量不随时间变化.这使人们回想起经典力学中关于普通流体的一条规律,即速度环量守恒.这条规律又可表述为:由一串流点组成的闭合回路包围的曲面上,涡通量不随时间变化.(6.139)成立的前提是,磁流体为理想导体,其中电导率可视为无穷大,或电阻可视为零.它所表现的规律可形象地说成是磁通量冻结在流点围成的曲面内,称为磁冻结.

设磁流体只受压力和电磁力的作用,$\boldsymbol{f}=0$,(6.130)成为

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}\right) = -\nabla\mathscr{P} - \frac{1}{\mu} \mathscr{B} \times (\nabla \times \mathscr{B}). \tag{6.140}$$

考虑此式与连续性方程(6.123)和磁场方程(6.138)组成的完备方程组.这组方程有平衡解 $\boldsymbol{v} = 0, \rho = \rho_0, \mathscr{P} = \mathscr{P}_0 = \mathscr{P}(\rho_0), \mathscr{B} = \mathscr{B}_0$,为与时间和空间坐标无关的常数,常矢量.流体的压力 $\mathscr{P}_0$ 由边界条件的约束反作用力平衡,整个流体是均匀静止的.设有扰动打破这种平衡,使

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{r}, t), \\ \rho &= \rho_0 + \rho_1(\boldsymbol{r}, t), \\ \mathscr{P} &= \mathscr{P}_0 + \mathscr{P}_1(\boldsymbol{r}, t) = \mathscr{P}_0 + s^2 \rho_1(\boldsymbol{r}, t), \\ \mathscr{B} &= \mathscr{B}_0 + \mathscr{B}_1(\boldsymbol{r}, t), \end{aligned}\right\} \tag{6.141}$$

其中 $\boldsymbol{v}_1$、ρ_1、$\mathscr{P}_1$ 和 $\mathscr{B}_1$ 为小量,

$$s = \sqrt{\left.\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_0}} \tag{6.142}$$

为流体中的声速.代入上列完备方程组,精确到小量的一次幂得

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho_1}{\partial t}+\rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v}_1=0, \\
&\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t}+s^2 \nabla \rho_1+\frac{1}{\mu} \mathscr{B}_0 \times(\nabla \times \mathscr{B}_1)=0, \\
&\frac{\partial \mathscr{B}_1}{\partial t}-\nabla \times(\boldsymbol{v}_1 \times \mathscr{B}_0)=0 .
\end{aligned}\right\} \tag{6.143}
$$

将平衡态中诸量 ρ_0、$\mathscr{P}_0$ 和$\mathscr{B}_0$ 当作已知的,(6.143)便是未知量 ρ_1、$\boldsymbol{v}_1$ 和$\mathscr{B}_1$ 的线性方程组,原来的完备方程组被线性化了.将其中第二方程对时间求微商,再用一、三两方程消去其中的 ρ_1 和$\mathscr{B}_1$,得

$$
\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_1}{\partial t^2}-s^2 \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_1)+\boldsymbol{v}_A \times\{\nabla \times[\nabla \times(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_A)]\}=0, \tag{6.144}
$$

其中

$$
\boldsymbol{v}_A=\frac{\mathscr{B}_0}{\sqrt{\mu \rho_0}} \tag{6.145}
$$

称为阿尔文①速度.(6.144)有波动解.设

$$
\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{r}, t)=\widetilde{\boldsymbol{v}}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}-\omega t)}, \tag{6.146}
$$

$\widetilde{\boldsymbol{v}}_1$为振幅,与时间和空间位置无关.代入(6.144)得 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_1$的线性代数方程

$$
\begin{aligned}
-\omega^2 \widetilde{\boldsymbol{v}}_1+(s^2+v_A^2)(\boldsymbol{k} \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_1) \boldsymbol{k}+\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{k}[(\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{k}) \widetilde{\boldsymbol{v}}_1 \\
-(\boldsymbol{v}_A \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_1) \boldsymbol{k}-(\boldsymbol{k} \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_1) \boldsymbol{v}_A]=0 .
\end{aligned} \tag{6.147}
$$

这是张量

$$
\boldsymbol{M} \equiv(\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{k})^2-(\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{k})(\boldsymbol{k} \boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_A \boldsymbol{k})+(s^2+v_A^2) \boldsymbol{k} \boldsymbol{k} \tag{6.148}
$$

的本征方程

$$
\boldsymbol{M} \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_1=\omega^2 \widetilde{\boldsymbol{v}}_1 . \tag{6.149}
$$

取定一个坐标系后张量 $\boldsymbol{M}$ 可表成一三阶矩阵.三阶矩阵的本征方程可解析地解出,(6.149)的本征值 ω^2 和本征矢 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_1$可表成 s、v_A 和$\boldsymbol{k}$ 的初等函数.下面看一些特例.

设 $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{v}_A$,即考虑垂直于$\boldsymbol{v}_A$ 方向传播的波.(6.147)末项为零,成为

$$
\omega^2 \widetilde{\boldsymbol{v}}_1-(s^2+v_A^2)(\boldsymbol{k} \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_1) \boldsymbol{k}=0, \tag{6.150}
$$

可见 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_1 /\!/ \boldsymbol{k}$,只有纵波解.在 $\boldsymbol{k}$ 方向上此式给出色散关系

$$
\omega^2=u_l^2 k^2, \tag{6.151}
$$

其中

$$
u_l=\sqrt{s^2+v_A^2} \tag{6.152}
$$

是这种纵波的相速度.

---

① Alfvén.

设 $\boldsymbol{k} // \boldsymbol{v}_A$，即考虑沿 $\boldsymbol{v}_A$ 方向传播的波.(6.147)成为

$$(k^2 v_A^2 - \omega^2)\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_1 + \left(\frac{s^2}{v_A^2} - 1\right) k^2 (\boldsymbol{v}_A \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_1)\,\boldsymbol{v}_A = 0. \tag{6.153}$$

若 $\boldsymbol{v}_A \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_1 \neq 0$，则 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_1 // \boldsymbol{v}_A$，因此 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_1 // \boldsymbol{k}$，得纵波解.在此情形下，(6.153)给出色散关系

$$k^2 s^2 - \omega^2 = 0, \tag{6.154}$$

表明此纵波沿 $\boldsymbol{v}_A$ 方向以相速 s 传播.此相速即普通声波的声速.若取 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_1 \perp \boldsymbol{v}_A$，(6.153)左边第二项为零，第一项给出色散关系

$$k^2 v_A^2 - \omega^2 = 0. \tag{6.155}$$

这是沿 $\boldsymbol{v}_A$ 方向以相速 v_A 传播的横波.此横波的相速即是阿尔文速度.

设伴随速度波(6.146)的密度波和磁波分别为

$$\left.\begin{aligned} \rho_1(\boldsymbol{r}, t) &= \widetilde{\rho}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}, \\ \mathscr{B}_1(\boldsymbol{r}, t) &= \widetilde{\mathscr{B}}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}. \end{aligned}\right\} \tag{6.156}$$

将它们与(6.146)一起，代入(6.143)的第一、三两式，分别得

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{\rho}_1 &= \frac{\rho_0}{\omega}\boldsymbol{k} \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_1, \\ \widetilde{\mathscr{B}}_1 &= \frac{\boldsymbol{k}}{\omega} \times (\mathscr{B}_0 \times \widetilde{\boldsymbol{v}}_1) = \frac{1}{\omega}[(\boldsymbol{k} \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_1)\mathscr{B}_0 - (\boldsymbol{k} \cdot \mathscr{B}_0)\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_1]. \end{aligned}\right\} \tag{6.157}$$

对垂直于 $\mathscr{B}_0$ 方向传播的纵波，$\widetilde{\rho}_1 \neq 0$，即伴随有密度波.这种疏密波即声波.在此情形中

$$\widetilde{\mathscr{B}}_1 = \frac{\boldsymbol{k} \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_1}{\omega}\mathscr{B}_0, \tag{6.158}$$

磁波振幅非零.不过这种磁波中磁感应强度的方向不变，恒沿 $\mathscr{B}_0$ 方向，只有磁感应强度的值在 $\mathscr{B}_0$ 附近振动.如果形象地用磁力线密度来表示磁感应强度的大小，这种磁波是垂直于磁力线方向传播的磁力线的疏密波.既有声波也有磁波的磁流体动力波称为磁声波.

对沿 $\mathscr{B}_0$ 方向传播的纵波，$\widetilde{\rho}_1 \neq 0$，然而(6.157)的第二式表明 $\widetilde{\mathscr{B}}_1 = 0$.即在此情形中没有磁波，只有声波.这是一种纯粹的声波，磁场 $\mathscr{B}_0$ 只是它的一个背景.怪不得它以声速 s 传播.对沿 $\mathscr{B}_0$ 方向传播的横波，$\widetilde{\rho}_1 = 0$，即无声波.而

$$\widetilde{\mathscr{B}}_1 = -\frac{k\mathscr{B}_0}{\omega}\widetilde{\boldsymbol{v}}_1 \tag{6.159}$$

表明磁感应强度在垂直于 $\mathscr{B}_0$ 的方向振动.这是一种纯粹的磁波，以阿尔文速度 v_A 传播.含磁波的磁流体动力波称为阿尔文波.

§6.7 磁流体静力学，磁压力与磁箍缩

磁流体静力学研究磁流体中各量均不随时间变化的条件.由完备方程组

(6.123)、(6.140)和(6.138)知，此条件应是$\boldsymbol{v}=0$和

$$\nabla \mathscr{P}+\frac{1}{\mu}\boldsymbol{\mathscr{B}}\times(\nabla\times\boldsymbol{\mathscr{B}})=0. \tag{6.160}$$

由矢量运算和微分运算可得恒等式

$$\boldsymbol{\mathscr{B}}\times(\nabla\times\boldsymbol{\mathscr{B}})=\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{\mathscr{B}}\cdot\boldsymbol{\mathscr{B}})-(\boldsymbol{\mathscr{B}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\mathscr{B}}. \tag{6.161}$$

代入(6.160)得

$$\nabla(\mathscr{P}+\mathscr{P}_{\mathrm{m}})-\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{\mathscr{B}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\mathscr{B}}=0. \tag{6.162}$$

其中

$$\mathscr{P}_{\mathrm{m}}\equiv\frac{\mathscr{B}^2}{2\mu} \tag{6.163}$$

称为磁压力.在$\boldsymbol{v}=0$的前提下，磁流体的平衡条件即(6.162).

考虑一柱对称磁流体处于平衡状态的可能性.流体中处处流动速度$\boldsymbol{v}=0$，但可有恒定电流沿对称轴z的方向流动.设磁流体还有沿z方向的平移对称.这使垂直于z轴的每一横截面上有相同的电流分布、磁场分布和压力分布.在横截面上取极坐标r、θ，在z方向上取z坐标，r、θ和z组成柱坐标.电流密度矢量平行于z方向，且值只与r有关，而与θ、z无关，从而有$\boldsymbol{j}=j(r)\boldsymbol{z}_0$，$\boldsymbol{z}_0$为$z$方向的单位矢量.按安培定律，在此条件下磁场必环绕$z$方向，$\boldsymbol{\mathscr{B}}=\mathscr{B}(r)\boldsymbol{\theta}_0$，$\boldsymbol{\theta}_0$为垂直于$z$方向和$r$方向并指向$\theta$增加方向的单位矢量，且

$$\mathscr{B}(r)=\frac{\mu I(r)}{2\pi r}, \tag{6.164}$$

其中

$$I(r)=2\pi\int_0^r j(r')r'\mathrm{d}r' \tag{6.165}$$

为半径为r的圆柱内的电流强度.将此处的磁感应强度代入(6.161)，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathscr{B}}\times(\nabla\times\boldsymbol{\mathscr{B}})&=\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathscr{B}^2(r)+\frac{\mathscr{B}^2(r)}{r}\right]\boldsymbol{r}_0\\&=\frac{\boldsymbol{r}_0}{2r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\mathscr{B}^2),\end{aligned} \tag{6.166}$$

$\boldsymbol{r}_0$为r方向的单位矢量.将此结果再代入(6.160)得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{2\mu r^2}\frac{\mathrm{d}r^2\mathscr{B}^2}{\mathrm{d}r}=0. \tag{6.167}$$

将此式积分得

$$\mathscr{P}(r)=\mathscr{P}_0-\frac{1}{2\mu}\int_0^r\frac{1}{r'^2}\frac{\mathrm{d}r'^2\mathscr{B}^2(r')}{\mathrm{d}r'}\mathrm{d}r', \tag{6.168}$$

其中$\mathscr{P}_0=\mathscr{P}(0)$为$r=0$处的压力，即磁流体中心轴上的压力.设在距中心轴$R$处磁流体压力下降至零，则其中带电粒子不会横向逃逸，能形成一被箍缩的磁流体

柱.将 $\mathscr{P}(R)=0$ 代入(6.168)得

$$\mathscr{P}_0 = \frac{1}{2\mu}\int_0^R \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r^2\mathscr{B}^2}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r, \tag{6.169}$$

$$\mathscr{P}(r) = \frac{1}{2\mu}\int_r^R \frac{1}{r'^2}\frac{\mathrm{d}r'^2\mathscr{B}^2(r')}{\mathrm{d}r'}\mathrm{d}r'. \tag{6.170}$$

可以计算磁流体内的平均压力

$$\overline{\mathscr{P}} = \frac{2\pi}{\pi R^2}\int_0^R \mathscr{P}(r)r\mathrm{d}r = \frac{1}{R^2}\int_0^{R^2}\mathscr{P}(r)\mathrm{d}r^2.$$

作部分积分,由于 $\mathscr{P}(R)=0$ 和 $\mathscr{P}(0)$有限,积出部分为零.再由(6.170)得

$$\overline{\mathscr{P}} = \frac{1}{2\mu R^2}\int_0^R \frac{\mathrm{d}r^2\mathscr{B}^2}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r = \frac{\mathscr{B}^2(R)}{2\mu} = \mathscr{P}_m(R). \tag{6.171}$$

用(6.164)又可将此式写为

$$\overline{\mathscr{P}} = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 R^2}, \tag{6.172}$$

其中 $I=I(R)$为磁流体中的电流强度.

可见,磁流体中电流产生的磁场能将磁流体箍缩在一局部空间内,令其表面压力为零,以使其内物质不致逃逸.这种效应称为磁箍缩.被箍缩的磁流体内却能维持一定压力.(6.171)表明,只要磁流体内电流足够大,在表面维持足够强的磁场,形成足够高的磁压力,就能使磁流体内的平均压力足够高.用真空磁导率

$$\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\mathrm{H/m}$$

代替(6.164)和(6.171)中的 μ,这是很接近实际的.由此可估计,例如在 1m 半径的圆柱体内 10^7A 的电流可在圆柱表面产生 $2\mathrm{T}=2\times 10^4\mathrm{G}$ 的磁场,形成 15.7atm 的磁压.这使圆柱内磁流体的平均压力达 15.7 个大气压,而表面压力却为零.这样高压力的等离子体可用来实现受控热核反应.

当然,上面分析的只是一个理想的理论模型.一束轴对称并沿对称轴平移对称的磁流体是无限长的.而人们只能实现空间上有限的装置.有两种办法将上述磁流体有限化.一是将有限长的圆柱弯曲,首尾相连,成为圆柱环.另一是在有限长直圆柱两端逐渐增强磁场.按经典力学的绝热不变性,这会在两端形成磁塞,阻止带电粒子沿纵向逃逸.实际上,有限尺寸的问题是不难解决的.除此之外还有许多其他问题,例如被箍缩的磁流体的稳定性问题.实现受控热核反应除需要高压外还需要高温.因此还有如何产生和维持高温的问题.虽然问题不少,但并没有看到任何不可逾越的障碍.通过对等离子体实行磁箍缩和磁囚禁实现受控热核反应,仍是当前人类科技活动的一个主攻方向.

§6.8 等离子体振荡与等离子体波

考虑等离子体在较小的时空范围内的运动,时间间隔比粒子两次碰撞间的平

均时间短，空间距离比粒子的平均自由程短．对这种现象而言，等离子体的每一小局部都来不及达到平衡，也来不及达到电中性．因此，等离子体的全体虽是电中性的，它的各局部却不一定电中性，电荷密度并非处处为零．在短时间内发生的可观现象必由快过程产生．正离子由于大质量，通常来不及响应．主要由电子运动伴随．作为一种理论模型，可设正离子只构成一正电荷背景，等离子体的运动表现为其中电子流体的流动．设平衡条件下电子数密度为 ρ_0，这也便是正电荷数密度．等离子体内正负电荷密度分别为 $\pm e\rho_0$，彼此处处中和．在一般条件下电子数密度为

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\rho_0+\rho_1(\boldsymbol{r},t), \tag{6.173}$$

等离子体内出现电荷密度 $-e\rho_1$．电子流体由密度场 $\rho(\boldsymbol{r},t)$、速度场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ 和压力场 $\mathscr{P}(\boldsymbol{r},t)$ 描写，满足连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0, \tag{6.174}$$

欧拉方程

$$\rho m\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right]=-\nabla\mathscr{P}-e\rho(\mathscr{E}+\boldsymbol{v}\times\mathscr{B}), \tag{6.175}$$

和物态方程 $\mathscr{P}(\rho)$，m 为电子的质量．设等离子体足够稀薄，可用真空中的麦克斯韦方程

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\mathscr{E}=-\frac{e}{\epsilon_0}\rho_1, &&\nabla\cdot\mathscr{B}=0,\\ &\nabla\times\mathscr{E}+\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial t}=0, &&\nabla\times\mathscr{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}=-\mu_0 e\rho\boldsymbol{v}.\end{aligned}\right\} \tag{6.176}$$

在平衡条件下，$\rho_1=0$，$\boldsymbol{v}=\mathscr{E}=\mathscr{B}=0$．相对于平衡的小偏离中，这些均应是小量．到这些小量的一次幂，(6.174)和(6.175)成为

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0, \tag{6.177}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{w^2}{\rho_0}\nabla\rho_1+\frac{e}{m}\mathscr{E}=0, \tag{6.178}$$

其中

$$w=\sqrt{\frac{1}{m}\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=\rho_0}}, \tag{6.179}$$

(6.176)的末式可写成

$$\nabla\times\mathscr{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}=-\mu_0 e\rho_0\boldsymbol{v}. \tag{6.180}$$

求这组方程的波动解，设其中各动力学变量 $Q(\boldsymbol{r},t)$ 均可写成

$$Q=\widetilde{Q}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \tag{6.181}$$

$\widetilde{Q}$ 为 Q 的振幅，与时空坐标无关．代入(6.176)～(6.178)得

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\mathscr{E}} = -\frac{e}{\epsilon_0}\tilde{\rho}_1, \qquad \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\mathscr{B}} = 0, \\ &\boldsymbol{k}\times\tilde{\mathscr{E}} = \omega\tilde{\mathscr{B}}, \qquad \mathrm{i}\left(\boldsymbol{k}\times\tilde{\mathscr{B}} + \frac{\omega}{c^2}\tilde{\mathscr{E}}\right) = -\mu_0 e\rho_0\tilde{\boldsymbol{v}}, \end{aligned}\right\} \tag{6.182}$$

$$\tilde{\rho}_1 = \frac{\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}}{\omega}\rho_0, \tag{6.183}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \frac{w^2\boldsymbol{k}}{\rho_0\omega}\tilde{\rho}_1 - \mathrm{i}\frac{e}{m\omega}\tilde{\mathscr{E}}. \tag{6.184}$$

用(6.182)的第三式消去其中第四式中的$\tilde{\mathscr{B}}$,得

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = -\mathrm{i}\frac{e}{m\omega}\frac{1}{\omega_p^2}[(\omega^2 - c^2k^2)\tilde{\mathscr{E}} + c^2(\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\mathscr{E}})\boldsymbol{k}], \tag{6.185}$$

其中

$$\omega_p = \sqrt{\frac{\rho_0 e^2}{\epsilon_0 m}} \tag{6.186}$$

称为等离子体频率.用(6.182)的第一式消去(6.184)右边的$\tilde{\rho}_1$得

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = -\mathrm{i}\frac{e}{m\omega}\left[\left(\frac{w}{\omega_p}\right)^2(\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\mathscr{E}})\boldsymbol{k} + \tilde{\mathscr{E}}\right]. \tag{6.187}$$

将此式与(6.185)比较知

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2k^2)\tilde{\mathscr{E}} + (c^2 - w^2)(\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\mathscr{E}})\boldsymbol{k} = 0. \tag{6.188}$$

这是张量

$$\boldsymbol{M} \equiv (w^2 - c^2)\boldsymbol{kk} + \omega_p^2 + c^2k^2 \tag{6.189}$$

的本征方程

$$\boldsymbol{M}\cdot\tilde{\mathscr{E}} = \omega^2\tilde{\mathscr{E}}. \tag{6.190}$$

作分解

$$\tilde{\mathscr{E}} = \widetilde{\mathscr{E}_{/\!/}} + \widetilde{\mathscr{E}_{\perp}}, \tag{6.191}$$

其中

$$\widetilde{\mathscr{E}_{/\!/}} = \frac{\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\mathscr{E}}}{k^2}\boldsymbol{k} \tag{6.192}$$

为$\tilde{\mathscr{E}}$ 的纵分量,即与传播方向平行的分量.$\widetilde{\mathscr{E}_{\perp}}$由(6.191)定义,为$\tilde{\mathscr{E}}$的横分量,即与传播方向垂直的分量.此二分量线性无关,因此(6.188)可分解为两个独立的方程

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2k^2)\widetilde{\mathscr{E}_{\perp}} = 0, \tag{6.193}$$

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - w^2k^2)\widetilde{\mathscr{E}_{/\!/}} = 0. \tag{6.194}$$

由于 $w \neq c$,如果

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2, \tag{6.195}$$

则$\widetilde{\mathscr{E}_{/\!/}}=0$，只可能有非零的横电场.在此情形下

$$\boldsymbol{k}\cdot\widetilde{\mathscr{E}}=\boldsymbol{k}\cdot\widetilde{\mathscr{E}_{\perp}}=0.$$

由(6.182)的第一式知$\widetilde{\rho_1}=0$，即等离子体内的电荷密度处处为零，其中的电场完全由磁场变化感应产生.再由(6.184)知

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}=-\mathrm{i}\frac{e}{m\omega}\widetilde{\mathscr{E}_{\perp}},\tag{6.196}$$

由(6.182)第三式得

$$\widetilde{\mathscr{B}}=\frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\times\widetilde{\mathscr{E}_{\perp}}.\tag{6.197}$$

可见在此条件下的等离子体波乃是一种电磁波，只是由于与等离子体的作用，这种电磁波的色散关系变成了(6.195).

如果

$$\omega^2=\omega_p^2+w^2k^2,\tag{6.198}$$

则$\widetilde{\mathscr{E}_{\perp}}=0$，只可能有非零的纵电场.在此情形下

$$\boldsymbol{k}\times\widetilde{\mathscr{E}}=\boldsymbol{k}\times\widetilde{\mathscr{E}_{/\!/}}=0.$$

由(6.182)的第三式知$\widetilde{\mathscr{B}}=0$，即等离子体内磁场处处为零，其中电场完全由电荷产生.再由(6.182)的第一式得

$$\widetilde{\rho_1}=-\mathrm{i}\frac{\epsilon_0}{e}\boldsymbol{k}\cdot\widetilde{\mathscr{E}_{/\!/}},\tag{6.199}$$

由(6.187)和(6.198)得

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}=-\mathrm{i}\frac{e\omega}{m\omega_p^2}\widetilde{\mathscr{E}_{/\!/}}.\tag{6.200}$$

可见在此条件下的等离子体波乃是一种电子密度波，伴随有纵电场波.

考虑长波极限，在此极限下 $k\to0$.从(6.193)和(6.194)看出，如 k^2 可略，上面两种情形的等离子体波都趋于角频率为 ω_p 的振荡.这就是称 ω_p 为等离子体频率的原因.

如果在等离子体中加一背景磁场$\mathscr{B}_0$，磁感应强度变为$\mathscr{B}_0+\mathscr{B}$，相对背景磁场的偏离仍设为小量，则线性化方程(6.176)的前三式、(6.180)和(6.177)均不变，只有(6.178)要改为

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{w^2}{\rho_0}\nabla\rho_1+\frac{e}{m}(\mathscr{E}+\boldsymbol{v}\times\mathscr{B}_0)=0.\tag{6.201}$$

仍可求这组线性方程的波动解(6.181).将波动解代入这组线性方程后便得到振幅$\widetilde{\rho_1}$、$\widetilde{\boldsymbol{v}}$、$\widetilde{\mathscr{E}}$和$\widetilde{\mathscr{B}}$的线性齐次代数方程组.要求它有非零解，即要求这个方程组的系数行列式为零，便可得 ω 与 k 之间的色散关系和相应的波动解.只是在一般情况下，由于各种波之间的耦合，系数行列式的阶可能较高，将它置零得到的 ω 的代数方

程的次数也就较高.这便增加了求解的困难.当然困难只是技术性的.求解这类问题没有原则困难.

习　题　六

1. 直接用§4.6中的公式,通过计算加速度求一个带电简谐振子单位时间内的辐射强度和角分布.

2. 用公式(6.13)计算一带电简谐振子单位时间内的辐射强度、角分布和谱分解.

3. 直接用§4.6中的公式,通过计算加速度求同步辐射的强度与角分布.

4. 设一带电粒子沿直线作周期运动,计算它单位时间内的辐射强度、角分布与谱分解.

5. 设一带电粒子沿直线作双周期运动,轨道方程为两个具不同周期的周期函数的叠加.求它单位时间内的辐射强度、角分布与谱分解.

6. 设带电粒子作平面周期运动,求它单位时间内的辐射强度、角分布与谱分解.

7. 设带电粒子在互相垂直的两个方向上作不同周期的周期运动,求它在单位时间内的辐射强度、角分布与谱分解.

8. 设带电粒子在三维空间作周期运动,求单位时间内的辐射强度、角分布与谱分解.

9. 设上题中粒子在三个维度上运动的周期不同,求单位时间内的辐射强度、角分布与谱分解.

10. 设带电粒子作螺旋运动(摆动),在互相垂直的三个方向上的轨道方程分别为

$$x = x_0\cos\omega t,\quad y = y_0\sin\omega t,\quad z = vt,$$

计算它在单位时间内的辐射强度、角分布与谱分解.

11. 设伴随上述螺旋摆动带电粒子,有 xy 平面内圆偏振的电磁波沿 z 方向前进.问它被螺旋摆动带电粒子束放大的条件.试推导它的增益公式.

12. 一般地写出张量(6.148)的矩阵表示,求解它的本征方程,以求得磁流体动力波及其色散关系.藉此一般地讨论磁流体动力波的各种具体情形.

13. 在§6.7讨论的磁箍缩问题中加入一 z 方向磁场 $\mathscr{B}_z(r)\mathbf{z}_0$,重新推导平衡磁流体内的压力分布.

14. 试论证:由于磁冻结效应,绝热(极缓慢)地增加磁流体柱中 z 方向的磁感应强度 $\mathscr{B}_z(r)$,可压缩柱的半径 R.

15. 在(6.201)中设$\mathscr{B}_0\neq 0$,写出等离子体波方程和相应的色散关系,讨论它有简单解的条件.

第二篇　引力场论与几何动力学

除电磁场外,日常遇到的场便是引力场.点电荷产生的电场表现为对另一点电荷作用的电力,力的大小与两点电荷的距离平方成反比,是平方反比力.质点产生的引力场表现为对另一质点的引力,力的大小也与两质点的距离平方成反比,也是平方反比力.在人们从静电场和恒定磁场进一步了解了电磁场在时空中传播的动力学,发展了电动力学以后,自然会想到要从静引力场进一步了解引力场在时空中传播的动力学,建立引力场的动力学理论.然而两种场的相似极为有限,引力场的动力学理论是沿着一条与电动力学很不相同的道路发展的.

牛顿的万有引力定律自然是发展引力场动力学理论的出发点.它提供了任何引力理论必须符合的弱引力极限,和一个任何引力理论都必然会有的引力常数 G.然而仅此而已,除此之外新引力理论依据的惟一事实是:'引力质量与惯性质量相等'.这就是著名的等效原理.它表明一个质量足够小从而不致显著影响引力场的质点在引力场中的运动与它的质量无关,或者一般地说与这个质点本身的性质无关.质点在时空中的轨迹既与质点性质无关便只是时空的性质,即几何性质.这正与经典力学几何化的思潮吻合.不过按照相对论,时间与空间是对等的,现在要考虑的已不是经典力学中位形空间的几何性质,而是现实四维时空的几何.在没有引力场的条件下质点在四维时空中走一条直线,表明时空是平直的,由闵可夫斯基(或赝欧几里得)几何描写.引力场使质点在四维时空中的轨迹弯曲,表明时空是弯曲的,应由非闵可夫斯基(或非欧几里得)几何描写.正是沿着这一思路,爱因斯坦建立起广义相对论的引力理论.这一理论在惯性系和非惯性系中有相同的形式,因而称为广义相对论的.非惯性系中的惯性力被等同于真实的引力.

第七章　张量分析，黎曼几何与广义相对论时空，引力场方程

§7.1　四维时空的度规与测度，矢量与张量，张量密度

用 x^μ，$\mu=0,1,2,3$ 表一事件的时空坐标，对应一个时空点．两个无穷靠近的时空点间有微分时空间隔 $\mathrm{d}x^\mu$，$\mu=0,1,2,3$，可定义它们之间的距离平方

$$(\mathrm{d}s)^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu, \tag{7.1}$$

这里采用爱因斯坦求和约定．$(g_{\mu\nu})$称为这一时空在该时空点的度规张量．作坐标变换

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0,x^1,x^2,x^3), \quad \mu = 0,1,2,3. \tag{7.2}$$

微分得

$$\mathrm{d}x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\mathrm{d}x^\nu, \quad \mu = 0,1,2,3. \tag{7.3}$$

按此方式变换的一组数或数学符号$(\mathrm{d}x^\mu)$称为一反变四矢量，简称矢量．在坐标变换中的不变量称为标量．设 $\phi(x)$ 为一标量，它可与坐标有关，其中自变量 x 为 (x^0,x^1,x^2,x^3) 的缩写．在坐标变换(7.2)下有

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} = \frac{\partial\phi}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}, \quad \nu = 0,1,2,3. \tag{7.4}$$

按这种方式变换的一组数，例如$\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x^\nu}\right)$，或一组数学符号，例如$(\partial_\nu)\equiv\left(\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}\right)$，称为一协变四矢量，亦可简称矢量．由于恒等式

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} = \delta^\mu_\lambda \equiv \begin{cases}1, & 若\ \mu = \lambda,\\ 0, & 否则,\end{cases} \tag{7.5}$$

协变矢量的变换关系(7.4)又可表为

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}, \quad \mu = 0,1,2,3, \tag{7.6}$$

或

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu, \quad \mu = 0,1,2,3, \tag{7.7}$$

其中$\partial'_\mu\equiv\dfrac{\partial}{\partial x'^\mu}$．同样，由恒等式

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\lambda}{}_{\nu} = \begin{cases}1, & 若\ \lambda = \nu, \\ 0, & 否则,\end{cases} \tag{7.8}$$

可将反变矢量的变换关系(7.3)表为

$$\mathrm{d}x^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\mathrm{d}x'^{\mu}, \quad \nu = 0,1,2,3. \tag{7.9}$$

用此式可将时空点间的微分距离平方(7.1)表为

$$(\mathrm{d}s)^2 = g'_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^{\mu}\mathrm{d}x'^{\nu}, \tag{7.10}$$

其中

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu'\nu'}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^{\nu}}, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3. \tag{7.11}$$

这便是协变度规张量在不同坐标系间的变换关系,可作为一般二阶协变张量($T_{\mu\nu}$)的变换关系,后者可表为

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu'\nu'}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^{\nu}}, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3. \tag{7.12}$$

($g_{\mu\nu}$)作为一对称矩阵可以对角化.要求每一坐标的非零间隔都对应一非零时空距离,对($g_{\mu\nu}$)为对角矩阵的坐标系这就要求每一对角元都非零.矩阵的行列式 g 在此情形中为对角元的积,因而非零.在坐标变换中出现的$\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right)$和$\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)$都可以 μ 为行指标 ν 为列指标排成矩阵,将此二矩阵的行列式分别记为$\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|$和$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|$,它们是相应坐标变换的雅可比①.要求坐标变换中互相变换的两坐标系是一一对应的,因而存在逆变换,雅可比非零.将(7.11)看作矩阵关系,右边为三个矩阵的积.取此式两边矩阵的行列式得

$$g' = g\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^2. \tag{7.13}$$

可见 g 的值虽与所选坐标有关,但 g 是否为零却与坐标的选择无关.既然在($g_{\mu\nu}$)为对角矩阵的坐标系中 g 非零,在任一坐标系中它便都不是零.要求 g 是时空点的连续函数.由于在每一时空点上它都不能为零,在整个时空中它便只能取同一种符号,或恒正,或恒负.g 既非零,($g_{\mu\nu}$)必有逆矩阵,将它记为($g^{\mu\nu}$),

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}{}_{\lambda}. \tag{7.14}$$

由(7.8),(7.14)和(7.5)知

$$\begin{aligned}g^{\mu'\nu'}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}g_{\nu''\lambda'}\frac{\partial x^{\nu''}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x'^{\lambda}} &= g^{\mu'\nu'}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}g_{\nu'\lambda'}\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x'^{\lambda}} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x'^{\lambda}} = \delta^{\mu}{}_{\lambda}.\end{aligned}$$

---

① Jacobi.

可见变换

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} g^{\mu'\nu'} \tag{7.15}$$

使 $g'^{\mu\nu}g'_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}{}_{\lambda}$,保证关系(7.14)在坐标变换中不变.($g^{\mu\nu}$)称为反变度规张量.一般地称按

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} T^{\mu'\nu'} \tag{7.16}$$

变换的量($T^{\mu\nu}$)为二阶反变张量.

若一个有 m 个上标和 n 个下标的量($T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}$)在坐标变换中按

$$T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\mu_1'}} \frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\mu_2'}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\mu_m'}} T^{\mu_1'\mu_2'\cdots\mu_m'}_{\nu_1'\nu_2'\cdots\nu_n'} \frac{\partial x^{\nu_1'}}{\partial x'^{\nu_1}} \frac{\partial x^{\nu_2'}}{\partial x'^{\nu_2}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_n'}}{\partial x'^{\nu_n}} \tag{7.17}$$

变换则称为 m 阶反变 n 阶协变张量,简称 $m+n$ 阶张量.坐标变换中的不变量称为标量,可当作零阶张量.一阶张量简称矢量,二阶张量简称张量.(7.17)表明,将一个 m_1 阶反变 n_1 阶协变张量的各分量和一个 m_2 阶反变 n_2 阶协变张量的各分量相乘(直乘)得到的 $4^{m_1+m_2+n_1+n_2}$ 个分量组成一 m_1+m_2 阶反变 n_1+n_2 阶协变张量.而由(7.8)知,若令张量的一个上标和一个下标取值相同,并将张量对这一对取值相同的上下标从 0 到 3 求和,便会得到一个新张量,它的反变和协变的阶分别比原张量少 1.具体说来,若($T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}$)是一 m 阶反变 n 阶协变张量,则($T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{m-1}\lambda}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{n-1}\lambda}$)是一 $m-1$ 阶反变 $n-1$ 阶协变张量,称为原张量的收缩.由这些性质可用一个张量来上提或下放另一张量的标号.特别用度规张量上提或下放标号得到的张量还认为是原来的张量,只是将一个下标改成了上标或将一个上标改成了下标.例如

$$\left.\begin{aligned} g^{\mu\nu} T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{n-1}\nu} &= T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m\mu}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{n-1}}, \\ g_{\mu\nu} T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{m-1}\mu}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} &= T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{m-1}}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{7.18}$$

(7.14)则表明

$$g^{\mu}{}_{\lambda} = \delta^{\mu}{}_{\lambda}. \tag{7.19}$$

既含上标又含下标的张量称混合张量,此式表明($\delta^{\mu}{}_{\lambda}$)是一混合二阶张量,且就是混合度规张量.

(7.13)表明伴随坐标变换还有另一种形式的变换,即乘以雅可比 $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|$ 的若干次幂.若量($\mathscr{T}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}$)在从 x 到 x' 的坐标变换中按

$$\mathscr{T}'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{w} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\mu_1'}} \frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\mu_2'}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\mu_m'}} \mathscr{T}^{\mu_1'\mu_2'\cdots\mu_m'}_{\nu_1'\nu_2'\cdots\nu_n'} \frac{\partial x^{\nu_1'}}{\partial x'^{\nu_1}} \frac{\partial x^{\nu_2'}}{\partial x'^{\nu_2}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_n'}}{\partial x'^{\nu_n}} \tag{7.20}$$

变换便称为权为 w 的 m 阶反变 n 阶协变张量密度.(7.13)表示

$$g' = g\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-2}, \tag{7.21}$$

g 为权为 -2 的标量密度.定义

$$\mathrm{d}^4x \equiv \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3, \tag{7.22}$$

在坐标变换中它按

$$\mathrm{d}^4x' = \left\|\frac{\partial x'}{\partial x}\right\|\mathrm{d}^4x \tag{7.23}$$

变换,$\left\|\frac{\partial x'}{\partial x}\right\|$ 为雅可比 $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|$ 的绝对值.此式与(7.21)一起表明 $\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}^4x$ 为坐标变换中的不变量,可作为时空元 d^4x 中点集的测度,亦即四维时空的不变体积元.

实时空坐标(x^0,x^1,x^2,x^3)到实时空坐标(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3)的变换称为实坐标变换.(7.13)表明实坐标变换不改变 g 的符号.前已证明 g 的符号在整个时空中各点都是一样的.在远离质量的真空中度规张量应趋于闵可夫斯基度规,

$$(g_{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.24}$$

$g=-1$;在整个时空中各点遂皆有 $g<0$,且这一性质与坐标系的具体选择无关.于是 $|g|=-g$,时空元 d^4x 中点集的测度,亦即四维时空的不变体积元遂为 $\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x$.在闵可夫斯基时空区域,$g=-1$,不变体积元有正确的极限 d^4x.

§7.2 矢量平移,仿射联络与协变微商,梯度、旋度和散度的一般表达式

在一般坐标变换中,矢量和张量的线性变换系数$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$或$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$与变换所在时空位置有关,一般是逐点不同的.这使不同点矢量的线性组合不再按矢量变换,从而不再是矢量;不同点张量的线性组合不再按张量变换,也不再是张量.一般说来不能直接比较不同点的矢量或不同点的张量.为了比较一点和另一点的矢量,要将此点的矢量平移到另一点,令其按另一点的矢量变换,再与那一点的矢量比较.设 $x\equiv(x^\mu)$点的协变矢量(A_μ)平移到 $x+\delta x\equiv(x^\mu+\delta x^\mu)$点后成为该点的矢量$(A_\mu+\delta A_\mu)$,且$(\delta A_\mu)$与$(A_\mu)$和$(\delta x^\mu)$间分别具线性关系.将此关系表为

$$\delta A_\mu = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}A_\lambda\delta x^\nu, \tag{7.25}$$

数组$(\Gamma^\lambda_{\mu\nu})$称为 x 点的仿射联络.将 $x+\delta x$ 点的变换系数用 x 点的变换系数表出得

$$\left.\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right|_{x+\delta x} = \left.\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right|_{x} + \left.\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\lambda}}\right|_{x}\delta x'^{\lambda}. \tag{7.26}$$

要求$(A_\mu+\delta A_\mu)$按 $x+\delta x$ 点的矢量变换,从而

$$A'_\mu + \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}A'_\lambda\delta x'^{\nu} = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x'^{\mu}} + \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\lambda}}\delta x'^{\lambda}\right)(A_{\mu'} + \Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'}A_{\lambda'}\delta x^{\nu'}).$$

将右边乘开,取到坐标微分的一次幂,并利用变换关系

$$A'_\mu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x'^{\mu}}A_{\mu'}, \quad A_{\mu'} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}A'_\mu, \tag{7.27}$$

和(7.9),得仿射联络在坐标变换中的变换关系

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} \tag{7.28}$$

这是一个非齐次变换,而不是张量的齐次线性变换.仿射联络不是张量.

标量在坐标变换中不变.这种不变性与各点的坐标变换均无关,即与标量的所在点无关.可以将标量随意地从一点移到另一点,而不需变动.若将 x 点的标量 S '平移'到 $x+\delta x$ 点后称为 $S+\delta S$,则 $\delta S=0$.反变矢量(A^μ)与协变矢量(B_μ)的标量积

$$S = A^\mu B_\mu$$

为一标量.设从 x 平移到$x+\delta x$ 后(A^μ)变为$(A^\mu+\delta A^\mu)$,(B_μ)变为$(B_\mu+\delta B_\mu)$.按(7.25)

$$\delta B_\mu = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}B_\lambda\delta x^\nu.$$

到 δx 的一次幂,S 应变为

$$A^\mu B_\mu + \delta A^\mu B_\mu + A^\mu\delta B_\mu = S + \delta A^\mu B_\mu + A^\lambda\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}B_\mu\delta x^\nu.$$

由平移中 $\delta S=0$ 得

$$(\delta A^\mu)B_\mu = -A^\lambda\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}B_\mu\delta x^\nu.$$

由(B_μ)的任意性知

$$\delta A^\mu = -\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}A^\lambda\delta x^\nu. \tag{7.29}$$

反变矢量在平移中的改变由同一仿射联络$(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})$按(7.29)表达.容易验证:只要$(A^\lambda)$和$(\delta x^\nu)$按$(x^\nu)$点的反变矢量变换,$(\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu})$按(7.28)变换,$(A^\mu+\delta A^\mu)$就按$(x^\nu+\delta x^\nu)$点的反变矢量变换.由(7.25)和(7.29)推广,可得一般张量的平移公式.将(x^μ)点的张量$(T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots})$平移到$(x^\mu+\delta x^\mu)$点,得张量$(T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}+\delta T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots})$,其中的变更

$$\begin{aligned}\delta T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots} = {}& \Gamma^{\lambda}_{\nu_1\nu'_1}T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\lambda,\nu_2,\cdots}\delta x^{\nu'_1} + \Gamma^{\lambda}_{\nu_2\nu'_2}T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\lambda,\cdots}\delta x^{\nu'_2} + \cdots \\ & - \Gamma^{\mu_1}_{\lambda\mu'_1}T^{\lambda,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}\delta x^{\mu'_1} - \Gamma^{\mu_2}_{\lambda\mu'_2}T^{\mu_1,\lambda,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}\delta x^{\mu'_2} - \cdots.\end{aligned} \tag{7.30}$$

此式虽显得复杂,却不难验证:由此定义的量$[T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}(x^\mu)+\delta T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}(x^\mu)]$确实按$(x^\mu+\delta x^\mu)$点的张量变换,即是该点的张量.

将$(x^\mu+\mathrm{d}x^\mu)$处的张量$[T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}(x^\mu+\mathrm{d}x^\mu)]$平移到$(x^\mu)$点，平移中的坐标变更为$(\delta x^\mu)=(-\mathrm{d}x^\mu)$. 将平移后得到的张量减去该张量在$(x^\mu)$点的值，取到$(\mathrm{d}x^\mu)$的一次幂，得该张量在$(x^\mu)$点的协变微分

$$\mathrm{D}T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}=\frac{\partial T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu+\Gamma^{\mu_1}_{\lambda\mu'_1}T^{\lambda,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}\mathrm{d}x^{\mu'_1}+\Gamma^{\mu_2}_{\lambda\mu'_2}T^{\mu_1,\lambda,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}\mathrm{d}x^{\mu'_2}+\cdots$$
$$-\Gamma^{\lambda}_{\nu_1\nu'_1}T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\lambda,\nu_2,\cdots}\mathrm{d}x^{\nu'_1}-\Gamma^{\lambda}_{\nu_2\nu'_2}T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\lambda,\cdots}\mathrm{d}x^{\nu'_2}-\cdots,\tag{7.31}$$

它是(x^μ)点的张量.

定义张量$T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}$在$(x^\mu)$点的协变微商

$$T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots;\mu}\equiv\frac{\partial T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}}{\partial x^\mu}$$
$$+\Gamma^{\mu_1}_{\lambda\mu}T^{\lambda,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}+\Gamma^{\mu_2}_{\lambda\mu}T^{\mu_1,\lambda,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}+\cdots$$
$$-\Gamma^{\lambda}_{\nu_1\mu}T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\lambda,\nu_2,\cdots}-\Gamma^{\lambda}_{\nu_2\mu}T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\lambda,\cdots}-\cdots,\tag{7.32}$$

可将(7.31)表为

$$\mathrm{D}T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}=T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots;\mu}\mathrm{d}x^\mu.\tag{7.33}$$

这很像通常全微分的表达式，只是用协变微商代替了通常的偏微商. 下面证明：协变微商(7.32)组成张量. 这只须证明

定理 若对任一张量$(A^{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu}_{\nu_1,\nu_2,\cdots})$,

$$S^{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu'_1,\mu'_2\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu'_1,\nu'_2\cdots}\equiv A^{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}B^{\mu'_1,\mu'_2,\cdots}_{\mu,\nu'_1,\nu'_2,\cdots}\tag{7.34}$$

均组成张量，则$B^{\mu'_1,\mu'_2,\cdots}_{\mu,\nu'_1,\nu'_2,\cdots}$也组成张量.

证 将(7.34)两边从(x^μ)坐标系变入(x'^μ)坐标系. 左边得

$$S'^{\sigma_1,\sigma_2,\cdots\sigma'_1,\sigma'_2,\cdots}_{\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho'_1,\rho'_2,\cdots}=\frac{\partial x'^{\sigma_1}}{\partial x^{\mu_1}}\frac{\partial x'^{\sigma_2}}{\partial x^{\mu_2}}\cdots\frac{\partial x'^{\sigma'_1}}{\partial x^{\mu'_1}}\frac{\partial x'^{\sigma'_2}}{\partial x^{\mu'_2}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\rho_1}}\frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x'^{\rho_2}}\cdots\frac{\partial x^{\nu'_1}}{\partial x'^{\rho'_1}}\frac{\partial x^{\nu'_2}}{\partial x'^{\rho'_2}}\cdots S^{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu'_1,\mu'_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu'_1,\nu'_2,\cdots}$$
$$=\frac{\partial x'^{\sigma_1}}{\partial x^{\mu_1}}\frac{\partial x'^{\sigma_2}}{\partial x^{\mu_2}}\cdots\frac{\partial x'^{\sigma'_1}}{\partial x^{\mu'_1}}\frac{\partial x'^{\sigma'_2}}{\partial x^{\mu'_2}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\rho_1}}\frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x'^{\rho_2}}\cdots\frac{\partial x^{\nu'_1}}{\partial x'^{\rho'_1}}\frac{\partial x^{\nu'_2}}{\partial x'^{\rho'_2}}\cdots A^{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}B^{\mu'_1,\mu'_2,\cdots}_{\mu,\nu'_1,\nu'_2,\cdots}$$
$$=A'^{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma}_{\rho_1,\rho_2,\cdots}\frac{\partial x'^{\sigma'_1}}{\partial x^{\mu'_1}}\frac{\partial x'^{\sigma'_2}}{\partial x^{\mu'_2}}\cdots\frac{\partial x^{\nu'_1}}{\partial x'^{\rho'_1}}\frac{\partial x^{\nu'_2}}{\partial x'^{\rho'_2}}\cdots\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}}B^{\mu'_1,\mu'_2,\cdots}_{\mu,\nu'_1,\nu'_2,\cdots}.\tag{7.35}$$

在末一等号处用了恒等式

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^{\mu'}}=\delta^\mu{}_{\mu'}\tag{7.36}$$

和张量$(A^{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu'}_{\nu_1,\nu_2,\cdots})$的变换性质

$$A'^{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma}_{\rho_1,\rho_2,\cdots}=\frac{\partial x'^{\sigma_1}}{\partial x^{\mu_1}}\frac{\partial x'^{\sigma_2}}{\partial x^{\mu_2}}\cdots\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\rho_1}}\frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x'^{\rho_2}}\cdots A^{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu'}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}.$$

在(x'^{μ})坐标系中,(7.34)右边为

$$A'^{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma}_{\rho_1,\rho_2,\cdots} B'^{\sigma'_1,\sigma'_2,\cdots}_{\sigma,\rho'_1,\rho'_2,\cdots}.$$

与(7.35)比较,由 $A'^{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma}_{\rho_1,\rho_2,\cdots}$取值的任意性知

$$B'^{\sigma'_1,\sigma'_2,\cdots}_{\sigma,\rho'_1,\rho'_2,\cdots} = \frac{\partial x'^{\sigma'_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \frac{\partial x'^{\sigma'_2}}{\partial x^{\mu'_2}} \cdots \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\nu'_1}}{\partial x'^{\rho'_1}} \frac{\partial x^{\nu'_2}}{\partial x'^{\rho'_2}} \cdots B^{\mu'_1,\mu'_2,\cdots}_{\mu,\nu'_1,\nu'_2,\cdots}.$$

这正是张量$(B^{\mu'_1,\mu'_2,\cdots}_{\mu,\nu'_1,\nu'_2,\cdots})$的变换规则,$B^{\mu'_1,\mu'_2,\cdots}_{\mu,\nu'_1,\nu'_2,\cdots}$确实组成张量.证毕.

同样方法也可证明:若对任一张量$(B^{\mu'_1,\mu'_2,\cdots}_{\mu,\nu'_1,\nu'_2,\cdots})$,(7.34)表达的$S^{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu'_1,\mu'_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu'_1,\nu'_2,\cdots}$均组成张量,则(7.34)右边的$A^{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}$也组成张量.

由于(7.33)的左边,即$\mathrm{D}T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}$组成张量,右边的$\mathrm{d}x^{\mu}$也组成一阶张量,按上述定理,它右边的协变微商$T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots;\mu}$也组成张量.

在(赝)欧几里得空间中,某量对各坐标微商的集合称为该量的梯度.由此推广到一般的度规空间,可称(7.32)定义的协变微商的集合为张量$(T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots})$的协变梯度,简称梯度.特别地,标量$\phi$是零阶张量,它的协变微商按(7.32)为

$$\phi_{;\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}}, \tag{7.37}$$

就是对坐标的偏微商.由(7.4)也可直接看出,标量对坐标偏微商的集合是一协变矢量,即一阶协变张量.一般度规空间中标量的梯度与普通梯度的定义一致.

由协变矢量(A_{μ})可定义

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\equiv A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} \\ &= \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - (\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})A_{\lambda}. \end{aligned} \tag{7.38}$$

它们组成一反对称二阶协变张量$(F_{\mu\nu})$,称为矢量(A_{μ})的协变旋度,简称旋度.还可定义反变矢量(A^{μ})的协度散度

$$A^{\mu}_{;\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\mu}A^{\lambda}, \tag{7.39}$$

简称散度,是一标量.

§7.3 等效原理,仿射联络的对称性及其与度规张量的关系,旋度、散度及达朗贝尔算符

上两节一般讨论了度规空间的几何,是纯数学,没有输入任何物理内容.现在

将它用于引力场论. 广义相对论的引力场论基于等效原理. **强等效原理称**[①]:

"在每一时空点可选择一坐标系,从其中看,自然规律在该点附近的表现与在无引力条件下的惯性系中的表现相同."

爱因斯坦喜欢用人们在升降机中的感受来说明这一原理. 确实,一个在均匀引力场内自由下落的升降机中,人们感受不到外面环境对他们的引力. 如果升降机本身产生的引力可以忽略不计,人们会看到升降机中的物体按无引力条件下惯性系中的物理规律运动. 例如服从牛顿第一定律:不受其他外力作用的物体,静者恒静,动者恒作等速直线运动,即作惯性运动. 地球可视为在太阳引力作用下自由下落的"升降机",以地球为参考系的人们观察不到太阳对他们和他们周围物体的引力. 月球和人造地球卫星可视为在太阳和地球引力作用下自由下落的"升降机",以其中某一卫星为参考系的人也观察不到太阳和地球对他和他周围物体的引力. 人们发现,只要将被选作参考系的那个星体的引力当外力,虽然该参考系相对太阳和地球在作加速运动,其中物体仍按惯性系的物理规律运动,而且周围星体的引力对他们说来也是不存在的. 这种现象来源于下述规律:物体的引力质量恒等于它的惯性质量. 这便是**弱等效原理**,简称**等效原理**. 弱等效原理导致上述现象的条件是所论过程中引力场在时空中是均匀的,即在参考体所占空间中是均匀的,在过程延续的时间中是恒定的. 由这种现象并不能导出强等效原理. 强等效原理是从这种现象中抽象出来的. 它假设引力场均匀的时空区域趋于一时空点时这种现象在该无穷小时空区域中仍然存在. 这种假设是否正确只能由它的推论是否与实验一致来检验. 广义相对论的结论与迄今的实验结果一致可认为是对强等效原理的证明. 其实这种抽象是建立每种理论时都必须的. 正是设库仑定律、安培定律、法拉第定律和不存在自由磁荷等实验规律在每一时空点附近的无穷小区域内都成立,才建立起电磁场理论的麦克斯韦方程组.

若

$$A_\mu = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}, \tag{7.40}$$

则按(7.38)

$$F_{\mu\nu} = (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) A_\lambda . \tag{7.41}$$

按强等效原理,可在每一给定点取一局域无引力的惯性系,并在其中取笛卡儿坐标. 由于在此坐标系中矢量不因平移而变,$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=0$,

$$F_{\mu\nu} = 0. \tag{7.42}$$

此式表明张量$(F_{\mu\nu})=0$. 由于张量作线性齐次变换,如果它在一个坐标系中为零,便在所有坐标系中为零,(7.42)在所有坐标系中成立. 即对(7.40)定义的矢量(A_μ),(7.41)右边恒为零. 由标量 ϕ 的任意性知

① 参阅本丛书第一卷《经典力学》p346(科学出版社 2002).

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}. \tag{7.43}$$

仿射联络 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$对交换其下标对称. 利用这一对称性可将协变旋度的表达式(7.38)简化为

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}, \tag{7.44}$$

与普通旋度的表达式一样.

在每一时空点附近无穷小区域的局域无引力惯性笛卡儿坐标系中,度规张量由(7.24)表示,因而有$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}=0$,加之 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=0$,使得在此坐标系中

$$g_{\mu\nu;\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}g_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}g_{\mu\sigma} = 0. \tag{7.45}$$

由于$(g_{\mu\nu;\lambda})$是张量,只要在一个坐标系中为零便在所有坐标系中为零. (7.45)在所有坐标系中成立,是一个普遍表达式. 通过对下标 μ,ν 和 λ 的轮换,还可从(7.45)得到

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}g_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} = 0,$$

$$\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}g_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}g_{\nu\sigma} = 0.$$

将此二式相加,减去(7.45)后再除以 2,利用 $g_{\mu\nu}$和 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$对交换下标的对称性,得

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} \equiv g_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\right). \tag{7.46}$$

将此式中的 λ 改成λ',再在两边乘以 $g^{\lambda\lambda'}$后对λ'求和,利用(7.14)得

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = g^{\lambda\lambda'}\Gamma_{\lambda'\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\lambda'}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda'}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\lambda'\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda'}}\right). \tag{7.47}$$

此式是强等效原理的推论,表示广义相对论时空中仿射联络与度规张量的关系. 由此式和度规张量的对称性可直接推得仿射联络对下标的对称性(7.43).

本书第一卷《经典力学》的§10.3 中证明了:若关系(7.47)成立则在每一时空点都存在局域无引力惯性笛卡儿坐标系. 与本节上述结果合起来便可得出结论:仿射联络与度规张量的关系(7.47)是强等效原理成立的充分兼必要条件.

由(7.47)推得

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}. \tag{7.48}$$

这个表达式提示 $\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu}$可能与$(g_{\mu\nu})$的行列式 g 的微分有关. g 的微分由$(g_{\mu\nu})$中每一元素 $g_{\mu\nu}$的微分引起:

$$\mathrm{d}g = f^{\mu\nu}\mathrm{d}g_{\mu\nu}, \tag{7.49}$$

与 $\mathrm{d}g_{\mu\nu}$相乘的因子 $f^{\mu\nu}$应是$g_{\mu\nu}$在g 中的代数余因子,它们之间有关系

$$f^{\mu\nu} g_{\mu\nu'} = g \delta^{\nu}{}_{\nu'}. \tag{7.50}$$

由于 $g \neq 0$,此式完全确定了代数余因 $f^{\mu\nu}$. 与(7.14)比较知

$$f^{\mu\nu} = g g^{\mu\nu}. \tag{7.51}$$

代入(7.49)得

$$\mathrm{d}g = g g^{\mu\nu} \mathrm{d}g_{\mu\nu}. \tag{7.52}$$

可见

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^{\lambda}}. \tag{7.53}$$

将此式代入协变散度的表达式(7.39),可将它简化为

$$A^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\sqrt{-g} A^{\mu}. \tag{7.54}$$

特别地,由标量 ϕ 可构造反变矢量

$$\phi^{;\mu} \equiv g^{\mu\nu}\frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial \phi}{\partial x_{\mu}}, \quad \mu = 0,1,2,3, \tag{7.55}$$

称为 ϕ 的反变梯度. 它的散度为

$$\Box \phi \equiv \phi^{;\mu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}}, \tag{7.56}$$

其中

$$\Box \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \tag{7.57}$$

为达朗贝尔算符在广义相对论时空中的推广,仍称为达朗贝尔算符.

§7.4 矢量平移的可积性问题,黎曼曲率张量与曲率,(赝)欧几里得空间的充分兼必要条件

可沿不同路径将矢量从一点平移到另一点. 若平移的结果只与始末点有关,而与平移的路径无关,则称此空间的矢量平移是可积的,否则是不可积的. 这便是矢量平移的可积性问题. 在(赝)欧几里得空间(包括闵可夫斯基时空)中恒可取(赝)笛卡儿坐标,使度规张量在其中处处相同,从而按(7.47)仿射联络处处为零. 由(7.25)和(7.29)知,这使矢量在平移中不变,且这一结果与平移路径无关. 可见,(赝)欧几里得空间(包括闵可夫斯基时空)中平移是可积的.

现在考虑一般情形. 设将矢量(A_{μ})由 x 点平移到 $x + \delta_1 x$ 点后再平移到 $x + \delta_1 x + \delta_2 x$ 点,按(7.25)它的 μ 分量将由 $A_{\mu}(x)$变为

$$\begin{aligned} &A_{\mu}(x) + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) A_{\lambda}(x)\delta_1 x^{\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu'}(x + \delta_1 x) A_{\lambda}(x + \delta_1 x)\delta_2 x^{\nu'} \\ &= A_{\mu}(x) + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) A_{\lambda}(x)\delta_1 x^{\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu'}(x) A_{\lambda}(x)\delta_2 x^{\nu'} \end{aligned}$$

$$+\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu'}}{\partial x^{\nu}}A_{\lambda}(x)\delta_1 x^{\nu}\delta_2 x^{\nu'}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu'}(x)\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}(x)A_{\sigma}(x)\delta_1 x^{\nu}\delta_2 x^{\nu'},$$

其中仿射联络的偏微商在 x 点取值.类似地,将矢量(A_μ)先由 x 点平移到$x+\delta_2 x$ 点,再平移到 $x+\delta_1 x+\delta_2 x$ 点,它的 μ 分量变为

$$\begin{aligned}
&A_\mu(x)+\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu'}(x)A_{\sigma}(x)\delta_2 x^{\nu'}+\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}(x+\delta_2 x)A_{\sigma}(x+\delta_2 x)\delta_1 x^{\nu}\\
&\quad=A_\mu(x)+\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu'}(x)A_{\sigma}(x)\delta_2 x^{\nu'}+\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}(x)A_{\sigma}(x)\delta_1 x^{\nu}\\
&\qquad+\frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}}{\partial x^{\nu'}}A_{\sigma}(x)\delta_1 x^{\nu}\delta_2 x^{\nu'}+\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}(x)\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu'}(x)A_{\lambda}(x)\delta_1 x^{\nu}\delta_2 x^{\nu'}.
\end{aligned}$$

将两者的差记为

$$\Delta A_\mu \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\nu\nu'}A_{\lambda}\delta_1 x^{\nu}\delta_2 x^{\nu'}, \tag{7.58}$$

其中

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\nu'}=\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\nu'}}-\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu'}}{\partial x^{\nu}}+\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu'}-\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu'}. \tag{7.59}$$

(7.58)表示的(ΔA_μ)是矢量(A_μ)自 x 点沿两条不同路径平移到$x+\delta_1 x+\delta_2 x$ 点得到的两个矢量的差.如果平移是可积的,(7.58)右边应对任意的(A_λ)、$\delta_1 x$ 和 $\delta_2 x$ 都是零,即(7.59)定义的$(R^{\lambda}{}_{\mu\nu\nu'})$必须为零.从一点到另一点的两条不同路径围成一条闭合回路.矢量平移结果与路径无关等同于绕闭合回路平移一周矢量不变.以上论证表明如

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\nu'}=0 \tag{7.60}$$

则矢量绕一无穷小闭合回路平移一周不变.然而,一有限闭合回路围成的任一曲面可划分为许多小网格,这些网格恰不重叠地布满整个曲面.这种划分可无限进行,以使每一网格变得无穷小.矢量绕有限闭合回路平移一周的变更等于绕其中每一网格边缘平移一周的变更之和.既然(7.60)保证矢量绕一无穷小网格边缘平移一周不变,便保证它绕任一闭合回路平移一周不变.(7.60)是矢量平移可积的充分兼必要条件.

(ΔA_μ)既是 $x+\delta_1 x+\delta_2 x$ 点两矢量的差,便是该点的矢量.当 $\delta_1 x$ 和 $\delta_2 x$ 都趋于零时(ΔA_μ)是 x 点的矢量,(7.58)正是在 $\delta_1 x$ 和 $\delta_2 x$ 趋于零的条件下得到的,它的右边就是 x 点的矢量.由于 $\delta_2 x$,$\delta_1 x$ 和(A_μ)分别都是矢量,§7.2 证明的定理便依次保证$(R^{\lambda}{}_{\mu\nu\nu'}A_{\lambda}\delta_1 x^{\nu})$,$(R^{\lambda}{}_{\mu\nu\nu'}A_{\lambda})$和$(R^{\lambda}{}_{\mu\nu\nu'})$为张量.

以上论证中用到无穷小量.这种论证其实是严格的,但有些人可能不习惯.为了消除因此引起的不悦,下面用微商代替微分来论证$(R^{\lambda}{}_{\mu\nu\nu'})$是张量.将协变矢量$(A_\mu)$先对 x^{ν} 求协变微商,再对 $x^{\nu'}$ 求协变微商,得

$$\begin{aligned}
A_{\mu;\nu;\nu'}&=\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^{\nu}}-\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}A_{\lambda}\right);\nu'\\
&=\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^{\nu}\partial x^{\nu'}}-\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^{\nu'}}-\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\nu'}}A_{\lambda}
\end{aligned}$$

$$- \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu'} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu'} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} A_\lambda - \Gamma^{\lambda}_{\nu\nu'} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\nu'} \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} A_\lambda. \tag{7.61}$$

将此式右边的 ν 和ν'对调,即得 $A_{\mu;\nu';\nu}$.将两者相减,注意对不同坐标相继作普通偏微商的结果与微商次序无关,且仿射联络对下标对称,得

$$A_{\mu;\nu';\nu} - A_{\mu;\nu;\nu'} = R^{\lambda}{}_{\mu\nu\nu'} A_\lambda, \tag{7.62}$$

其中 $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\nu'}$由(7.59)表示,此式左边显然是张量,$(A_\mu)$是矢量,因此,按§7.2 的定理,$(R^{\lambda}{}_{\mu\nu\nu'})$是张量,称为黎曼-克里斯托费尔①张量,简称黎曼张量.(7.62)表明,如果黎曼张量不为零,一个非零矢量对两个不同坐标相继作协变微商的结果与微商的次序有关,称为协变微商的不对易性.

一个欧几里得空间存在一个全局的笛卡儿坐标系,其中的坐标轴为直线,度规张量与位置无关,并可对角化,在取适当长度单位后可表为

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}. \tag{7.63}$$

如果将此式推广为

$$g_{\mu\nu} = \pm \delta_{\mu\nu}, \tag{7.64}$$

便得到赝欧几里得空间.闵可夫斯基时空就是赝欧几里得空间.由于上列性质,欧几里得空间和赝欧几里得空间称为平直空间.将(7.63)和(7.64)分别代入(7.47)知平直空间在采用笛卡儿坐标系时仿射联络为零,从而按(7.59)黎曼张量为零.然而张量在不同坐标系之间作线性齐次变换,在一个坐标系中为零便在所有坐标系为零.可见平直空间中黎曼张量处处为零.黎曼张量不处处为零的空间必是不平直的.不平直的空间称为弯曲空间.非零的黎曼张量表现了空间的弯曲.黎曼张量又称黎曼曲率张量.弯曲空间的几何便称为黎曼几何.

现在来探讨一个反问题:黎曼张量为零的空间是否一定是平直的,即是否能在其中建立一个全局的笛卡儿坐标系,使度规张量处处都具有(7.64)的形式.

任取一点 X,该点的反变度规张量$(g^{\mu\nu})$是一实对称矩阵,因而必有实正交矩阵$(D^{\alpha}{}_{\mu})$使其对角化:

$$D^{\alpha}{}_{\mu} g^{\mu\nu} D^{\beta}{}_{\nu} = g'^{\alpha} \delta^{\alpha\beta}, \tag{7.65}$$

g'^{α} 为非零实数.令

$$V^{\alpha}{}_{\mu}(X) = D^{\alpha}{}_{\mu} / \sqrt{|g'^{\alpha}|}, \tag{7.66}$$

即有

$$V^{\alpha}{}_{\mu}(X) g^{\mu\nu} V^{\beta}{}_{\nu}(X) = \eta^{\alpha} \delta^{\alpha\beta} \equiv \eta^{\alpha\beta}, \tag{7.67}$$

$$\eta^{\alpha} \equiv \frac{g'^{\alpha}}{|g'^{\alpha}|} = \pm 1. \tag{7.68}$$

(7.67)可视为 X 点反变度规张量的变换,将它从$(g^{\mu\nu})$变成了$(\eta^{\alpha\beta})$.若每一点的反

① Riemann-Christoffel.

变度规张量都能变成同一个$(\eta^{\alpha\beta})$，则空间是平直的. 与(7.67)相伴随的坐标微分的变换为

$$d\xi^{\alpha} = V^{\alpha}{}_{\mu}(X)dx^{\mu}. \tag{7.69}$$

它表示 $V^{\alpha}{}_{\mu}$ 在这里扮演坐标架的角色. 新坐标系第 α 基本矢量用旧坐标系基本矢量展开的第 μ 分量为 $V^{\alpha}{}_{\mu}$，它也就是旧坐标第 μ 基本矢量用新坐标系基本矢量展开的第α 分量. 对一个选定的矢量 $d\xi$，它在一给定坐标系(例如此处的新坐标系)中的诸分量都是确定的数，与坐标系的选取再无关系. 在(7.69)右端对矢量(dx^{μ})作变换时$(V^{\alpha}{}_{\mu}(X))$也必须作相应的变换，以保证左边的 $d\xi^{\alpha}$ 不变. $d\xi^{\alpha}$ 在这种变换中表现为标量. 按 §7.2 中证明的定理，$V^{\alpha}{}_{\mu}$ 对下标 μ 组成协变矢量. 现在的问题是，能否将$(V^{\alpha}{}_{\mu})$平移到全空间，建立起全局的笛卡儿坐标系.

本节一开始便已证明，如黎曼张量处处为零，矢量平移便在全空间可积. 在此条件下可将矢量$(V^{\alpha}{}_{\mu})$从 X 点平移到空间中的任一点，平移得到的协变矢量$(V^{\alpha}{}_{\mu}(x))$只与起始点 X、终了点 x 和起始处的协变矢量$(V^{\alpha}{}_{\mu}(X))$有关，而与平移的路径无关. 平移的结果，按(7.25)，完全由微分方程

$$\frac{\partial V^{\alpha}{}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}V^{\alpha}{}_{\lambda} \tag{7.70}$$

决定. 此式表明

$$\frac{\partial V^{\alpha}{}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial V^{\alpha}{}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0, \tag{7.71}$$

因而必存在标量 $\xi^{\alpha}(x)$使

$$V^{\alpha}{}_{\mu} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}. \tag{7.72}$$

$\xi^{\alpha}(x)$既是标量便只是空间点的函数，与坐标系的选择无关. 它对上标 α 的集合 $\xi(x) \equiv (\xi^{\alpha}(x))$可用来表示空间点，成为此空间的一个全局坐标系. 此坐标系与原先的 x 坐标系间按

$$d\xi^{\alpha} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}dx^{\mu} = V^{\alpha}{}_{\mu}(x)dx^{\mu} \tag{7.73}$$

变换，此坐标系的反变度规张量$(g'^{\alpha\beta})$与 x 坐标系中的反变度规张量$(g^{\mu\nu})$则按

$$g'^{\alpha\beta} = V^{\alpha}{}_{\mu}g^{\mu\nu}V^{\beta}{}_{\nu} \tag{7.74}$$

变换. 此式右边为一标量，协变微商就是普通微商，

$$\frac{\partial g'^{\alpha\beta}}{\partial x^{\rho}} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}(V^{\alpha}{}_{\mu}g^{\mu\nu}V^{\beta}{}_{\nu}) = (V^{\alpha}{}_{\mu}g^{\mu\nu}V^{\beta}{}_{\nu})_{;\rho}.$$

容易证明，协变微商也遵从莱布尼茨规则(本章习题 3)，便有

$$\frac{\partial g'^{\alpha\beta}}{\partial x^{\rho}} = V^{\alpha}{}_{\mu;\rho}g^{\mu\nu}V^{\beta}{}_{\nu} + V^{\alpha}{}_{\mu}g^{\mu\nu}{}_{;\rho}V^{\beta}{}_{\nu} + V^{\alpha}{}_{\mu}g^{\mu\nu}V^{\beta}{}_{\nu;\rho}.$$

(7.70)表明 $V^{\alpha}{}_{\mu;\rho} = V^{\beta}{}_{\nu;\rho} = 0$，由仿射联络的表达式(7.47)可直接验证 $g^{\mu\nu}{}_{;\rho} = 0$

(本章习题 4)，因此$\dfrac{\partial g'^{\alpha\beta}}{\partial x^\rho}=0$. $g'^{\alpha\beta}(x)$处处等于它在 $x=X$ 处的初值 $\eta^{\alpha\beta}$. 这便证明了黎曼张量处处为零的空间必是平直的，即是(赝)欧几里得空间.

可定义全协变黎曼张量，它的诸分量为

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu}=g_{\kappa\kappa'}R^{\kappa'}{}_{\lambda\mu\nu}. \tag{7.75}$$

将(7.47)代入(7.59)的前两项，得

$$\begin{aligned}R_{\kappa\lambda\mu\nu}&=\frac{1}{2}g_{\kappa\kappa'}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left\{g^{\kappa'\rho}\left[\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\rho}\right]\right\}\\&\quad-\frac{1}{2}g_{\kappa\kappa'}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{g^{\kappa'\rho}\left[\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu}+\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\rho}\right]\right\}\\&\quad+g_{\kappa\kappa'}[\Gamma^{\kappa'}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}-\Gamma^{\kappa'}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}].\end{aligned}$$

由(7.14)和(7.45)知

$$g_{\kappa\kappa'}\frac{\partial}{\partial x^\nu}g^{\kappa'\rho}=-g^{\kappa'\rho}\frac{\partial}{\partial x^\nu}g_{\kappa\kappa'}=-g^{\kappa'\rho}(\Gamma^{\sigma}_{\kappa\nu}g_{\sigma\kappa'}+\Gamma^{\sigma}_{\kappa'\nu}g_{\kappa\sigma}).$$

代入上式，利用(7.47)和(7.14)得

$$\begin{aligned}R_{\kappa\lambda\mu\nu}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x^\lambda\partial x^\nu}+\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa\partial x^\mu}-\frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\kappa\partial x^\nu}-\frac{\partial^2 g_{\kappa\nu}}{\partial x^\lambda\partial x^\mu}\right)\\&\quad-\Gamma^{\kappa'}_{\lambda\mu}(\Gamma^{\sigma}_{\kappa\nu}g_{\sigma\kappa'}+\Gamma^{\sigma}_{\kappa'\nu}g_{\kappa\sigma})+\Gamma^{\kappa'}_{\lambda\nu}(\Gamma^{\sigma}_{\kappa\mu}g_{\sigma\kappa'}+\Gamma^{\sigma}_{\kappa'\mu}g_{\kappa\sigma})\\&\quad+g_{\kappa\kappa'}(\Gamma^{\kappa'}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}-\Gamma^{\kappa'}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu})\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x^\lambda\partial x^\nu}+\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa\partial x^\mu}-\frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\kappa\partial x^\nu}-\frac{\partial^2 g_{\kappa\nu}}{\partial x^\lambda\partial x^\mu}\right)\\&\quad+g_{\sigma\kappa'}(\Gamma^{\kappa'}_{\lambda\nu}\Gamma^{\sigma}_{\kappa\mu}-\Gamma^{\kappa'}_{\lambda\mu}\Gamma^{\sigma}_{\kappa\nu}).\end{aligned}\tag{7.76}$$

此式表明，全协变黎曼张量具有很好对称的形式. 即具有

1. 对称性

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda}=R_{\kappa\lambda\mu\nu}, \tag{7.77}$$

2. 反对称性

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu}=-R_{\lambda\kappa\mu\nu}=-R_{\kappa\lambda\nu\mu}=R_{\lambda\kappa\nu\mu}, \tag{7.78}$$

3. 循环性

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu}+R_{\kappa\nu\lambda\mu}+R_{\kappa\mu\nu\lambda}=0. \tag{7.79}$$

在局域无引力惯性笛卡儿坐标系中，$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=0$，$\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}=0$，全协变黎曼张量的协变微商成为

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu;\rho}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\frac{\partial^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x^\lambda\partial x^\nu}+\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa\partial x^\mu}-\frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\kappa\partial x^\nu}-\frac{\partial^2 g_{\kappa\nu}}{\partial x^\lambda\partial x^\mu}\right).$$

由此很容易验证，在此坐标系中

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu;\rho}+R_{\kappa\lambda\rho\mu;\nu}+R_{\kappa\lambda\nu\rho;\mu}=0. \tag{7.80}$$

然而这是一张量关系,只要在一个坐标系中成立便在所有坐标系中成立.这是一恒等式,称为比安基[①]恒等式.

由黎曼张量收缩得

$$R_{\lambda\nu} = R^{\mu}{}_{\lambda\mu\nu}, \tag{7.81}$$

$(R_{\lambda\nu})$称为里奇[②]张量.再收缩一次便得标量

$$R = R^{\nu}{}_{\nu} = g^{\nu\lambda}R_{\lambda\nu}, \tag{7.82}$$

称为曲率标量,简称曲率.由对称性(7.77)知

$$R_{\nu\lambda} = g^{\mu\kappa}R_{\kappa\nu\mu\lambda} = g^{\mu\kappa}R_{\mu\lambda\kappa\nu} = R_{\lambda\nu}, \tag{7.83}$$

里奇张量是对称的.

取局域无引力惯性笛卡儿坐标系计算里奇张量的协变微商.前面已看到,由于度规张量的一阶微商和仿射联络都是零,在这种坐标系中可随意将协变微商写成普通微商,或将普通微商写成协变微商,还可将度规张量随意放在微分号下或抽到微分号外.这使得

$$\begin{aligned}
R_{\lambda\mu;\nu} &= \frac{\partial R_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} g^{\sigma\rho}R_{\rho\lambda\sigma\mu} = g^{\sigma\rho}R_{\rho\lambda\sigma\mu;\nu} \\
&= -g^{\sigma\rho}(R_{\rho\lambda\nu\sigma;\mu} + R_{\rho\lambda\mu\nu;\sigma}) \\
&= g^{\sigma\rho}(R_{\rho\lambda\sigma\nu;\mu} - R_{\rho\lambda\mu\nu;\sigma}) \\
&= R_{\lambda\nu;\mu} - R^{\sigma}{}_{\lambda\mu\nu;\sigma},
\end{aligned}$$

在第四等号处用了比安基恒等式(7.80).经整理得

$$R_{\lambda\mu;\nu} - R_{\lambda\nu;\mu} = -R^{\sigma}{}_{\lambda\mu\nu;\sigma}. \tag{7.84}$$

此式已是张量关系,因此在所有坐标系中都成立.在此式两边乘 $g^{\lambda\mu}$后对λ 和μ 分别求和,得

$$R_{;\nu} - 2R^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0. \tag{7.85}$$

也可将它写为

$$\left(R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}R\right)_{;\mu} = 0.$$

注意 $g^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$,此式又可写为

$$\left(R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu}{}_{\nu}R\right)_{;\mu} = 0. \tag{7.86}$$

将 ν 提升为上标后,此式成为

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{;\mu} = 0. \tag{7.87}$$

(7.85)~(7.87)都是张量关系,因此都在所有坐标系中成立.

---

① Bianchi.

② Ricci.

§7.5 曲率张量的惟一性问题

在承认仿射联络与度规张量的关系(7.47)的前提下,空间的性质完全由度规张量决定.上节引进的黎曼曲率张量是它的导出量.里奇张量和曲率标量则从黎曼张量导出.黎曼张量及其导出量表示空间的非平直性,即表示空间的曲率.特别是黎曼张量本身,它是否为零直接表示空间是否平直,因而称为曲率张量.现在要问:除黎曼张量外,能否由度规张量组成其他曲率张量.这就是曲率张量的惟一性问题.

首先,由于度规张量的协变微商是零,不可能通过求协变微商由度规张量构造其他张量.为方便进一步的讨论,再取局域无引力惯性笛卡儿坐标系,且只考虑这类坐标系之间的变换.由于这种变换前后仿射联络都是零,在所选定的点 X,互相变换的 x 坐标系与 x' 坐标系之间按(7.28)须满足条件

$$\left.\frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\right|_X = \left.\frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}}\right|_X = 0. \tag{7.88}$$

既然度规张量的一阶微商和仿射联络都是零,在 X 点便只能由度规张量的二阶微商组成欲求的张量.按(7.45),这也就是由仿射联络的一阶微商来组成.将(7.28)两边对 x'^{κ} 求偏微商,由(7.88)知,在 X 点有

$$\frac{\partial \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x'^{\kappa}} = \frac{\partial^3 x^{\lambda'}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}\partial x'^{\kappa}}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x'^{\kappa}}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial \Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'}}{\partial x^{\kappa'}}. \tag{7.89}$$

要使仿射联络一阶微商的某种线性组合按张量变换,必须使其中各项变换中的非齐次项互相抵消.(7.89)中的非齐次项即其右边的第一项,对 μ, ν 和 κ 是对称的,只要线性组合对其中一对下标反对称,变换中的非齐次项就会抵消.由于(7.89)左边对 $\mu\nu$ 对称,只能做出对 $\nu\kappa$ 反对称的线性组合

$$T'^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x'^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma'^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x'^{\nu}}, \tag{7.90}$$

这是 x' 坐标系中的量.它与 x 坐标系中的相应量的变换关系,按(7.89)为

$$T'^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x'^{\kappa}}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}T^{\lambda'}{}_{\mu'\nu'\kappa'}, \tag{7.91}$$

正是所选坐标变换中的张量变换.现在取消对坐标系的限制,此量在局域无引力惯性笛卡儿坐标系以外的其他坐标系中的值由变换(7.91)定义.于是($T^{\lambda}_{\mu\nu\kappa}$)为张量.比较(7.59)和(7.90)知,在局域无引力惯性笛卡儿坐标系中

$$T^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa}. \tag{7.92}$$

这既是一张量关系,便在所有坐标系中成立.以上构造的张量就是黎曼曲率张量.当然,可在定义(7.90)右边乘一标量因子,所得张量便是黎曼张量与此标量因子的积.因此可以说,除一标量因子外,由度规张量及其一、二阶微商构成的张量必是黎

曼曲率张量.这便是广义相对论时空中曲率张量的惟一性.

§7.6 等效原理与质点在弯曲时空中的运动,沿曲线的协变微商,测地线,时空弯曲与引力

质点在广义相对论弯曲时空中的运动方程可由等效原理导得.用 X 表示质点经过的一个时空点.按等效原理可在该点建立局域无引力惯性参考系,从其中看,一个不受其他外力作用的质点在该时空点作惯性运动,即作等速直线运动,加速度为零.在此局域惯性系中建立局域笛卡儿坐标系 $\varXi$,用 ξ^α,$\alpha=0,1,2,3$,表示其中质点的时空坐标,等效原理要求

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2}=0, \tag{7.93}$$

其中

$$\mathrm{d}\tau=\frac{1}{c}\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}\xi^\alpha\mathrm{d}\xi^\beta}=\frac{1}{c}\sqrt{-g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu}, \tag{7.94}$$

它的积分 τ 是一表示质点运动进程的标量,称为原时.$(\eta_{\alpha\beta})$是度规张量$(g_{\mu\nu})$在 $\varXi$ 坐标系中的值,由(7.24)表示.由于 $\mathrm{d}\tau$ 为标量,$\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)$是反变矢量,$\left(\frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right)$是它在 $\varXi$ 坐标系中的值.

一般地考虑张量沿一条曲线的变化.用沿曲线变化的标量 τ 表示曲线上点的位置.由于 $\tau+\mathrm{d}\tau$ 处的张量平移到 τ 处后才能与 τ 处的张量比较,§7.2 的讨论表明张量的微分

$$\mathrm{d}T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}=\frac{\partial T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu=\frac{\partial T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}}{\mathrm{d}x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \tag{7.95}$$

不是张量,只有协变微分

$$\begin{aligned}\mathrm{D}T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}=&\,\mathrm{d}T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}\\&+\left(\Gamma^{\mu_1}_{\lambda\mu_1'}T^{\lambda,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}\frac{\mathrm{d}x^{\mu_1'}}{\mathrm{d}\tau}+\Gamma^{\mu_2}_{\lambda\mu_2'}T^{\mu_1,\lambda,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}\frac{\mathrm{d}x^{\mu_2'}}{\mathrm{d}\tau}+\cdots\right.\\&\left.-\Gamma^{\lambda}_{\nu_1\nu_1'}T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\lambda,\nu_2,\cdots}\frac{\mathrm{d}x^{\nu_1'}}{\mathrm{d}\tau}-\Gamma^{\lambda}_{\nu_2\nu_2'}T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\lambda,\cdots}\frac{\mathrm{d}x^{\nu_2'}}{\mathrm{d}\tau}-\cdots\right)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{7.96}$$

才是张量.标量的协变微分就是普通微分:

$$\mathrm{D}\tau=\mathrm{d}\tau. \tag{7.97}$$

于是可得张量沿曲线的协变微商

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}}{\mathrm{D}\tau}=&\frac{\mathrm{d}T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}}{\mathrm{d}\tau}\\&+\Gamma^{\mu_1}_{\lambda\mu}T^{\lambda,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}+\Gamma^{\mu_2}_{\lambda\mu}T^{\mu_1,\lambda,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}+\cdots\end{aligned}$$

$$- \Gamma^{\lambda}_{\nu_1\mu} T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\lambda,\nu_2,\cdots} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} - \Gamma^{\lambda}_{\nu_2\mu} T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\lambda,\cdots} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} - \cdots$$

$$= T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots;\mu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}. \tag{7.98}$$

将张量取为速度矢量$\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)$便知,加速度$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}$并不组成矢量,只有速度的协变微商

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} \tag{7.99}$$

才组成矢量.不过,在所考虑点 X 的局域无引力惯性笛卡儿坐标系 Ξ 中,仿射联络 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}=0$,速度的协变微商就是它的普通微商.(7.93)左边乃是速度矢量协变微商在 Ξ 坐标系中各分量的值.此式遂表示一个矢量的所有分量在 Ξ 坐标系中为零.矢量所有分量均为零的性质与坐标系无关.将它变到 x 坐标系中便是

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} = 0. \tag{7.100}$$

作为矢量关系,此式在所有坐标系中成立,是引力场中质点的广义相对论运动方程.

如果一个矢量(A^μ)按

$$\frac{\mathrm{d}A^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{7.101}$$

沿曲线变化,则它沿曲线的协变微商便处处为零,只是沿曲线的平移.(7.100)表明,质点运动中速度四矢量只作平移.用几何语言,这里的速度四矢量就是四维时空中曲线的单位切矢量.(7.100)描绘的质点运动在四维时空中划出的曲线由其单位切矢量平移来实现.由单位切矢量平移划出的曲线称为测地线.可见,按等效原理质点在四维时空中走一条测地线.平直空间的测地线就是直线,平直时空中的测地线表示一点的等速直线运动.反过来说,弯曲空间的测地线是直线的推广,弯曲时空的测地线则是等速直线运动的推广.按此观点,正是时空的弯曲使测地线不再是等速直线运动,表现为质点受力.称这种力为引力,它是时空弯曲的效应.正因为它是时空的性质,对所有物质都起作用,所以是'万有'的,称为万有引力.

为具体了解,将(7.100)用于质点在恒定弱引力场中的缓慢运动.在此条件下,它应趋于质点在牛顿引力场中的运动方程.由于$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\approx v_i$, $i=1,2,3$,即趋于质点速度的三个分量;而$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\approx c$,即趋于光速;在质点运动速度远低于光速的条件下可在(7.100)左边第二项的求和中只保留 $\nu=\lambda=0$ 的项,得近似

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 0. \tag{7.102}$$

场是恒定的,$g_{\mu\nu}$与时间无关,按(7.47)

$$\Gamma^{\mu}_{00} = -\frac{1}{2} g^{\mu\mu'} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\mu'}}. \tag{7.103}$$

场既弱，时空应接近平直的，$(g_{\mu\nu})$应接近闵可夫斯基度规(7.24)．弱场度规可表示为

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} h_{\mu\nu}, \tag{7.104}$$

$\frac{1}{c^2}h_{\mu\nu}$为小量．将此式代入(7.103)右边，取到一级小量得

$$\Gamma^{\mu}_{00} = -\frac{1}{2c^2} \eta^{\mu\mu'} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\mu'}}. \tag{7.105}$$

从数值上讲 $\eta^{\mu\mu'} = \eta_{\mu\mu'}$．将此式代回(7.102)，其中空间分量和时间分量分别成为

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2, \quad \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} = 0. \tag{7.106}$$

其中第二式表明$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$为常数．将此常数的平方除第一式两边得牛顿运动方程

$$m \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\nabla (m\phi), \tag{7.107}$$

其中

$$\phi = -\frac{1}{2} h_{00} \tag{7.108}$$

为牛顿万有引力的引力势．这里引力势的出现确实由于时空度规$(g_{\mu\nu})$相对于平直的闵可夫斯基度规$(\eta_{\mu\nu})$的偏离，即由于时空的弯曲．

§7.7 从几何到动力学，引力场的作用量与拉格朗日量密度，引力场方程

在广义相对论时空中，度规$(g_{\mu\nu})$是不正定的，即将它对角化后，它的对角元有正有负．将与负对角元对应的那一维坐标解释为时间，各量随这一维坐标的变化便是随时间的变化，几何成为了动力学．度规随时空坐标变化的规律便是引力场的动力学．

按理论物理积累的经验，可先寻找引力场的拉格朗日量密度，将它在时空中积分得引力场作用量．引力场的运动方程可由最小作用量原理导得．这里的‘最小’条件仍只是变分为零的条件，‘最小’只是一种习惯的说法，结果并不一定令作用量最小．拉格朗日量密度应是由度规张量组成的标量．(7.82)定义的曲率标量 R 便是这种标量．当然，R 的任何函数都是这种标量．不过，如果要求导出的引力场方程为度规张量$(g_{\mu\nu})$的不超过二阶的偏微分方程，拉格朗日量密度中与$(g_{\mu\nu})$二阶微商相乘的因子不能再含$(g_{\mu\nu})$的微商．这就使引力场的拉格朗日量密度只能含 R

的一次幂，从而应是

$$\mathscr{L}_g = aR, \tag{7.109}$$

a 为常数.在拉格朗日量上乘的任意常因子不会影响由它导出的运动方程.这里之所以要乘因子 a 是出于以下两点考虑.其一是拉格朗日量密度应具能量密度量纲.而由(7.1)知度规张量($g_{\mu\nu}$)无量纲，再由(7.47)、(7.59)、(7.81)和(7.82)知 R 具(长度)$^{-2}$量纲.只有在 R 上乘一具能量·(长度)$^{-1}$量纲的因子 a 才能组成拉格朗日量密度.其二是引力场常常只是所考虑的系统的一部分，它的拉格朗日量密度要和系统其余部分物质的拉格朗日量密度加起来组成系统的总拉格朗日量密度.在引力场拉格朗日量密度上乘的因子不再是任意的，而与系统其余部分物质对引力场的作用强度有关.

暂时还是先考虑单纯的引力场.将(7.109)表示的 $\mathscr{L}_g$ 乘以四维时空的不变体积元后在所考虑的整个时空积分，得引力场的作用量

$$S_g = \frac{1}{c}\int\sqrt{-g}\,\mathscr{L}_g \mathrm{d}^4x = \frac{a}{c}\int\sqrt{-g}R\,\mathrm{d}^4x. \tag{7.110}$$

运动方程由最小作用量原理

$$\delta S_g = \frac{a}{c}\int\delta(\sqrt{-g}R)\mathrm{d}^4x = 0 \tag{7.111}$$

决定.按(7.82)

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R\delta\sqrt{-g}. \tag{7.112}$$

其中

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}\delta\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\lambda\kappa}\delta\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\kappa}. \tag{7.113}$$

$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$为仿射联络 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$由度规变分而引起的变分.在变换(7.28)两边作变分，它右边第一项在变分中不变，因而变分为零.因此

$$\delta\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\delta\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'}, \tag{7.114}$$

可见仿射联络的变分按张量变换，($\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$)是张量.可对它求协变微商，得

$$(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\kappa} = \frac{\partial\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma^{\lambda}_{\eta\kappa}\delta\Gamma^{\eta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}\delta\Gamma^{\lambda}_{\eta\nu} - \Gamma^{\eta}_{\nu\kappa}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\eta}. \tag{7.115}$$

(7.113)依此可表为

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu} - (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda}. \tag{7.116}$$

(7.112)右边第二项因此成为

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}[(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu} - (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda}] = \sqrt{-g}[(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu} - (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda}].$$

在第二等号处用了协变微商的莱布尼茨规则和度规张量协变微商为零的性质(7.45).此式右边方括号内两项分别都是四矢量的协变散度,可用(7.54)将它们简化,得

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}) - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}). \quad (7.117)$$

右边两项在所考虑的整个时空内的积分都可化为时空表面的积分,而在变分原理(7.111)中各量在时空表面的变分恒设为零,即在表面上

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0.$$

这使(7.112)右边第二项对(7.111)中积分的贡献为零.另一方面,按(7.52)有

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \quad (7.118)$$

由(7.14)得

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\delta g_{\rho\sigma}. \quad (7.119)$$

这使得

$$\delta(\sqrt{-g}R) = -\sqrt{-g}(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)\delta g_{\mu\nu}. \quad (7.120)$$

代入(7.111)的积分号下,要求它对度规张量的任意变分($\delta g_{\mu\nu}$)成立,得

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0. \quad (7.121)$$

它的协变形式为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (7.122)$$

这便是纯引力场方程,即没有其他物质条件下的引力场方程,又称真空中的引力场方程.

§7.8 引力场中其他物质的作用量与运动方程,能量动量张量与能量动量守恒

表示质点在引力场中运动规律的测地线方程(7.100)可由作用量

$$S_{\mathrm{o}} = m_0 c\int_{x(1)}^{x(2)}\sqrt{-g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}} = -m_0c^2\int_{\tau(1)}^{\tau(2)}\mathrm{d}\tau$$
$$= -m_0c^2\Delta\tau \quad (7.123)$$

取极值导出[①],其中 m_0 为质点的静止质量,$x(1)$和 $x(2)$分别表示所考虑的质点轨道始末点的时空坐标,$\tau(1)$和 $\tau(2)$为始末点的原时.由于 $\Delta\tau$ 是质点由始点到末点经历的原时,最小作用量原理在这里表现为最短原时原理.(7.123)积分号前

① 参阅本丛书第一卷《经典力学》§2.5.(科学出版社 2002).

乘的常数因子使 S_{o} 具有作用量的量纲

$$\text{动量}\cdot\text{长度} = \text{能量}\cdot\text{时间}.$$

如果质点还受电磁场作用，则它的作用量应在(7.123)基础上加入电磁场的贡献. 已知质点在无引力惯性系中在电磁场作用下的拉格朗日量①

$$L = - m_0 c\sqrt{c^2 - \sum_{i=1}^{3}(\dot{x}^i)^2} + qA_0 c + q\sum_{i=1}^{3} A_i \dot{x}^i,$$

q 为质点电荷，$A_\mu, \mu = 0,1,2,3$，为四维电磁势. 此量的时间积分即为作用量

$$S_{\mathrm{p}} = \int_{x(1)}^{x(2)} (- m_0 c\sqrt{- g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu} + qA_\mu \mathrm{d}x^\mu), \tag{7.124}$$

在无引力惯性系中$(g_{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu})$. 按等效原理，在有引力场的一般情形中，只要在每一时空点积分号下的量都在局域无引力惯性坐标系中取值，此式仍应成立. 然而积分号下为标量，与坐标系的选择无关. 可见(7.124)在一般情形中成立. 它所表示的 S_{p} 便是质点在引力场和电磁场联合作用下的作用量. 用(7.94)定义的原时可将它写为

$$S_{\mathrm{p}} = \int_{\tau(1)}^{\tau(2)} \left(- m_0 c\sqrt{- g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}} + qA_\mu \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) \mathrm{d}\tau, \tag{7.125}$$

其中函数 $x^\mu(\tau)$因而满足条件

$$\sqrt{- g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}} = c. \tag{7.126}$$

最小作用量原理对此可表述为：在始末两点 $x(1)$和 $x(2)$之间满足条件(7.126)的函数$(x^\mu(\tau))$中，可用来表述质点轨道的函数$(x^\mu(\tau))$使作用量(7.125)取极值，即使变分

$$\delta S_{\mathrm{p}} = 0. \tag{7.127}$$

这是一类在经典力学中曾多次求解的变分问题②，由此导出的质点在引力场和电磁场联合作用下的运动方程为

$$m_0 \left(\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right) = qF^\mu{}_\nu \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}, \tag{7.128}$$

其中

$$F^\mu{}_\nu = g^{\mu\mu'} F_{\mu'\nu}, \tag{7.129}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}. \tag{7.130}$$

电磁场的拉格朗日量密度(4.13)是一标量，按等效原理可用于有引力的情形. 引力场中电磁场的作用量遂为

---

① 参阅本丛书第一卷《经典力学》(9.73)式.(科学出版社 2002).

② 参阅本丛书第一卷《经典力学》§ 4.6.(科学出版社 2002).

$$S_{\mathrm{f}} = \int\left(-\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + A_\mu j^\mu\right)\frac{1}{c}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x$$

$$= \int\left(-\frac{1}{4\mu_0}g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda} + A_\mu j^\mu\right)\frac{1}{c}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x, \tag{7.131}$$

积分遍及问题涉及的时空区域.要求此作用量在固定 A_μ 在时空区域表面取值的条件下由 A_μ 变更引起的变分为零,得电磁场在引力场中的运动方程

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = -\mu_0 j^\nu. \tag{7.132}$$

(7.130)还直接导致

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0. \tag{7.133}$$

(7.132)和(7.133)组成引力场中的麦克斯韦方程,描写引力场中电磁场的运动.

(7.131)和(7.132)中每一时空点的电流密度四矢量(j^μ)的值首先在该点的局域无引力惯性系中定义,再由矢量变换规则定义它在其他任意坐标系中的值.如果它是由一个运动带电粒子贡献的,则在每一给定时刻只在这个粒子所在的空间点有不为零的值,其他点 $j^\mu=0$.取粒子所在时空点(x_1^μ)的局域无引力惯性系,其中该点附近一点(x^μ)处的电流密度四矢量为

$$j^\mu(x) = q\delta^3(x - x_1)\frac{\mathrm{d}x_1^\mu}{\mathrm{d}t_1}, \quad \mu = 0,1,2,3. \tag{7.134}$$

由此得 x_1 点对(7.131)右边积分号下第二项的非零贡献为

$$j^\mu\frac{1}{c}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = q\frac{\mathrm{d}x_1^\mu}{\mathrm{d}t_1}\mathrm{d}t_1 = q\frac{\mathrm{d}x_1^\mu}{\mathrm{d}\tau_1}\mathrm{d}\tau_1.$$

此式是矢量关系,应在任何坐标系中都成立.可见(7.131)右边积分号下第二项的非零贡献与(7.125)右边积分号下第二项的贡献是同一的.在(7.125)中它给出质点运动方程(7.128)的右边,在(7.131)中它给出电磁场运动方程(7.132)的右边.这提醒人们,引力场中电磁场与质点系组成的系统的作用量为

$$S_{\mathrm{m}} = \int\left(-\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + A_\mu j^\mu\right)\frac{1}{c}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x$$

$$- \sum_n m_{0n}c\int_{x_n(1)}^{x_n(2)}\sqrt{-g_{\mu\nu}(x_n)\mathrm{d}x_n^\mu\mathrm{d}x_n^\nu}$$

$$= -\frac{1}{4\mu_0 c}\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x$$

$$+ \sum_n\int_{x_n(1)}^{x_n(2)}\left(-m_{0n}c\sqrt{-g_{\mu\nu}(x_n)\mathrm{d}x_n^\mu\mathrm{d}x_n^\nu} + q_n A_\mu(x_n)\mathrm{d}x_n^\mu\right), \tag{7.135}$$

其中 m_{0n}、q_n 和(x_n^μ)分别为第 n 质点的静止质量、电荷和坐标,求和对所有质点进行.固定第 n 质点的始末坐标($x_n^\mu(1)$)和($x_n^\mu(2)$),对联接这两点的轨道作变分,要求 S_{m} 取极值,即

$$\delta S_{\mathrm{m}} = 0, \tag{7.136}$$

便得第 n 质点的运动方程

$$m_{0n}\left(\frac{\mathrm{d}^2 x_n^\mu}{\mathrm{d}\tau_n^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_n)\frac{\mathrm{d}x_n^\nu}{\mathrm{d}\tau_n}\frac{\mathrm{d}x_n^\lambda}{\mathrm{d}\tau_n}\right) = q_n F^\mu{}_\nu(x_n)\frac{\mathrm{d}x_n^\nu}{\mathrm{d}\tau_n}. \tag{7.137}$$

固定 $A_\mu(x)$ 在一时空区域表面的值，对此区域内的 $A_\mu(x)$ 作变分，要求 S_{m} 取极值，即要求(7.136)成立，便得电磁场的运动方程(7.132). 其中的电流密度四矢量 (j^μ) 由质点运动按前述办法，即按(7.134)和矢量的变换规则，求得.

考虑由度规 $g_{\mu\nu}$ 的变更引起的作用量的变分. 由(7.119)得

$$\begin{aligned}\delta F^{\mu\nu} &= [(\delta g^{\mu\rho})g^{\nu\sigma} + g^{\mu\rho}(\delta g^{\nu\sigma})]F_{\rho\sigma} \\ &= -(g^{\mu\lambda}g^{\rho\kappa}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}g^{\sigma\kappa})F_{\rho\sigma}\delta g_{\lambda\kappa} \\ &= -(g^{\mu\lambda}F^{\kappa\nu} + g^{\nu\lambda}F^{\mu\kappa})\delta g_{\lambda\kappa}.\end{aligned} \tag{7.138}$$

由此式、(7.118)和(7.126)得

$$\begin{aligned}\delta S_{\mathrm{m}} &= \frac{1}{2\mu_0 c}\int\left[F_\mu{}^\lambda F^{\mu\kappa} - \frac{1}{4}g^{\lambda\kappa}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\,\delta g_{\lambda\kappa}\mathrm{d}^4 x \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_n m_{0n}\int\frac{\mathrm{d}x_n^\lambda}{\mathrm{d}\tau_n}\frac{\mathrm{d}x_n^\kappa}{\mathrm{d}\tau_n}\delta g_{\lambda\kappa}\mathrm{d}\tau_n \\ &\equiv \frac{1}{2c}\int T^{\lambda\kappa}(x)\delta g_{\lambda\kappa}(x)\sqrt{-g(x)}\,\mathrm{d}^4 x.\end{aligned} \tag{7.139}$$

其中的积分在所选定的时空区域中进行，

$$\begin{aligned}T^{\lambda\kappa}(x) &= \frac{1}{\mu_0}\left[F_\mu{}^\lambda(x)F^{\mu\kappa}(x) - \frac{1}{4}g^{\lambda\kappa}(x)F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right] \\ &\quad + \frac{c}{\sqrt{-g(x)}}\sum_n m_{0n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x_n^\lambda}{\mathrm{d}\tau_n}\frac{\mathrm{d}x_n^\kappa}{\mathrm{d}\tau_n}\delta^4(x - x_n)\mathrm{d}\tau_n\end{aligned} \tag{7.140}$$

为二阶对称反变张量. 与(1.243)比较可以看出，在无引力条件下此式右边第一项恰是电磁场的能量动量张量. 而它的第二项在此条件下也正是粒子系的能量动量张量. 反变能量动量张量的 00 项为能量密度；$0i$ 项与 $i0$ 项，$i=1,2,3$，则是动量密度的 c 倍，也是能流密度的 $\frac{1}{c}$；ij 项，$i,j=1,2,3$，为动量流密度. 由于运动方程(7.132)和(7.137)只含度规及其一阶偏微商，表达式(7.140)中不含度规的微商，在 x 点的无引力惯性坐标系中，原本在无引力条件下成立的能量动量守恒关系

$$\frac{\partial T^{\lambda\kappa}}{\partial x^\kappa} = 0 \tag{7.141}$$

在该点依然成立，且可写成

$$T^{\lambda\kappa}{}_{;\kappa} = 0. \tag{7.142}$$

这是一个张量关系，因此在任一坐标系中均成立. 不过，一般说来(7.141)并不成立. 它表明，由于存在引力场及其与电磁场和质点系的作用，电磁场与质点系的能

量和动量并不单独守恒.

现在一般地设某物质系统在引力场中的作用量为 S_{m}.广义相对性原理要求它在一般的时空坐标变换中为标量.由度规($g_{\mu\nu}$)的变更引起的变分

$$\delta S_{\mathrm{m}} \equiv \frac{1}{2c}\int T^{\mu\nu}(x)\delta g_{\mu\nu}(x)\sqrt{-g(x)}\,\mathrm{d}^4 x \tag{7.143}$$

也应是标量.由此式定义的($T^{\mu\nu}(x)$)便是一二阶对称反变张量.由于物质系统各动力学变量的运动方程由 S_{m} 对这些动力学变量的变分为零决定,坐标变换通过这些动力学变量的变更引起的 S_{m} 的变分为零,因而只能通过 $g_{\mu\nu}$ 的变更引起 S_{m} 的变分.然而,如上所述,广义相对性原理要求坐标变换中 S_{m} 不变,即要求坐标变换通过改变 $g_{\mu\nu}$ 而引起的 δS_{m} 为零.将坐标变换写作

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x), \tag{7.144}$$

在无穷小变换中 $\varepsilon^{\mu}(x)$ 为小量.到 ε^{μ} 的一次幂,度规的相应变换为

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x') &= g_{\mu'\nu'}(x)\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^{\nu}} \\ &= g_{\mu\nu}(x') - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\varepsilon^{\lambda} - g_{\mu\lambda}\frac{\partial \varepsilon^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - g_{\lambda\nu}\frac{\partial \varepsilon^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}. \end{aligned}$$

可见

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = -\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\varepsilon^{\lambda} - g_{\mu\lambda}\frac{\partial \varepsilon^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - g_{\lambda\nu}\frac{\partial \varepsilon^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}, \tag{7.145}$$

右边各项在 x 处取值.将此式代入(7.143)右边,左边取值应为零.经部分积分并利用 $T^{\mu\nu}$ 的对称性后得

$$0 = \frac{1}{c}\int \varepsilon^{\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\sqrt{-g}T_{\lambda}{}^{\nu}) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\right]\mathrm{d}^4 x.$$

由 ε^{λ} 的任意性知

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\sqrt{-g}T_{\lambda}{}^{\nu}) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\sqrt{-g}T^{\mu\nu} = 0.$$

用(7.32),(7.47)和(7.53)诸式可将此式化为

$$(T_{\lambda}{}^{\nu})_{;\nu} = 0. \tag{7.146}$$

乘以 $g^{\lambda\mu}$ 后对 λ 求和,利用协变微商的莱布尼茨规则和度规张量协变微商为零的性质,又可将此式写为

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{7.147}$$

在无引力条件下它成为

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0. \tag{7.148}$$

这些关系表明,(7.143)定义的($T^{\mu\nu}$)可解释为所考虑的物质系统在引力场中的能量动量张量.(7.148)显示,由此定义的能量和动量在无引力条件下守恒.若有引力,(7.148)一般不成立,所考虑的物质系统的能量和动量不再守恒.这可理解为它

与引力场交换能量和动量的结果.

§7.9 引力场与其他物质组成的总系统的作用量，有源引力场方程，总系统的能量动量守恒

将(7.110)表示的引力场作用量 S_g 与其他物质在引力场中的作用量 S_m 加起来，便得总系统的作用量

$$S = S_g + S_m.$$

由于 S_g 与其他物质的动力学变量无关，S 对这些变量的变分就是 S_m 对这些变量的变分. 由 $\delta S = 0$ 导出的引力场以外其他物质的运动方程便和原先由 $\delta S_m = 0$ 导出的一样. 现在来推导在有其他物质的条件下的引力场方程.

由(7.110)和(7.120)得

$$\delta S_g = -\frac{a}{c}\int\sqrt{-g}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)\delta g_{\mu\nu}\mathrm{d}^4 x. \tag{7.149}$$

将它与(7.143)相加，得

$$\delta S = -\frac{a}{c}\int\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - \frac{1}{2a}T^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4 x. \tag{7.150}$$

要求对度规的任意变更 $\delta g_{\mu\nu}$，此式表达的作用量变分都是零，便得

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{1}{2a}T^{\mu\nu}. \tag{7.151}$$

与(7.121)比较知，这是有源的引力场方程. 引力场源为其他物质的能量和动量，在方程中表现为右端的能量动量张量.

为确定常数 a，将(7.151)用于一个静止质点产生的引力场，并取弱场极限，在此极限下牛顿引力理论与实验相符. 要求(7.151)的推论在弱场极限下与牛顿引力理论相符，可确定常数 a.

在牛顿引力理论中，置于原点质量为 M 的质点在 $\boldsymbol{r}$ 处产生引力势

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{GM}{r}, \tag{7.152}$$

其中

$$G = 6.67259 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2} \tag{7.153}$$

为引力常数. (7.152)表示的引力势满足泊松方程

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) = 4\pi GM\delta(\boldsymbol{r}). \tag{7.154}$$

另一方面，如(7.151)右边为零，它便有无引力解 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$，如它的右边为小量，便有弱场解(7.104)，其中$\frac{1}{c^2}h_{\mu\nu}$为小量. 可见，到一级小，(7.151)右边 $T^{\mu\nu}$ 的表达式中可取 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$，从而 $g = -1$. 由(7.140)知，弱场条件下，一个位于原点质量为 M 的静止质点的能量动量张量诸分量为

$$T^{00}=Mc^2\delta(\boldsymbol{r}),\ T^{0i}=T^{i0}=T^{ij}=0,\qquad i,j=1,2,3. \tag{7.155}$$

代入(7.151)右边,得

$$R^{ii}=\frac{1}{2}R,\quad i=1,2,3. \tag{7.156}$$

弱场近似下,$R^{\mu\nu}$为小量,到一级小

$$R=\eta_{\mu\nu}R^{\mu\nu}=\frac{3}{2}R-R^{00},$$

$$R=2R^{00}. \tag{7.157}$$

代入(7.151)得

$$R^{00}=\frac{1}{4a}T^{00}. \tag{7.158}$$

(7.76)表明,到一级小

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x^\lambda\partial x^\nu}+\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa\partial x^\mu}-\frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\kappa\partial x^\nu}-\frac{\partial^2 g_{\kappa\nu}}{\partial x^\lambda\partial x^\mu}\right). \tag{7.159}$$

静止质点产生的引力场应与时间无关,因此各量对 x^0 的微商为零,到一级小

$$R^{00}=R_{00}=\eta^{\kappa\mu}R_{\kappa0\mu0}=\frac{1}{2}\eta^{\kappa\mu}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^\kappa\partial x^\mu}$$

$$=\frac{1}{2}\Box g_{00}=\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}, \tag{7.160}$$

其中

$$\Box=\eta^{\kappa\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^\kappa\partial x^\mu} \tag{7.161}$$

为无引力条件下的达朗贝尔算符,∇^2 为拉普拉斯算符.(7.104)和(7.108)表明

$$g_{00}=-\left(1+\frac{2}{c^2}\phi\right), \tag{7.162}$$

ϕ 为引力势.将此式代入(7.160)后,再将所得的 R^{00}和(7.155)表示的 T^{00}一起代入(7.158)得

$$\nabla^2\phi=-\frac{Mc^4}{4a}\delta(\boldsymbol{r}). \tag{7.163}$$

要求它与(7.154)一致,定得

$$a=-\frac{c^4}{16\pi G}. \tag{7.164}$$

代入(7.151)得有源引力场方程

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-\frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}, \tag{7.165}$$

它的协变形式为

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{7.166}$$

此方程为爱因斯坦发现，称为爱因斯坦引力场方程.此方程的形式与坐标系的选择无关，是广义相对论的，因此又称广义相对论引力场方程.它的实验基础是等效原理.它的正确性由它的全部推论与迄今的有关实验结果一致证明.这个方程对它的未知函数 $g_{\mu\nu}$ 是非线性的，这一点与电磁场的麦克斯韦方程(1.221)和(1.222)十分不同.这种非线性在求解和解释上都带来复杂性.

如果不限定 $\frac{1}{c^2}h_{\mu\nu}$ 是小量，分解(7.104)可以是严格的.实际上表示引力场的应是 $(g_{\mu\nu})$ 与 $(\eta_{\mu\nu})$ 的差，而不是 $(g_{\mu\nu})$ 本身.用 $h_{\mu\nu}$ 表示引力场有时会带来方便.代价是:这种表示将失去广义协变性.黎曼张量以及由它收缩成的里奇张量和曲率标量与 $h_{\mu\nu}$ 的关系都是非线性的.但可将其中的线性部分分离出来.用上标(1)表示一个量与 $h_{\mu\nu}$ 关系的线性部分.(7.76)表明全协变黎曼张量的线性部分为

$$R^{(1)}_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial^2 h_{\kappa\mu}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 h_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 h_{\lambda\mu}}{\partial x^\kappa \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h_{\kappa\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}\right). \tag{7.167}$$

一个量的线性部分的指标只能用 $(\eta_{\mu\nu})$ 来升降.例如

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{\mu\nu} &= \eta^{\lambda\kappa} R^{(1)}_{\kappa\mu\lambda\nu} \\ &= \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial^2 h^\lambda{}_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h^\lambda{}_\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h^\lambda{}_\nu}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \Box h_{\mu\nu}\right), \end{aligned} \tag{7.168}$$

其中 $h^\lambda{}_\mu = \eta^{\lambda\kappa} h_{\kappa\mu}$，本节的达朗贝尔算符均由(7.161)定义，其中没有引力的影响.进一步用 $(\eta^{\mu\nu})$ 收缩，得曲率标量的线性部分

$$R^{(1)} = \eta^{\mu\nu} R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}\left(\Box h^\lambda{}_\lambda - \frac{\partial^2 h^{\lambda\kappa}}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa}\right). \tag{7.169}$$

这些只含线性部分的量已不是一般坐标变换中的张量，但仍是洛伦兹变换中的张量.将(7.166)左边的非线性部分移到右边，左边便只剩下线性部分.这样，可将爱因斯坦引力场方程写为

$$\begin{aligned} &\Box h_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 h^\lambda{}_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h^\lambda{}_\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h^\lambda{}_\nu}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} - \eta_{\mu\nu}\left(\Box h^\lambda{}_\lambda - \frac{\partial^2 h^{\lambda\kappa}}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa}\right) \\ &\quad = -\frac{16\pi G}{c^2}(T_{\mu\nu} + U_{\mu\nu}), \end{aligned} \tag{7.170}$$

其中

$$U_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \left(R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}\right)\right] \tag{7.171}$$

为洛伦兹变换中的张量.

(7.170)具有狭义相对论场方程的一般形式，左边是场量二阶微商的线性式，右边是场源.不过，现在场源中多出一项，即由场量的二次幂和高次幂组成的洛伦兹张量 $(U_{\mu\nu})$，从它在场方程(7.170)中的位置和它的量纲看，应将它解释为引力场本身的能量动量张量.这是很自然的.既然物质的能量动量是引力场源，引力场本身的能量动量自应是场源的一部分.而且(7.170)和(7.171)表明，正是由于自身

的能量动量是自身的源，引力场方程必定是非线性的.

由(7.167)可直接看出

$$\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}R^{(1)}_{\kappa\lambda\mu\nu}+\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}R^{(1)}_{\kappa\lambda\rho\mu}+\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}R^{(1)}_{\kappa\lambda\nu\rho}=0. \tag{7.172}$$

这是线性量的比安基恒等式.重复(7.80)～(7.87)的推导，在其中用 $R^{(1)}$代替 R，用 $\eta_{\mu\nu}$代替 $g_{\mu\nu}$，用普通微商代替协变微商，便可得

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(R^{(1)\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}R^{(1)}\right)=0. \tag{7.173}$$

将(7.170)左边变成反变洛伦兹张量后就是

$$2c^2\left(R^{(1)\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}R^{(1)}\right).$$

将(7.173)用于这样得到的反变张量场方程，即得

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(T^{\mu\nu}+U^{\mu\nu})=0. \tag{7.174}$$

它表明，引力场与其他物质组成的总系统能量动量守恒.

在(7.166)两边乘 $g^{\mu\nu}$后对 μ 和 ν 分别求和，利用(7.14)得

$$R=\frac{8\pi G}{c^4}T, \tag{7.175}$$

其中

$$T=g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}=T^{\mu}{}_{\mu}. \tag{7.176}$$

将(7.175)代入(7.166)左边第二项，并将所得移到等号右边，得

$$R_{\mu\nu}=-\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right). \tag{7.177}$$

也可在(7.170)两边乘 $\eta^{\mu\nu}$后分别对 μ 和 ν 求和，得

$$\Box h^{\lambda}{}_{\lambda}-\frac{\partial^2 h^{\lambda\kappa}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\kappa}}=\frac{8\pi G}{c^2}S, \tag{7.178}$$

其中

$$S=\eta^{\mu\nu}S_{\mu\nu}, \tag{7.179}$$

$$S_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}+U_{\mu\nu}, \tag{7.180}$$

$(S_{\mu\nu})$为引力场与其他物质的按洛伦兹变换的总能量动量张量.将(7.178)代入(7.170)左边末项，并将它移到右边，得

$$\Box h_{\mu\nu}+\frac{\partial^2 h^{\lambda}{}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}-\frac{\partial^2 h^{\lambda}{}_{\mu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}}-\frac{\partial^2 h^{\lambda}{}_{\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}}=-\frac{16\pi G}{c^2}\mathscr{T}_{\mu\nu}, \tag{7.181}$$

$$\mathscr{T}_{\mu\nu}=S_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}S. \tag{7.182}$$

(7.170)、(7.177)和(7.181)都等价于(7.166)，都是严格的引力场方程，是爱因斯坦场方程的不同表达形式.

§7.10 爱因斯坦引力场方程的自洽性与完备性，坐标条件，谐和坐标

爱因斯坦场方程(7.165)或(7.166)两边都是四维二阶对称张量. 这种张量的独立分量共有

$$4^2 - (4^2 - 4)/2 = 10$$

个. 一般说来这种张量方程共有 10 个独立方程. 场方程的未知函数 $g_{\mu\nu}$ 也组成四维二阶对称张量,独立未知函数的个数也是 10. 似乎爱因斯坦场方程恰足以确定所需的未知函数 $g_{\mu\nu}$. 其实不然. 这是因为(7.165)的左边服从恒等式(7.87),右边服从方程(7.147). 好在两边服从的关系式是相洽的,这便是爱因斯坦场方程的自洽性. 自洽方程

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right)_{;\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}{}_{;\nu}, \quad \mu = 0,1,2,3, \tag{7.183}$$

是四个恒等式. 它使爱因斯坦场方程中独立方程的个数降为 10 − 4 = 6. 要补充 4 个方程才足以确定 10 个未知函数 $g_{\mu\nu}$. 不过这种不确定性只是表面的. 由于爱因斯坦场方程的广义协变性,如果一组度规函数$(g_{\mu\nu}(x))$满足此方程,则由任意坐标变换 $x \to x'$ 导致的新度规函数$(g'_{\mu\nu}(x'))$必也满足此方程. 爱因斯坦场方程解的不确定是它的广义协变性的表现. 要确定解必先确定坐标. 确定 4 个坐标的取法恰提供 4 个条件,称为坐标条件,这便足以从爱因斯坦场方程中定解. 在选定坐标后爱因斯坦场方程足以确定时空度规,从而确定引力场,这就是爱因斯坦引力场方程的完备性.

广义相对论中常选用谐和坐标. 谐和坐标条件是

$$\Gamma^\lambda \equiv g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0, \quad \lambda = 0,1,2,3. \tag{7.184}$$

这一组 4 个条件在坐标变换中是不协变的,因而可选出一组特别的坐标,称为谐和坐标.

设随意选择的一组坐标 x 不满足条件(7.184),可考虑坐标变换 $x \to x'$,在新坐标系中仿射联络可由(7.28)求得. 微分(7.5)式,适当改变标号名称后得

$$\frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} = -\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^\nu}. \tag{7.185}$$

代入(7.28),可将它写为

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} - \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^\nu}. \tag{7.186}$$

两边乘 $g'^{\mu\nu}$后对 μ 和 ν 求和,由(7.184)和(7.15)得

$$\Gamma'^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \Gamma^{\lambda'} - g^{\mu'\nu'} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}}. \tag{7.187}$$

要求新坐标系$(x'^{\mu}(x))$符合谐和条件(7.184),即要求 $\Gamma'^{\lambda}=0$,必须且只须它满足方程

$$g^{\lambda\kappa}\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\kappa}}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\Gamma^{\lambda},\qquad \mu=0,1,2,3. \tag{7.188}$$

可见恒可通过求解这组方程找到谐和坐标.

按(7.184)和(7.47),

$$\Gamma^{\lambda}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\lambda\kappa}\left(\frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}\right). \tag{7.189}$$

由(7.14)得

$$g^{\lambda\kappa}\frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}}=-g_{\kappa\mu}\frac{\partial g^{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu}},$$

由(7.52)得

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\sqrt{-g}.$$

代入(7.189)得

$$\Gamma^{\lambda}=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}(\sqrt{-g}g^{\lambda\kappa}). \tag{7.190}$$

谐和坐标条件(7.184)可表为

$$\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}(\sqrt{-g}g^{\lambda\kappa})=0. \tag{7.191}$$

比较(7.190)和(7.56)知,可将达朗贝尔算符对函数 ϕ 的作用表为

$$\Box\phi=g^{\lambda\kappa}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\kappa}}-\Gamma^{\lambda}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\lambda}}. \tag{7.192}$$

与(7.188)比较知,原来谐和坐标满足广义协变的达朗贝尔方程.在三维空间中将满足拉普拉斯方程的函数称为谐和函数.达朗贝尔算符可视为拉普拉斯算符在四维时空中的推广.达朗贝尔方程的解可称为四维时空中的谐和函数.既然条件(7.184)规定的坐标满足达朗贝尔方程,是四维时空中的谐和函数,称它们为谐和坐标就是很自然的.在闵可夫斯基时空中取笛卡儿坐标(x^{μ}),显然有 $\Gamma^{\lambda}=0$ 且 $\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\kappa}}=0$,这一组坐标符合谐和条件(7.188).闵可夫斯基时空中的笛卡儿坐标是谐和坐标.一般时空中的谐和坐标是笛卡儿坐标的推广.

习 题 七

1. 直接由仿射联络的变换公式(7.28)证明 $A^{\mu}+\delta A^{\mu}$ 按 $x+\delta x$ 点的反变矢量变换,其中 δA^{μ} 由(7.29)定义.

2. 试证若对任一张量$(B^{\mu_1',\mu_2',\cdots}_{\mu,\nu_1',\nu_2',\cdots})$,(7.34)定义的 $S^{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_1',\mu_2',\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_1',\nu_2',\cdots}$ 均组成张量,则

(7.34)右边的 $A^{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu}_{\nu_1,\nu_2,\cdots}$ 也组成张量.

3. 试证(7.34)定义的张量乘积的协变微商遵从莱布尼茨规则:

$$S^{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_1',\mu_2',\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_1',\nu_2',\cdots;\nu} = A^{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu}_{\nu_1,\nu_2,\cdots;\nu} B^{\mu_1',\mu_2',\cdots}_{\mu,\nu_1',\nu_2',\cdots} + A^{\mu_1,\mu_2,\cdots\mu}_{\nu_1,\nu_2,\cdots} B^{\mu_1',\mu_2',\cdots}_{\mu,\nu_1',\nu_2',\cdots;\nu} \quad . \tag{7.193}$$

4. 试证

$$g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = 0. \tag{7.194}$$

5. 试证

$$V^{\mu}_{;\nu} = g^{\mu\lambda} V_{\lambda;\nu}, \quad V_{\mu;\nu} = g_{\mu\lambda} V^{\lambda}_{;\nu}, \tag{7.195}$$

即升降指标和协变微商两种运算可交换次序.

6. 试证质点在引力场和电磁场中的运动方程(7.128)有满足条件(7.126)的解.

7. 设标量场 $\phi(x)$ 具(长度)$^{-1}$量纲,它在引力场中的作用量为

$$S_{\mathrm{s}} = -\frac{b}{2c}\int\left(g^{\mu\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\nu}} + \frac{1}{\lambda_{\mathrm{s}}^{2}}\phi^{2}\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^{4}x, \tag{7.196}$$

b 和 λ_{s} 为常数.问此二常数应具何量纲.

8. 请导出上题中标量场 $\phi(x)$ 在引力场中的运动方程.

9. 请导出第 7 题中标量场 $\phi(x)$ 的能量动量张量,并进而导出此标量场中的引力场方程.

10. 设质点在引力场和第 7 题的标量场中运动,作用量为

$$S_{\mathrm{p}} = \int_{x(1)}^{x(2)} (\eta\phi(x) - m_0 c)\sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}}, \tag{7.197}$$

η 为常数.问此常数的量纲.

11. 请导出上题中质点在引力场和标量场作用下的运动方程.

12. 设标量场和质点的作用量为

$$S_{\mathrm{m}} = S_{\mathrm{s}} + S_{\mathrm{p}}, \tag{7.198}$$

其中 S_{s} 由(7.196)表示,S_{p} 由(7.197)表示.请导出标量场在引力场和质点作用下的运动方程.

13. 请导出作用量为(7.197)的质点的能量和动量的表达式.

14. 请导出作用量为(7.198)的标量场和质点的能量动量张量,并导出引力场在它们作用下的运动方程.

15. 用

$$S_{\mathrm{p}} = \int_{\tau(1)}^{\tau(2)}\left[-m_0 c\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}} - \eta\phi(x(\tau))\right]\mathrm{d}\tau \tag{7.199}$$

代替(7.197),问常数 η 的量纲,并请重复 11～14 诸题中的讨论.

第八章　引力场方程的解及其应用

§8.1　静态引力场方程

考虑静止质量分布产生的引力场,这种引力场本身也与时间无关,称为静态的.静态引力场的具体定义是:存在坐标系,其中有一个时间坐标 x^0 和三个空间坐标 x^1、x^2、x^3,两个无穷靠近的时空点间的微分时空距离平方为

$$(\mathrm{d}s)^2 = -f^2(\mathrm{d}x^0)^2 + \sum_{i,j=1}^{3} \gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \tag{8.1}$$

即可分解为微分时间距离平方 $-f^2(\mathrm{d}x^0)^2$ 与微分空间距离平方

$$(\mathrm{d}\sigma)^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{8.2}$$

之和,且 f 与 γ_{ij} 皆只是空间坐标 x^1、x^2、x^3 的函数,而与时间坐标 x^0 无关.由(8.1)得度规张量诸分量

$$g_{00} = -f^2,\quad g_{0i} = g_{i0} = 0,\quad g_{ij} = \gamma_{ij},\quad i,j = 1,2,3; \tag{8.3}$$

再由(7.47)得仿射联络诸分量

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma^{i}_{jk} = \bar{\Gamma}^{i}_{jk} \equiv \frac{1}{2}\sum_{i'=1}^{3}\gamma^{ii'}\left(\frac{\partial \gamma_{i'k}}{\partial x^j} + \frac{\partial \gamma_{ji'}}{\partial x^k} - \frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial x^{i'}}\right),\\
&\Gamma^{0}_{ij} = \Gamma^{i}_{j0} = \Gamma^{i}_{0j} = \Gamma^{0}_{00} = 0,\\
&\Gamma^{0}_{i0} = \Gamma^{0}_{0i} = \frac{f_i}{f},\quad \Gamma^{i}_{00} = ff^i,
\end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

其中拉丁上下标 i,j 和 k 的取值皆从 1 到 3, $f_i \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ 组成四维时空中三维子空间的协变矢量, $f^i \equiv \sum\limits_{j=1}^{3}\gamma^{ij}f_j$ 组成相应的三维反变矢量, $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ 为三维子空间的仿射联络.由(7.81)、(7.59)、(8.4)和(7.53)便可算得里奇张量诸分量

$$\left.\begin{aligned}
&R_{ij} = \bar{R}_{ij} + \frac{f_{ij}}{f},\quad R_{i0} = R_{0i} = 0,\quad i,j = 1,2,3,\\
&R_{00} = -f\Delta f.
\end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

其中$(\bar{R}_{ij})$为三维子空间的里奇张量;

$$f_{ij} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial x^j} - \sum_{k=1}^{3}\bar{\Gamma}^{k}_{ij}f_k = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j} - \sum_{k=1}^{3}\bar{\Gamma}^{k}_{ij}f_k \tag{8.6}$$

为三维子空间中协变矢量(f_i)的协变微商，组成三维二阶协变张量；

$$\Delta f \equiv \sum_{i=1}^{3} f^i{}_{;i} \equiv \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{3}\bar{\Gamma}^i{}_{ij}f^j\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{\gamma}f^i) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\gamma}\sum_{j=1}^{3}\gamma^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \tag{8.7}$$

为三维子空间的标量，γ 为三维度规张量(γ_{ij})的行列式；

$$\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\gamma}\sum_{j=1}^{3}\gamma^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \tag{8.8}$$

为一般三维空间的拉普拉斯算符. 由(8.3)知

$$\sqrt{-g} = f\sqrt{\gamma}, \tag{8.9}$$

再由(8.5)的末式得

$$\sqrt{-g}R^0{}_0 = -\sqrt{-g}\,\frac{1}{f^2}R_{00} = \sqrt{\gamma}\Delta f. \tag{8.10}$$

混合张量密度$(\sqrt{-g}R^\mu{}_\nu)$的其余分量为

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{-g}R^i{}_j &= f\sqrt{\gamma}\bar{R}^i{}_j + \sqrt{\gamma}f^i{}_{;j}, \\ \sqrt{-g}R^i{}_0 &= \sqrt{-g}R^0{}_i = 0, \end{aligned}\right\} \quad i,j = 1,2,3. \tag{8.11}$$

采用爱因斯坦场方程(7.177)的混合张量形式

$$R^\mu{}_\nu = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu T\right). \tag{8.12}$$

设场源为一组静止的质点. 按(7.140)，这种场源的能量动量混合张量密度只有 00 分量

$$\sqrt{-g}T^0{}_0(x) = \sum_n m_{0n}c\frac{\mathrm{d}x_{n0}}{\mathrm{d}\tau_n}\delta^3(x - x_n)$$

$$= \sum_n(-f(x)m_{0n}c^2)\delta^3(x - x_n) \tag{8.13}$$

不恒为零. 可见 $T = T^0{}_0$，

$$\sqrt{-g}\left(T^0{}_0 - \frac{1}{2}\delta^0{}_0 T\right) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}T^0{}_0$$

$$= -\frac{f(x)}{2}\sum_n m_{0n}c^2\delta^3(x - x_n). \tag{8.14}$$

又由于

$$\int\delta^4(x - x_n)\mathrm{d}^4x = \begin{cases} 1, & \text{若 } x_n \text{ 在积分区域内}, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases} \tag{8.15}$$

是标量，$\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x$ 也是标量，可知$\dfrac{1}{\sqrt{-g}}\delta^4(x - x_n)$是标量. 在局域静止无引力惯性笛卡儿坐标系中，标量

$$\mathscr{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_n m_{0n}c^3\int_{-\infty}^{\infty}\delta^4(x-x_n)\mathrm{d}\tau_n$$
$$= \sum_n m_{0n}c^2\delta^3(x-x_n) \tag{8.16}$$

是静止质点系的能量密度.而对静止质点系,标量密度

$$\rho(x)\equiv\frac{1}{c^2}\sqrt{-g(x)}\mathscr{E}_0(x) = \sum_n m_{0n}c\int_{-\infty}^{\infty}\delta^4(x-x_n)\mathrm{d}\tau_n$$
$$= \sum_n m_{0n}f(x)\delta^3(x-x_n) \tag{8.17}$$

表示了质量密度的空间分布.将(8.10)和(8.13)代入(8.12),定义

$$\Phi(x) = c^2 f(x), \tag{8.18}$$

再用(8.17)便可将引力场方程的 00 分量方程表为

$$\sqrt{\gamma}\Delta\Phi(x) = 4\pi G\rho(x). \tag{8.19}$$

这是一个广义三维空间的泊松方程,源函数为 $\rho(x)$,未知场函数为 $\Phi(x)$.用(8.8)可将此方程明显地表成偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\gamma}\sum_{j=1}^{3}\gamma^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right) = 4\pi G\rho. \tag{8.20}$$

场方程(8.12)的 $0i$ 和 $i0$ 分量方程($i=1,2,3$)为恒等式 $0=0$, ij 分量方程($i,j=1,2,3$)为

$$f\sqrt{\gamma}\bar{R}^i{}_j = -\frac{4\pi G}{c^2}\delta^i{}_j\rho - \sqrt{\gamma}f^i{}_j. \tag{8.21}$$

在作分析时,(8.20)作为未知函数 $\Phi(x)$的方程,其中三维空间的度规张量(γ^{ij})被当作已知的;(8.21)作为未知函数组 $\gamma_{ij}(x)$的方程,其中时间度规 f^2 被当作已知的.在实际计算中 f 与 γ_{ij}均为未知函数,要由方程组(8.20)和(8.21)联立求解.值得注意的是:由与(7.154)比较可看出,(8.19)与牛顿静态引力场方程非常相像.

§8.2 中心对称静态引力场,爱因斯坦引力场方程的施瓦氏①解,伯克霍夫②定理

静态引力场中时空微分距离平方的表达式(8.1)在加上中心对称条件并采用以对称中心为原点的球坐标后可表为③

$$(\mathrm{d}s)^2 = A(r)(\mathrm{d}r)^2 + r^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2] - f^2(r)(\mathrm{d}x^0)^2. \tag{8.22}$$

---

① K. Schwarzschild, S. B. preuss Akad. Wiss (1916) 189.

② G. D. Birkhoff, Relativity and Modern Physics (Havward University Press, Cambridge 1923) p. 253.

③ 参阅本丛书第一卷《经典力学》§10.4(科学出版社 2002).

其中三维空间协变度规张量是对角的,非零分量只有

$$\gamma_{rr} = A(r), \quad \gamma_{\theta\theta} = r^2, \quad \gamma_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta; \tag{8.23}$$

三维反变度规张量因而也是对角的,非零分量只有

$$\gamma^{rr} = \frac{1}{A(r)}, \quad \gamma^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad \gamma^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}. \tag{8.24}$$

由(8.23)得

$$\sqrt{\gamma} = \sqrt{A}r^2\sin\theta. \tag{8.25}$$

由(8.4)、(8.23)和(8.24)得仿射联络的非零分量

$$\Gamma^0_{r0} = \Gamma^0_{0r} = \frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}, \quad \Gamma^r_{00} = \frac{f}{A}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}, \tag{8.26}$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{r}{A}, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{r}{A}\sin^2\theta, \tag{8.27}$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \tag{8.28}$$

$$\Gamma^\varphi_{\varphi r} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \cot\theta. \tag{8.29}$$

三维矢量(f_i)和(f^i)分别都只有一个非零分量,即

$$f_r = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}, \quad f^r = \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}. \tag{8.30}$$

张量(f_{ij})是对角的,非零分量为

$$f_{rr} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{2A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}, \quad f_{\theta\theta} = \frac{r}{A}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}, \quad f_{\varphi\varphi} = \frac{r\sin^2\theta}{A}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}. \tag{8.31}$$

场方程(8.20)成为

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^2}{\sqrt{A}}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right) = 4\pi G\rho. \tag{8.32}$$

在选用球坐标后,以原点为对称中心的球对称质量密度分布可表为

$$\rho = \bar{\rho}(r)\sqrt{\gamma} = \bar{\rho}(r)\sqrt{A}r^2\sin\theta. \tag{8.33}$$

代入上式得

$$\frac{1}{\sqrt{A}r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^2}{\sqrt{A}}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right) = 4\pi G\bar{\rho}(r). \tag{8.34}$$

由(8.27)~(8.29)还可算得三维子空间的里奇张量$(\bar{R}_{ij})$,它也是对角的,非零分量为

$$\bar{R}_{rr} = -\frac{1}{rA}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}, \quad \bar{R}_{\theta\theta} = \frac{1}{A} - \frac{r}{2A^2}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} - 1, \quad \bar{R}_{\varphi\varphi} = \bar{R}_{\theta\theta}\sin^2\theta. \tag{8.35}$$

考虑到(8.33),场方程(8.21)的协变形式可写成

$$f\bar{R}_{ij} = -\frac{4\pi G}{c^2}\gamma_{ij}\bar{\rho} - f_{ij}. \tag{8.36}$$

由于其中每一项的张量都是对角的，这组方程中的非对角分量方程都是恒等式 $0=0$；由(8.23)、(8.31)和(8.35)知其中 rr 和 $\theta\theta$ 两对角分量方程分别为

$$\left(\frac{\Phi}{r}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right)\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}-\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}r^2}=4\pi GA\,\bar{\rho},\tag{8.37}$$

$$\left(\frac{1}{A}-\frac{r}{2A^2}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}-1\right)\Phi+\frac{r}{A}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}=-4\pi Gr^2\bar{\rho},\tag{8.38}$$

$\varphi\varphi$ 对角分量方程只是在 $\theta\theta$ 对角分量方程(8.38)两边同乘以 $\sin^2\theta$，因而不是独立的. 设静止质量只分布在有限区域中，在某一有限半径外 $\bar{\rho}=0$. 先在 $\bar{\rho}=0$ 的外部空间求解场方程(8.34)、(8.37)和(8.38). 在此区域中它们成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^2}{\sqrt{A}}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right)=0,\tag{8.39}$$

$$\left(\frac{\Phi}{r}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right)\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}-\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}r^2}=0,\tag{8.40}$$

$$\left(\frac{1}{A}-\frac{r}{2A^2}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}-1\right)\Phi+\frac{r}{A}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}=0.\tag{8.41}$$

做出(8.39)左边的全微商得

$$\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{2A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}\right)\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}+\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}r^2}=0.$$

与(8.40)相加得

$$\frac{1}{rA}\left(\Phi\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}+2A\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right)=0.$$

在 rA 有限处，此式左边的括号为零，从而

$$\frac{\mathrm{d}A\Phi^2}{\mathrm{d}r}=\Phi\left(\Phi\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}+2A\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right)=0.$$

可见

$$Af^2=\frac{1}{c^2}A\Phi^2=\text{常数}.\tag{8.42}$$

无穷远处，引力消失，时空应成为平直的. 用球坐标表示，这种平直时空的微分距离平方为

$$(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}r)^2+r^2[(\mathrm{d}\theta)^2+\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2]-(\mathrm{d}x^0)^2.\tag{8.43}$$

与(8.22)比较知，上述无穷远处的边条件为

$$\lim_{r\to\infty}A(r)=\lim_{r\to\infty}f(r)=1.\tag{8.44}$$

(8.42)中的常数在无穷远处为 1，因而处处为 1，即

$$A(r)=\frac{1}{f^2(r)}.\tag{8.45}$$

和(8.18)一起，代入(8.39)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}f^2}{\mathrm{d}r}\right)=0.$$

此式在边条件(8.44)下的解为

$$f^2 = 1 - \frac{\kappa}{r}, \tag{8.46}$$

κ 为积分常数.代入(8.45)右边得

$$A(r) = \left(1 - \frac{\kappa}{r}\right)^{-1}. \tag{8.47}$$

用此式和(8.18)可将真空中的 $\theta\theta$ 分量方程(8.41)写成

$$f^2 + r\frac{\mathrm{d}f^2}{\mathrm{d}r} - 1 = 0.$$

(8.46)显然符合此方程.因此,(8.46)和(8.47)是真空中引力场方程(8.39)~(8.41)的解.

设在 $r \geqslant a$ 处已无质量分布.将(8.32)两边在半径为 a,球心在原点的球内积分.设$\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}$在球心 $r=0$ 处有界,左边积得

$$\frac{c^2}{2}\left(r^2\frac{\mathrm{d}f^2}{\mathrm{d}r}\right)_{r=a}\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 2\pi c^2\kappa,$$

这里用了场方程在 $r=a$ 处的解(8.45)和(8.46).右边积得 $4\pi GM$,其中

$$M \equiv \int_0^a \mathrm{d}r\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\rho \tag{8.48}$$

定义为球内的总质量.两边比较得积分常数

$$\kappa = \frac{2GM}{c^2}. \tag{8.49}$$

至此解得中心对称静质量分布外面的引力场,在采用以对称中心为原点的球坐标后,它表现为时空微分距离平方的表达式

$$(\mathrm{d}s)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}(\mathrm{d}r)^2 + r^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2] - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)(\mathrm{d}x^0)^2. \tag{8.50}$$

这便是爱因斯坦引力场方程的施瓦氏解.此解适用于质量分布以外的区域,可令其中的 r 趋于无穷.在 r 很大,以致$\frac{2GM}{c^2 r}$为小量处,引力场成为弱场,近似(7.162)成立.牛顿引力势恰为(7.152)所示,只是其中的质量 M 现在由(8.48)表示.换句话说,(8.48)所示的 M 确实对应观察到的静质量分布的总质量.不过,(8.17)表明,这个总质量并非各质点质量的简单和,求和中要在处于 x 点的质点质量上乘以权重 $f(x)$,代表引力场对总质量的影响.

场方程(7.177)和(8.12)都表明,在质量分布区域以外,即在施瓦氏解适用的区域中,四维时空的里奇张量为零.然而(8.35)和(8.47)表明,在此区域中三维空间里奇张量有不为零的对角分量

$$\bar{R}_{rr} = \frac{\kappa}{r^3\left(1 - \frac{\kappa}{r}\right)}, \quad \bar{R}_{\theta\theta} = -\frac{\kappa}{2r}, \quad \bar{R}_{\varphi\varphi} = -\frac{\kappa}{2r}\sin^2\theta, \tag{8.51}$$

黎曼张量自然也不会是零.空间成为弯曲的,属非欧几里得空间.由(7.76)、(8.22)、(8.46)、(8.45)和(8.26)~(8.29)算得,此区域中四维时空黎曼张量有非零分量

$$R_{0r0r} = \frac{\kappa}{r^3}, \quad R_{0\theta0\theta} = -\frac{\kappa}{2r}\left(1 - \frac{\kappa}{r}\right), \quad R_{0\varphi0\varphi} = -\frac{\kappa}{2r}\left(1 - \frac{\kappa}{r}\right)\sin^2\theta. \tag{8.52}$$

可见它所嵌入的四维时空也不是平直的,属非闵可夫斯基时空.质量对空间和时空的影响都不局限于它所在的空间点和它所走的世界线.它对空间和时空性质的影响是全局性的.这和电荷对空间电磁性质的影响类似.一个电荷不仅在它所在的位置产生电场,而且在整个空间产生库仑电场,影响也是全局性的.不过这种对全局的影响又是由微分方程表达的,即全局场与局部源的关系是逐点建立的.

施瓦氏解(8.50)是静态的,因为其中的四维时空坐标中有一个时间坐标 x^0 和三个空间坐标 r、θ、φ,微分时空距离平方是微分空间距离平方与微分时间距离平方之和,且度规张量只是空间坐标的函数而与时间坐标无关.这正符合§8.1开头对静态引力场的定义.一个静止的中心对称质量分布的外面,引力场由这个解表示.由于是在真空中求解,质量分布的影响只在最后确定积分常数 κ 时出现.解的静态性质并非来源于质量分布的静态,而来源于对解本身的静态假定(8.22).如果放弃静态假定,但仍保持中心对称,那么所得的解应适用于中心对称质量分布外面的空间,这个中心对称质量分布却可以与时间有关,例如沿径向各向同性地膨胀、收缩和振动(脉动,呼吸模式).中心对称的解在绕对称中心的转动变换中应不变,只能与转动变换中的不变量有关.采用以对称中心为原点的球坐标,这些转动不变量是

$$t, \quad \mathrm{d}t, \quad r, \quad \boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = r\mathrm{d}r, \quad (\mathrm{d}\boldsymbol{r})^2 = (\mathrm{d}r)^2 + r^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2].$$

微分时空距离平方可表为

$$(\mathrm{d}s)^2 = C(r,t)\{(\mathrm{d}r)^2 + r^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2]\} + D(r,t)r^2(\mathrm{d}r)^2 + 2E(r,t)cr\mathrm{d}r\mathrm{d}t - F(r,t)c^2(\mathrm{d}t)^2. \tag{8.53}$$

定义新的径向坐标

$$r' \equiv \sqrt{C(r,t)}\,r,$$

这相当于在不同径向位置和不同时刻重新定义长度单位.由此解出函数 $r(r',t)$,并微分得 $\mathrm{d}r$ 与 $\mathrm{d}r'$ 和 $\mathrm{d}t$ 的关系.将它们一并代入(8.53)右边得

$$(\mathrm{d}s)^2 = D'(r',t)(\mathrm{d}r')^2 + r'^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2] + 2E'(r',t)\mathrm{d}r'\mathrm{d}t - F'(r',t)c^2(\mathrm{d}t)^2, \tag{8.54}$$

其中

$$D'(r',t) \equiv [C(r,t) + r^2D(r,t)]\left(\frac{\partial r}{\partial r'}\right)^2,$$

$$E'(r',t) \equiv [C(r,t) + r^2 D(r,t)] \frac{\partial r}{\partial r'} \frac{\partial r}{\partial t} + E(r,t) cr \frac{\partial r}{\partial r'},$$

$$F'(r',t) \equiv F(r,t) - \frac{2}{c} E(r,t) r \frac{\partial r}{\partial t},$$

r 为 r' 与 t 的函数. 用微分关系

$$\mathrm{d}t' = \zeta(r',t)\left[F'(r',t)\mathrm{d}t - \frac{1}{c^2}E'(r',t)\mathrm{d}r'\right] \tag{8.55}$$

定义新的时间 t', 其中 $\zeta(r',t)$ 是一个积分因子, 保证此式右边为一全微分, 从而可以积出 $t'(r',t)$. 全微分条件要求

$$\frac{\partial}{\partial r'}[\zeta(r',t)F'(r',t)] = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}[\zeta(r',t)E'(r',t)].$$

这个方程作为 $\zeta(r',t)$ 的偏微分方程可以解出, 这一点可由下面的分析看到: 在给定初值函数 $\zeta(r',t_0)$ 后, 可由此方程解出 $\left.\frac{\partial \zeta(r',t)}{\partial t}\right|_{t=t_0}$, 从而求出 $\zeta(r',t_0+dt)$. 如此不断推进便可得 $\zeta(r',t)$. 用(8.55)可将(8.54)表为

$$(\mathrm{d}s)^2 = \left(D' + \frac{E'^2}{c^2 F'}\right)(\mathrm{d}r')^2 + r'^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2] - \frac{1}{\zeta^2 F'}c^2(\mathrm{d}t')^2.$$

将 r'、t' 重新称为 r、t, 定义 $A \equiv D' + \frac{E'^2}{c^2F'}$, $B = \frac{1}{\zeta^2 F'}$, 此式便可表为

$$(\mathrm{d}s)^2 = A(r,t)(\mathrm{d}r)^2 + r^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2] - B(r,t)c^2(\mathrm{d}t)^2. \tag{8.56}$$

如果 A、B 均与时间无关, 此式就是标准形式(8.22), 在那里 $B(r) = f^2(r)$. 这再一次证明了中心对称静态引力场可取形式(8.22). 不过现在进一步证明了: 即使质量分布与时间有关, 只要它仍是中心对称的, 所产生的引力场仍具标准形式(8.56), 只是其中度规 A 与 B 可与时间有关. 仍考虑质量分布以外区域中的引力场. 在无质量处它应满足真空中的爱因斯坦方程. 按(7.177)这就是

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{8.57}$$

(8.56)表明, 四维时空的度规张量是对角的, 非零分量只有

$$g_{00} = -B(r,t), \quad g_{rr} = A(r,t), \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta. \tag{8.58}$$

反变度规张量的非零分量只有

$$g^{00} = -\frac{1}{B(r,t)}, \quad g^{rr} = \frac{1}{A(r,t)}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}. \tag{8.59}$$

由(7.47)得仿射联络, 其中的非零分量为

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{B}}{2cB}, \quad \Gamma^0_{rr} = \frac{\dot{A}}{2cB}, \quad \Gamma^0_{0r} = \Gamma^0_{r0} = \frac{B'}{2B}; \tag{8.60}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^r_{00} = \frac{B'}{2A}, \quad \Gamma^r_{r0} = \Gamma^r_{0r} = \frac{\dot{A}}{2cA}, \quad \Gamma^r_{rr} = \frac{A'}{2A}, \\ &\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{r}{A}, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{r}{A}\sin^2\theta; \end{aligned}\right\} \tag{8.61}$$

$$\Gamma^{\theta}_{\theta r} = \Gamma^{\theta}_{r\theta} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta; \tag{8.62}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \cot\theta. \tag{8.63}$$

函数符号上方的圆点表示这个函数对时间 t 的微商，右上角的一撇表示它对坐标 r 的微商. 将所有对时间的微商置零，并令 $B = f^2$，(8.60)～(8.63)便成为(8.26)～(8.29). 将这些仿射联络表达式代入(7.59)，再将所得的黎曼张量代入(7.81)，得里奇张量，其中的非零分量为

$$R_{00} = \frac{\ddot{A}}{2c^2A} - \frac{\dot{A}}{4c^2A}\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B}\right) - \frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rA}, \tag{8.64}$$

$$R_{rr} = -\frac{\ddot{A}}{2c^2B} + \frac{\dot{A}}{4c^2B}\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B}\right) + \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rA}, \tag{8.65}$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{1}{A} - \frac{r}{2A}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) - 1, \tag{8.66}$$

$$R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta}\sin^2\theta, \tag{8.67}$$

$$R_{0r} = R_{r0} = -\frac{\dot{A}}{cAr}. \tag{8.68}$$

将它们代入场方程(8.57). 由 $R_{0r}=0$ 得 $\dot{A}=0$，A 与时间无关. 这使里奇张量中含时间微商的项全部消去. 场方程变得与静态场方程一样. 不过由于质量分布随时间变化，可能发生引力辐射，无穷远处的度规不一定是闵可夫斯基度规，而可绕闵可夫斯基度规振荡. 在这种条件下场方程的解不一定就是静态的. 究竟是何种情形，解出以后才知道. 为此，将求解过程再做一遍.

用 B 除(8.64)，A 除(8.65)，然后相加得

$$\frac{R_{00}}{B} + \frac{R_{rr}}{A} = -\frac{1}{rA}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right).$$

由于 $R_{00} = R_{rr} = 0$，此式表明

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0. \tag{8.69}$$

积分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\ln(AB) = 0,$$

$$AB = \xi(t), \tag{8.70}$$

$\xi(t)$只是时间 t 的函数，而与 r 无关. 用(8.69)消去(8.66)中的$\frac{B'}{B}$，再由 $R_{\theta\theta}=0$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r}{A}\right) = 1.$$

积分得

$$A(r)=\left(1-\frac{\kappa}{r}\right)^{-1}.$$

由于 A 与 t 无关,κ 是与 r 和 t 都无关的常数.此式与静态解中的(8.47)相同.代入(8.70)便得

$$B(r,t)=\xi(t)\left(1-\frac{\kappa}{r}\right).\tag{8.71}$$

代入(8.56)得

$$(\mathrm{d}s)^2=\left(1-\frac{\kappa}{r}\right)^{-1}(\mathrm{d}r)^2+r^2[(\mathrm{d}\theta)^2+\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2]-\xi(t)\left(1-\frac{\kappa}{r}\right)c^2(\mathrm{d}t)^2.\tag{8.72}$$

作变换

$$t'=\int\sqrt{\xi(t)}\,\mathrm{d}t,\tag{8.73}$$

将变换后的 t' 重新称为 t,并采用 κ 的表达式(8.49),(8.72)就成了静态解(8.50).可见:只要质量分布是中心对称的,不论它是否随时间作中心对称的运动,在它外面的空间中引力场就是静态的,并且由施瓦氏解(8.50)描述.这就是伯克霍夫定理.

施瓦氏解描述中心对称引力源外面的引力场.它只反映引力源的中心对称性质,并只取决于一个参数,即引力源的总质量 M.一个引力源外的观察者可以根据引力场是否符合施瓦氏解判断引力源是否中心对称,但无法判断质量在引力源中是如何分布的.它可以是一个处于对称中心的质点,也可以是一个结构复杂的球.伯克霍夫定理更进一步告诉我们,从引力场也无法判断引力源是否沿径向各向同性地运动.这种径向运动不产生引力辐射.

§8.3 质点的引力质量与惯性质量,等效原理的自洽性,质点质量的引力起源

考虑一个质点周围的引力场,它由施瓦氏解(8.50)表示,其中的参数 M 就是在无穷远处观察这个引力场测得的质点的引力质量.这可当作引力质量的定义,就像在牛顿引力理论中将(7.152)中的 M 定义为引力质量一样.现在的问题是:这样定义的引力质量是否与质点的惯性质量相等,即是否符合等效原理.等效原理是广义相对论的基础,广义相对论关于引力的一切结果必须与这一原理一致,才能自洽.按相对论,惯性质量是能量与光速平方之比,求惯性质量归结为求能量.不过,质点是带着它周围的引力场一起运动的,质点的惯性包括它周围引力场的惯性,它的能量也包括它周围引力场的能量.质点与周围引力场的能量动量张量($S_{\mu\nu}$)由(7.180)表示.利用场方程(7.170)可将它完全由引力场量表出

$$S_{\mu\nu} = -\frac{c^2}{16\pi G}\left[\Box h_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 h^\lambda{}_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h^\lambda{}_\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h^\lambda{}_\nu}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} - \eta_{\mu\nu}\left(\Box h^\lambda{}_\lambda - \frac{\partial^2 h^{\lambda\kappa}}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa}\right)\right]$$

$$= -\frac{c^2}{16\pi G}\frac{\partial}{\partial x^\kappa}Q^\kappa_{\mu\nu}, \tag{8.74}$$

其中

$$Q^\kappa_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\eta^{\lambda\kappa} + \frac{\partial h^\lambda{}_\lambda}{\partial x^\mu}\delta^\kappa{}_\nu - \frac{\partial h^\kappa{}_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h^\kappa{}_\nu}{\partial x^\mu} - \eta_{\mu\nu}\left(\frac{\partial h^\lambda{}_\lambda}{\partial x^\rho}\eta^{\rho\kappa} - \frac{\partial h^{\lambda\kappa}}{\partial x^\lambda}\right). \tag{8.75}$$

在施瓦氏解中 $h_{\mu\nu}$与时间无关,且 $h_{i0} = h_{0i} = \eta_{i0} = \eta_{0i} = 0(i=1,2,3)$,故有

$$S_{i0} = S_{0i} = 0, \quad i = 1,2,3.$$

它们表明,质点及其引力场的动量密度和能流密度都是零,动量自然也是零.这是理所当然的,因为这里施瓦氏解表示一个静止质点周围的引力场,质点和引力场都没有运动.由于 $Q^\kappa_{\mu\nu}$与时间无关,能量密度为

$$S_{00} = -\frac{c^2}{16\pi G}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}Q^i_{00}, \tag{8.76}$$

其中

$$Q^i_{00} = \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} + \frac{\partial h^\lambda{}_\lambda}{\partial x^i} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial h^{ji}}{\partial x^j} = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial h_{jj}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^j}\right). \tag{8.77}$$

推导中用了闵可夫斯基度规的表达式(7.24),表明取了笛卡儿坐标:

$$\left.\begin{aligned} &x \equiv x^1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y \equiv x^2 = r\sin\theta\sin\varphi, \\ &z \equiv x^3 = r\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{8.78}$$

将能量密度(8.76)在以原点为心的无穷大球体内积分,便得质点及其周围引力场的总能量

$$E = \int S_{00}\mathrm{d}\mathscr{V},$$

$\mathrm{d}\mathscr{V}$为体积元.在采用笛卡儿坐标后 $\mathrm{d}\mathscr{V} = \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$,这个体积分可由高斯定理化成大球表面的面积分:

$$E = -\frac{c^2}{16\pi G}\int\sum_{i=1}^{3}Q^i_{00}\mathrm{d}\sigma_i, \tag{8.79}$$

其中 $\mathrm{d}\sigma_i \equiv \frac{x^i}{r}\mathrm{d}\sigma$ 为大球表面面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的 i 分量,$\mathrm{d}\sigma$ 为面元的大小.既然是在无穷远处的大球面上计算,便可取施瓦氏解(8.50)在无穷远处的渐近形式.即以 $\varepsilon = \frac{2GM}{c^2 r}$为小量将它展成$\varepsilon$ 的幂级数,取到 ε 的一次幂.于是有

$$(\mathrm{d}s)^2 = \left[\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} - 1\right](\mathrm{d}r)^2 + (\mathrm{d}\boldsymbol{r})^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)(\mathrm{d}x^0)^2$$

$$= \left[\frac{2GM}{c^2 r} + O(\varepsilon^2)\right]\frac{1}{r^2}(\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r})^2 + (\mathrm{d}\boldsymbol{r})^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)(\mathrm{d}x^0)^2; \tag{8.80}$$

$O(\varepsilon^2)$为 ε 的不低于二次幂的各项之和,在 $r\rightarrow\infty$处为可以略去的高级小量;

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{r})^2 = (\mathrm{d}r)^2 + r^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2]. \tag{8.81}$$

由(8.80)和

$$\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} x^i \mathrm{d}x^i \tag{8.82}$$

得

$$h_{ij} = c^2(g_{ij} - \delta_{ij}) = \left[\frac{2GM}{r} + O(\varepsilon^2)\right]\frac{x^i x^j}{r^2}, \tag{8.83}$$

$$\sum_{j=1}^{3} h_{ii} = \frac{2GM}{r} + O(\varepsilon^2), \tag{8.84}$$

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^j} = \left[\frac{2GM}{r} + O(\varepsilon^2)\right]\left[1 + \delta_{ij} - \left(\frac{x^j}{r}\right)^2\right]\frac{x^i}{r^2}, \tag{8.85}$$

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^j} = \left[\frac{2GM}{r} + O(\varepsilon^2)\right]\frac{x^i}{r^2}, \tag{8.86}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\sum_{j=1}^{3} h_{jj} = -\left[\frac{2GM}{r} + O(\varepsilon^2)\right]\frac{x^i}{r^2}. \tag{8.87}$$

代入(8.77)得

$$Q^i_{00} = -\left[\frac{4GM}{r} + O(\varepsilon^2)\right]\frac{x^i}{r^2}. \tag{8.88}$$

再代入(8.79),并令 $r\to\infty$,得

$$E = \frac{c^2}{16\pi G}\lim_{r\to\infty}\int\frac{4GM}{r^2}\mathrm{d}\sigma = Mc^2. \tag{8.89}$$

携带着引力场的质点,惯性质量真的就是 M.质点的引力质量等于它的惯性质量,符合等效原理.以等效原理为基础的广义相对论引力理论的结论符合等效原理,表明等效原理自洽.

值得注意的是,在以上分析中,不论引力质量还是惯性质量都属于质点和它携带的引力场.并未区分多少成分来源于质点,多少成分来源于它周围的引力场.由于不存在不携带引力场的质点,这种质点单独的质量是原则上不可观察的.上述划分在原则上和实际上都不可能.因此可以设想:质点本无质量,质量完全由它携带的引力场提供.按此观点,不是质点的质量产生引力场,而是引力场提供质点的质量,并通过自身提供的质量产生引力场自身.引力场是自在的,并且是质量的起源.在一个只有引力而没有其他作用的世界里,引力场就是一切,质点不过是它的奇点.正是周围的引力场赋予所簇拥的奇点以质量,使之成为质点.所赋予的质量既是惯性质量又是引力质量.由于引力场即时空的度规场,引力场是一切意即度规时空就是一切,质点不过是它的奇点.这是一种颇优美的思想.可惜实际世界并非这样简单,不只有引力,而且还有其他作用,例如电磁作用.于是,爱因斯坦用他的后半生致力于引力场与电磁场的统一理论,希望将电磁场论也纳入他的世界几何理论之中.这便是他的统一场论.虽然由于后来发现的弱作用和强作用使情形更加复

杂，建立与量子概念一致的统一场论仍是当前理论物理最重大的目标．在建立统一场论的不懈努力中，粒子是场的奇点，粒子质量起源于场的思想，仍颇有启发性．

§8.4 施瓦氏奇异性与施瓦氏黑洞，克鲁斯卡[①]坐标

施瓦氏解(8.50)的度规，作为 r 的函数，有两处奇点．一是 $r\to 0$ 处，

$$g_{00}\to\infty,\quad g^{00}\to 0,\quad g_{rr}\to 0,\quad g^{rr}\to\infty;$$

另一是 $r\to\dfrac{2GM}{c^2}$处，

$$g_{00}\to 0,\quad g^{00}\to\infty,\quad g_{rr}\to\infty,\quad g^{rr}\to 0.$$

当然，只当引力源是一质点时 $r=0$ 处的奇异性才会显露，只当引力源的半径小于 $r_s\equiv\dfrac{2GM}{c^2}$时 $r=r_s$ 处的奇异性才显露．r_s 称为施瓦氏半径．施瓦氏解是由真空中的场方程(8.57)解出的．对原点处静止质点产生的施瓦氏引力场，(8.57)在原点以外处处成立．将它的两边在以原点为心，a 为半径的小球内积分，若原点非奇点必有

$$\int_a R_{\mu\nu}\sqrt{|\gamma|}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=0.$$

另一方面，由(8.14)、(8.46)、(8.49)和(8.50)知，对一个静止于原点的质点

$$T_{00}-\frac{1}{2}g_{00}T=g_{00}\left(T^0{}_0-\frac{1}{2}\delta^0{}_0T\right)$$

$$=\frac{f^3(x)}{2r^2\sin\theta}m_0c^2\delta^3(x).$$

将它在同一小球内积分得

$$\int_a\left(T_{00}-\frac{1}{2}g_{00}T\right)\sqrt{|\gamma|}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{f^2(0)}{2}m_0c^2=\infty.$$

可见，施瓦氏解在原点将不满足爱因斯坦场方程(7.177)，除非令它在原点的里奇张量以一种特殊方式趋于无穷．原点，即质点所在处，是施瓦氏解的真正奇点，也是爱因斯坦场方程的奇点．与之相较，施瓦氏解在 $r=r_s$ 处仍满足爱因斯坦场方程．r_s 处是施瓦氏解的奇点，却不是爱因斯坦场方程的奇点．人们进一步猜想，如果不将解写成标准形式(8.22)，或者说不按标准形式选择时空坐标 x^0、r、θ、φ，这一奇异性也许不会出现．这一猜想在 1960 年由克鲁斯卡证实．

---

① M. D. Kruskal, Phys. Rev. **119** (1960) 1743; C. Fronsdal, Phys. Rev. **116** (1959) 778.

克鲁斯卡引进坐标

$$u=\begin{cases}\left(\frac{r}{r_s}-1\right)^{1/2}e^{\frac{r}{2r_s}}\mathrm{ch}\frac{x^0}{2r_s}, & 如\ r>r_s,\\ \left(1-\frac{r}{r_s}\right)^{1/2}e^{\frac{r}{2r_s}}\mathrm{sh}\frac{x^0}{2r_s}, & 如\ r<r_s,\end{cases}\tag{8.90}$$

$$v=\begin{cases}\left(\frac{r}{r_s}-1\right)^{1/2}e^{\frac{r}{2r_s}}\mathrm{sh}\frac{x^0}{2r_s}, & 如\ r>r_s,\\ \left(1-\frac{r}{r_s}\right)^{1/2}e^{\frac{r}{2r_s}}\mathrm{ch}\frac{x^0}{2r_s}, & 如\ r<r_s,\end{cases}\tag{8.91}$$

以代替施瓦氏坐标中的 r 和 x^0. 微分得

$$\mathrm{d}u=\begin{cases}\frac{1}{2r_s}\left[\left(\frac{r}{r_s}-1\right)^{1/2}e^{\frac{r}{2r_s}}\mathrm{sh}\frac{x^0}{2r_s}\mathrm{d}x^0+\left(\frac{r}{r_s}-1\right)^{-1/2}e^{\frac{r}{2r_s}}\frac{r}{r_s}\mathrm{ch}\frac{x^0}{2r_s}\mathrm{d}r\right], & 若\ r>r_s,\\ \frac{1}{2r_s}\left[\left(1-\frac{r}{r_s}\right)^{1/2}e^{\frac{r}{2r_s}}\mathrm{ch}\frac{x^0}{2r_s}\mathrm{d}x^0-\left(1-\frac{r}{r_s}\right)^{-1/2}e^{\frac{r}{2r_s}}\frac{r}{r_s}\mathrm{sh}\frac{x^0}{2r_s}\mathrm{d}r\right], & 若\ r<r_s,\end{cases}$$

$$\mathrm{d}v=\begin{cases}\frac{1}{2r_s}\left[\left(\frac{r}{r_s}-1\right)^{1/2}e^{\frac{r}{2r_s}}\mathrm{ch}\frac{x^0}{2r_s}\mathrm{d}x^0+\left(\frac{r}{r_s}-1\right)^{-1/2}e^{\frac{r}{2r_s}}\frac{r}{r_s}\mathrm{sh}\frac{x^0}{2r_s}\mathrm{d}r\right], & 若\ r>r_s,\\ \frac{1}{2r_s}\left[\left(1-\frac{r}{r_s}\right)^{1/2}e^{\frac{r}{2r_s}}\mathrm{sh}\frac{x^0}{2r_s}\mathrm{d}x^0-\left(1-\frac{r}{r_s}\right)^{-1/2}e^{\frac{r}{2r_s}}\frac{r}{r_s}\mathrm{ch}\frac{x^0}{2r_s}\mathrm{d}r\right], & 若\ r<r_s.\end{cases}$$

不论 $r>r_s$ 还是 $r<r_s$,便都有

$$(\mathrm{d}u)^2-(\mathrm{d}v)^2=\frac{1}{4r_s^2}\frac{r}{r_s}e^{\frac{r}{r_s}}\left[\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}(\mathrm{d}r)^2-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)(\mathrm{d}x^0)^2\right].$$

于是,在采用克鲁斯卡坐标后,微分时空距离平方成为

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s)^2&=\frac{4r_s^3}{r}e^{-\frac{r}{r_s}}[(\mathrm{d}u)^2-(\mathrm{d}v)^2]+r^2[(\mathrm{d}\theta)^2+\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2]\\&=\frac{32G^3M^3}{c^6r}e^{-\frac{c^2r}{2GM}}[(\mathrm{d}u)^2-(\mathrm{d}v)^2]+r^2[(\mathrm{d}\theta)^2+\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2],\end{aligned}\tag{8.92}$$

其中 r 为 u 和 v 的函数,可由方程

$$\left(\frac{r}{r_s}-1\right)e^{\frac{r}{r_s}}=u^2-v^2\tag{8.93}$$

解出.(8.92)是用克鲁斯卡坐标表出的施瓦氏解,其中的度规在 $r=r_s$ 处已无奇异性,$r=0$ 处却仍是奇点.

克鲁斯卡坐标虽消去了度规在 $r=r_s$ 处的奇异性,却消除不了人们对 $r=r_s$ 处可能有的奇特物理现象的兴趣.这特别由于施瓦氏坐标 r 和 x^0 与实际观察结果有直接的联系.至少在 $r\to\infty$ 处,施瓦氏度规趋于闵可夫斯基度规,r 直接表示位置,而 $t=\frac{x^0}{c}$ 直接表示时间.在分析无穷远处观察者获得的信息时,施瓦氏坐标是方便的.考虑光沿径向的传播.在无重力惯性系中光以光速 c 直线传播,$\mathrm{d}s=0$.按

等效原理,在有重力的一般坐标系中光的传播仍有 $\mathrm{d}s=0$. 按施瓦氏解(8.50),对光的径向传播，这便是

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\pm c\left(1-\frac{r_s}{r}\right).$$

它的积分为

$$r+r_s\ln|r-r_s|+a=\pm ct, \tag{8.94}$$

a 为积分常数. 在 $r>r_s$ 的区域,右边的正号对应向外的运动,负号对应向内的运动;在 $r<r_s$ 的区域,右边的正号对应向内的运动,负号对应向外的运动. 考虑从内外两侧靠近施瓦氏半径的运动,因而在(8.94)右边取负号. 当 $r\to r_s$,左边对数的自变量趋于零,对数值趋于 $-\infty$, $t\to\infty$. 可见,不论从内侧还是从外侧,要到达施瓦氏半径处,都有 $t=\infty$. 如前所述,t 是无穷远处观察者的时间. 可见无穷远处的观察者在任何有限时间内都看不到光穿越施瓦氏奇异面. 既看不到光从外面穿进去,也看不到光从里面穿出来. 施瓦氏奇异面确有其奇异的性质.

这个结论是一般的,不局限于光,也不限于径向运动. 不论是光还是质点,都走一条测地线. 采用施瓦氏坐标,在施瓦氏引力场中的测地线方程(7.100)可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\sigma^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\sigma^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}+2\cot\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\sigma}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\sigma^2}+\frac{B'}{2A}c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2+\frac{A'}{2A}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2-\frac{r}{A}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2-\frac{r\sin^2\theta}{A}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\sigma^2}+\frac{B'}{B}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}=0, \tag{8.95}$$

其中 $B=f^2$. 第一式有特解 $\theta=\frac{\pi}{2}$. 此解对应赤道平面内的运动. 由于中心对称,任何通过中心的平面都可作赤道平面. 取此特解不失一般性. 将此解代入后二式中得

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\sigma^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}=0, \tag{8.96}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\sigma^2}+\frac{B'}{2A}c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2+\frac{A'}{2A}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2-\frac{r}{A}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2=0. \tag{8.97}$$

(8.95)与(8.96)分别有初积分

$$B\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}=\kappa, \tag{8.98}$$

$$r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\sigma}=h, \tag{8.99}$$

κ 与 h 为积分常数. 用 $B\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}$乘(8.95),$\frac{r^2}{c^2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\sigma}$乘(8.96),$\frac{A}{c^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}$乘(8.97),然后适当组

合起来,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left\{B\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left[A\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2+r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2\right]\right\}=0.$$

积分得

$$B\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left[A\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2+r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2\right]=b, \tag{8.100}$$

b 为积分常数.对于质点,可取 $\sigma=\tau$ 为质点本身的原时,这使 $b=1$,(8.100)就是(7.126).对于光,$\mathrm{d}s=0$ 要求 $b=0$,σ 为一适当选取的表示进程的参数.注意(8.98)式,在 $r\neq r_s$ 处 $B\neq 0$,对于一个时间进程$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\neq 0$,因此常数 $\kappa\neq 0$.将(8.98)和(8.99)代入(8.100),经整理得

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2=\kappa^2c^2-\left(bc^2+\frac{h^2}{r^2}\right)B. \tag{8.101}$$

在 $r\sim r_s$ 处,$B\sim 0$,$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\simeq\pm\kappa c$.用它除(8.98)两边得

$$B\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\simeq\pm\frac{1}{c}. \tag{8.102}$$

它的积分

$$r+r_s\ln|r-r_s|+a\simeq\pm ct$$

在 $r\to r_s$ 处趋于(8.94),与(8.94)只有有限的差别.这使得在讨论光或质点在施瓦氏奇异面附近的运动时可用(8.94)式.可见(8.94)后面关于光沿径向趋近和穿越施瓦氏面所需时间的讨论适用于光与质点以任何方式趋近和穿越施瓦氏面的运动.即在无穷远处的观察者看来,光与质点不论从外侧还是从内侧趋近和穿越施瓦氏奇异面都需要无穷长时间.在任何有限时间内是看不到这种趋近和穿越的.

按等效原理,每一处的观察者都用该处局域无引力惯性坐标系的时标量时间,量得的是该处的原时.在施瓦氏引力场中,r 处原时间

$$\Delta\tau=\sqrt{B(r)}\Delta t \tag{8.103}$$

是无穷远处时间 Δt 的$\sqrt{B(r)}$倍.在 $r>r_s$ 处,$0<\sqrt{B(r)}<1$ 为一有限实因子.在无穷远处看来无穷长的时间,在 $r>r_s$ 处的观察者看来也是无穷长时间.因此,趋近与穿越施瓦氏奇异面的运动,在奇异面外的每一观察者看来都需要无穷长时间.在任何有限时间内他们都看不到这种趋近与穿越.奇异面上的任何有限时间过程,在奇异面外的观察者看来都经历了无穷长时间.这是一种无限的时间膨胀,或者说是一种无限的引力红移.一切好像都在奇异面上停了下来,这就是 $r=r_s$ 球面上的施瓦氏奇异性.

在有限时间内奇异面外的观察者看不到跨越奇异面的运动并不表明没有跨越奇异面的运动.如果观察者就在奇异面上,他记录的便是奇异面上的原时.由于

$B(r_s)=0$,将 $\Delta t=\infty$ 代入(8.103)的右边,左边得到的奇异面上的原时可以是有限的.或者说,奇异面上过程的有限时间在奇异面外的记录中被无限放大了.一个随质点运动的观察者记录的时间则是质点的原时.在他经过奇异面时记录的质点径向速度按(8.101)应为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}=\pm\,\kappa c,$$

是有限的.他发现自己正常地跨越了奇异面,并未遇到阻滞.可见奇异面只妨碍对运动的观察,并不妨碍运动本身.

在 $r<r_s$ 处 g_{00} 变成正的,g_{rr} 变成负的.在变到给定点的局域无引力惯性系后,时间轴将沿 r 方向,t 方向上则是空间轴.r 成了时间坐标,t 成了空间坐标.如果这个区域中有观察者,且他们可以比较彼此的观测结果,如果因果律在这个区域中仍然正确,则他们各自坐标系中的时序应彼此相同.例如 r 增大的方向对他们来说都是将来,r 减小的方向都是过去.或者反过来,r 减小的方向对他们来说都是将来,r 增大的方向都是过去.在前一种情形中,$r<r_s$ 处的所有物质,包括光,都向 r 增大的方向运动,最终越出 $r=r_s$ 处的界面,虽然 $r>r_s$ 处的观察者在有限时间内看不到这种穿越.若是这种情形,$r\leqslant r_s$ 的球形区域称为施瓦氏白洞,简称白洞.在后一种情形中,$r<r_s$ 处的所有物质,包括光,都向 r 减小的方向运动,不会越出 $r=r_s$ 处的界面.若是这种情形,$r\leqslant r_s$ 的球形区域称为施瓦氏黑洞,简称黑洞.

施瓦氏解(8.50)只适用于没有质量分布的区域.只当质量分布半径 R 小于施瓦氏半径

$$r_s\equiv\frac{2GM}{c^2}\tag{8.104}$$

时才会出现施瓦氏奇异性,才会出现白洞或黑洞.太阳质量为

$$M_\odot=1.989\times10^{30}\,\mathrm{kg},\tag{8.105}$$

将它和引力常数(7.153)代入(8.104),算得太阳的施瓦氏半径为 2.95km.而太阳半径却有 6.96×10^5km,远大于它的施瓦氏半径.太阳周围不会出现施瓦氏奇异性.自获得施瓦氏解以来,人们以极大的兴趣在宇宙中寻找白洞与黑洞,然而至今未发现它们存在的确凿证据.所有有确实数据的天体,半径都大于它们各自的施瓦氏半径.致使白洞与黑洞的研究仍停留在理论探讨阶段.不过有一类天体,即中子星,半径与它们各自的施瓦氏半径已很接近,只大若干倍.这使人们可相当接近施瓦氏奇异性,检验广义相对论的引力论,例如检测中子星周围的巨大引力红移是否符合广义相对论的预言等.

§8.5 中心对称质量与电荷分布周围的引力场与电场，场方程的莱斯纳[①]解，伯克霍夫定理的推广

中心对称是指存在一对称中心，空间一点各量的取值只与该点与对称中心的距离有关，而与该点的方位无关．采用以对称中心为原点的施瓦氏坐标 r、θ、φ 和 t．中心对称指各量取值的空间分布只与 r 有关，而与 θ、φ 无关．只要求质量和电荷的分布是中心对称的，并不要求这种分布是静态的．即允许质量和电荷沿径向各向同性地运动．设这种分布有一定范围，在这范围以外质量密度和电荷密度都是零．这一范围必是有一定半径的以原点为心的球．本节要求解的便是这一范围以外的引力场和电场．

§8.2 已确定了中心对称条件下时空微分距离平方的标准形式(8.56)，其中有两个未知函数 $A(r,t)$和 $B(r,t)$．电磁场由标势 ϕ 和矢势 $\mathbf{A}$ 表示．在中心对称条件下，矢势只有径向分量 A_r 非零，且 ϕ 与 A_r 也只能是 r 和 t 的函数，与 θ、φ 无关．可取 $A_r=0$ 的规范，即用规范变换令 $A_r=0$．在此规范中，中心对称电磁场只由一个标势 $\phi(r,t)$表示．张量($F_{\mu\nu}$)中，中心对称电磁场只有一个非零分量，就是径向电场

$$\mathscr{E}_r = cF_{r0} = -cF_{0r} = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \equiv -\phi'. \tag{8.106}$$

用度规张量(8.59)，可得($F^{\mu\nu}$)的惟一非零分量

$$F^{r0} = -F^{0r} = \frac{1}{ABc}\phi' \tag{8.107}$$

和($F_\mu^{\ \nu}$)的两个非零分量

$$F_0^{\ r} = \frac{1}{Ac}\phi', \quad F_r^{\ 0} = \frac{1}{Bc}\phi'. \tag{8.108}$$

电磁场方程(7.132)中的 θ 分量方程和 φ 分量方程都是恒等式 $0=0$，r 分量方程和 t 分量方程在真空中成为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{r^2}{\sqrt{AB}}\phi'\right) = 0 \quad 和 \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{\sqrt{AB}}\phi'\right) = 0. \tag{8.109}$$

由此得初积分

$$\frac{r^2}{\sqrt{AB}}\phi' = a, \tag{8.110}$$

a 为与 r 和 t 都无关的常数．将(8.106)～(8.108)代入(7.140)，得真空中电磁场的能量动量张量($T_{\mu\nu}$)．它的非零分量是

---

① H. Reissner, Ann. Phys., Lpz., **50** (1916) 106.

$$\left.\begin{aligned} T_{00} &= \frac{\epsilon_0}{2A}\phi'^2, \quad T_{rr} = -\frac{\epsilon_0}{2B}\phi'^2, \\ T_{\theta\theta} &= \frac{\epsilon_0 r^2}{2AB}\phi'^2, \quad T_{\varphi\varphi} = T_{\theta\theta}\sin^2\theta. \end{aligned}\right\} \tag{8.111}$$

由此还可得

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = 0. \tag{8.112}$$

将(8.64)~(8.68)代入场方程(7.177)左边,(8.58)、(8.111)和(8.112)代入它的右边.场方程的 $0r$ 分量方程为

$$-\frac{\dot{A}}{cAr} = 0,$$

因此,$\dot{A}=0$,A 与时间无关,只是 r 的函数.这使里奇张量的其余分量都与度规的时间微商无关.场方程(7.177)的 00 分量方程和 rr 分量方程分别为

$$-\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rA} = -\frac{8\pi G}{c^4}\frac{\epsilon_0}{2A}\phi'^2, \tag{8.113}$$

$$\frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rA} = \frac{8\pi G}{c^4}\frac{\epsilon_0}{2B}\phi'^2. \tag{8.114}$$

用 B 除(8.113)加 A 除(8.114)得

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0.$$

这正是(8.69),因此可得(8.70).这使(8.56)成为

$$(\mathrm{d}s)^2 = A(r)(\mathrm{d}r)^2 + r^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2] - \frac{\xi(t)}{A(r)}c^2(\mathrm{d}t)^2.$$

变换(8.73)将此式变为

$$(\mathrm{d}s)^2 = A(r)(\mathrm{d}r)^2 + r^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2] - B(r)c^2(\mathrm{d}t)^2, \tag{8.115}$$

且

$$AB = 1. \tag{8.116}$$

将此式代入(8.110),得它在边条件 $\lim\limits_{r\to\infty}\phi(r)=0$ 下的解

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \tag{8.117}$$

这正是中心对称电荷分布外面的库仑电势,引力场对库仑势没有修正.此处已令(8.110)中的积分常数

$$a \equiv -\frac{q}{4\pi\epsilon_0},$$

其中 ϵ_0 为真空介电常数,由此定义的常数 q 为无穷远处观察者实测得的引力源电荷.将(8.69)代入(8.114)的左边,(8.117)代入它的右边,得

$$B'' + \frac{2}{r}B' = \frac{G}{c^4}\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 r^4}. \tag{8.118}$$

经一次积分得

$$r^2B' = \kappa - \frac{G}{c^4}\frac{q^2}{2\pi\epsilon_o}\frac{1}{r}. \tag{8.119}$$

无穷远处时空应是平直的,具闵可夫斯基度规,从而

$$\lim_{r\to\infty}B(r) = \lim_{r\to\infty}A(r) = 1. \tag{8.120}$$

按(8.49)为(8.119)中的积分常数 κ 取值,将它在边条件(8.120)下积分,得

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{G}{c^4}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{8.121}$$

将此式代入(8.116)得

$$A(r) = \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{G}{c^4}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right]^{-1} \tag{8.122}$$

容易验证,(8.121)和(8.122)也满足场方程(7.177)的其他分量方程.将它们代回(8.115),得爱因斯坦引力场方程在中心对称质量和电荷分布外面的解,称莱斯纳解.在 r 很大处,$\frac{1}{r}$为小量,弱场近似(7.162)适用.在$\frac{1}{r}$的二次幂可以忽略的条件下,莱斯纳解趋于施瓦氏解,引力势趋于牛顿势(7.152).(8.121)中定义的 M 便是无穷远处观察者实测得的引力源的引力质量.不过在计及$\frac{1}{r}$的二次幂时,莱斯纳解表明,有一项电荷对引力势的修正.它是电荷产生的静电场能量的贡献.

§8.3 中关于质点的引力质量与惯性质量相等的证明,只用到施瓦氏解在无穷远处的渐近形式,且只用到$\frac{1}{r}$的一次幂项.莱斯纳解在无穷远处的渐近形式中,$\frac{1}{r}$的一次幂项与施瓦氏解的相同.因此,该处的证明也适用于莱斯纳解.可以认为,荷电质点的质量完全来源于它周围的引力场和静电场,而且这一质量既是引力质量又是惯性质量.荷电质点可视为引力场和静电场的奇点.

莱斯纳解本是对荷电质点或静态中心对称质量电荷分布周围的引力场推导的.不过在本节的推导中没有用质量电荷分布的静态条件,而只用了中心对称条件.即证明了质量和电荷作中心对称运动的条件下,或者说作各向同性径向运动的条件下,静态的莱斯纳解仍然成立.这便是伯克霍夫定理对莱斯纳解的推广.一个无穷远处的观察者可以通过实测引力场与莱斯纳解的比较,判断作为引力场源的质量和电荷分布是否中心对称,却不能判断这一分布的详情.它可以是一个点源,也可以是一个结构复杂的球,还可以作各向同性的径向运动.无论如何,只要保持了中心对称,源外的引力场都由静态莱斯纳解表示,电磁场也就是库仑场.总共只有两个参数,即质量 M 和电荷 q.场源各向同性的径向运动既不会导致引力辐射,也不会导致电磁辐射.

§8.6 弱场条件下引力场方程的线性化，引力波与引力辐射

作分解(7.104)，设度规相对闵可夫斯基度规的偏离$\left(\frac{1}{c^2}h_{\mu\nu}\right)$为小量. 这就是弱场条件. 由(7.171)定义的引力场能量动量张量($U_{\mu\nu}$)由$\left(\frac{1}{c^2}h_{\mu\nu}\right)$中各分量的二次幂和更高次幂组成，在弱场条件下为高级小量. 忽略它的贡献，并忽略引力场对其他物质能量动量张量的影响，引力场方程(7.181)成为

$$\Box h_{\mu\nu}+\frac{\partial^2 h^\lambda{}_\lambda}{\partial x^\mu\partial x^\nu}-\frac{\partial^2 h^\lambda{}_\mu}{\partial x^\lambda\partial x^\nu}-\frac{\partial^2 h^\lambda{}_\nu}{\partial x^\lambda\partial x^\mu}=-\frac{16\pi G}{c^2}\mathscr{T}^{(0)}_{\mu\nu},\tag{8.123}$$

$$\mathscr{T}^{(0)}_{\mu\nu}=T^{(0)}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^{(0)},\tag{8.124}$$

$$T^{(0)}=\eta^{\mu\nu}T^{(0)}_{\mu\nu}.\tag{8.125}$$

(8.123)对引力场($h_{\mu\nu}$)是线性的，是线性化了的引力场方程. 右端($\mathscr{T}^{(0)}_{\mu\nu}$)是引力场源，它已与引力场无关，由其他物质的能量动量张量组成. ($T^{(0)}_{\mu\nu}$)是无引力条件下物质的能量动量张量，因而有守恒关系

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}T^{(0)\mu\nu}=0.\tag{8.126}$$

注意，不含引力场的张量为洛伦兹张量，所有洛伦兹张量均用$\eta^{\mu\nu}$和$\eta_{\mu\nu}$升降标号. 由(8.126)得

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\mathscr{T}^{(0)\mu}{}_\nu=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\mathscr{T}^{(0)},\tag{8.127}$$

$$\mathscr{T}^{(0)}\equiv\mathscr{T}^{(0)\mu}{}_\mu\equiv\eta^{\mu\nu}\mathscr{T}^{(0)}_{\mu\nu}=-T^{(0)}.\tag{8.128}$$

在弱场条件下，仿射联络可近似为

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}&=\frac{1}{2c^2}\eta^{\lambda\kappa}\left(\frac{\partial h_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu}+\frac{\partial h_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}\right)\\&=\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial h^\lambda{}_\mu}{\partial x^\nu}+\frac{\partial h^\lambda{}_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\right),\end{aligned}\tag{8.129}$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\equiv\eta^{\lambda\kappa}\frac{\partial}{\partial x^\kappa}.\tag{8.130}$$

在同一近似下，

$$\Gamma^\lambda=\eta^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial h^{\lambda\mu}}{\partial x^\mu}-\frac{1}{2}\frac{\partial h^\mu{}_\mu}{\partial x_\lambda}\right).$$

谐和坐标条件(7.184)成为

$$\frac{\partial h^{\mu}{}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{2}\frac{\partial h^{\mu}{}_{\mu}}{\partial x^{\lambda}}. \tag{8.131}$$

采用谐和坐标,条件(8.131)将线性化引力场方程(8.123)简化为

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^2}\mathscr{T}^{(0)}_{\mu\nu}. \tag{8.132}$$

这是标准形式的有源波动方程,源 $\mathscr{T}^{(0)}_{\mu\nu}$ 不含场量 $h_{\mu\nu}$. 在真空中,$\mathscr{T}^{(0)}_{\mu\nu}=0$,此式成为无源波动方程

$$\Box h_{\mu\nu} = 0. \tag{8.133}$$

它有平面波解

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= a_{\mu\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{\lambda}x^{\lambda}} + a^{*}_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{\lambda}x^{\lambda}} \\ &= a_{\mu\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} + a^{*}_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}. \end{aligned} \tag{8.134}$$

其中 $a_{\mu\nu}$为常数;(x^{μ})为四维时空笛卡儿坐标,其中三个空间分量 $x^1\equiv x, x^2\equiv y, x^3\equiv z$ 组成三维径矢量 $\boldsymbol{r}$,时间分量 $x^0\equiv ct$;(k_{μ})为四维波矢量,其中三个空间分量 $k_1\equiv k_x, k_2\equiv k_y, k_3\equiv k_z$ 组成三维波矢量 $\boldsymbol{k}$,时间分量 $k_0\equiv -\frac{\omega}{c}$,$\omega$ 为波动的角频率. 为使(8.134)确实满足方程(8.133),必须

$$k^{\mu}k_{\mu} \equiv k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \tag{8.135}$$

即有色散关系

$$\omega = \pm ck. \tag{8.136}$$

表明平面波(8.134)以光速 c 沿 $\boldsymbol{k}$ 方向传播. 可见,引力场可以波动的形式传播,称为引力波.

为使波方程(8.133)与(8.123)的齐次方程等价,解(8.134)还须满足条件(8.131). 将它代入(8.131)两边,得积分常数 $a_{\mu\nu}$应符合的条件

$$k_{\mu}a^{\mu}{}_{\lambda} = \frac{1}{2}k_{\lambda}a^{\mu}{}_{\mu}. \tag{8.137}$$

考虑沿 z 方向传播的平面波(8.134),其中

$$k_x = k_y = 0, \quad k_z = k, \quad k^0 \equiv \frac{\omega}{c} = k. \tag{8.138}$$

这里,在(8.136)右边取了正号. 这不失一般性,因为,如果 $\omega<0$,恒可将(8.134)的第二项改作第一项,将 $a^{*}_{\mu\nu}$改写为$a_{\mu\nu}$, $-\boldsymbol{k}$ 改写为 $\boldsymbol{k}$, ω 改写为 $-\omega$. 这样重新改写后的解(8.134)便有 $\omega>0$. 将(8.138)代入(8.137),可将它具体写为

$$\begin{aligned} &a_{31} + a_{01} = 0, \quad a_{32} + a_{02} = 0, \\ &a_{33} + a_{03} = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + a_{33} - a_{00}), \\ &a_{30} + a_{00} = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + a_{33} - a_{00}). \end{aligned}$$

由前两式分别解得

$$a_{01} = -a_{31}, \quad a_{02} = -a_{32}. \tag{8.139}$$

由后两式相加减,分别解得

$$a_{03} = -\frac{1}{2}(a_{33} + a_{00}), \quad a_{22} = -a_{11}. \tag{8.140}$$

$(h_{\mu\nu})$为对称张量,这使得$(a_{\mu\nu})$也是对称的,即

$$a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}. \tag{8.141}$$

解(8.134)中独立的积分常数为 10 个.(8.139)和(8.140)表明,其中 a_{01}、a_{02}、a_{03} 和 a_{22}四个可用其余六个

$$a_{11}、a_{12}、a_{13}、a_{23}、a_{33} \text{ 和 } a_{00} \tag{8.142}$$

表出.独立的积分常数降为 6 个.

引力理论是广义相对论的,在一般的坐标变换下不变.弱场条件破坏广义相对性,使场方程(8.132)不再在一般的坐标变换下不变.但只要变换不破坏弱场条件和谐和坐标条件,场方程(8.132)在变换后应依然成立.为此,变换中坐标的改变只能是小量,即

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{c^2}\xi^{\mu}, \tag{8.143}$$

其中$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$不超过$\frac{1}{c^2}h_{\mu\nu}$的量级.由(7.14)和(7.104)知,在弱场条件下

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2}h^{\mu\nu}. \tag{8.144}$$

对坐标变换(8.143),在$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$和$\frac{1}{c^2}h_{\mu\nu}$为小量的条件下,反变度规张量的变换(7.15)给出

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\eta^{\lambda\nu} - \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\lambda}}\eta^{\lambda\mu}, \tag{8.145}$$

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \xi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \xi_{\nu}}{\partial x^{\mu}}, \tag{8.146}$$

其中 $\xi_{\mu} = \eta_{\mu\nu}\xi^{\nu}$.令

$$\xi^{\mu} = \mathrm{i}b^{\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{\lambda}x^{\lambda}} - \mathrm{i}b^{\mu *}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{\lambda}x^{\lambda}}, \tag{8.147}$$

代入(8.143).在此变换下,按(8.146),解(8.134)变为

$$h'_{\mu\nu} = a'_{\mu\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{\lambda}x^{\lambda}} + a'^{*}_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{\lambda}x^{\lambda}}, \tag{8.148}$$

其中

$$a'_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + k_{\nu}b_{\mu} + k_{\mu}b_{\nu}. \tag{8.149}$$

(8.135)保证(8.148)仍满足无源波方程(8.133),还保证在 $a_{\mu\nu}$满足(8.137)的条件下

$$k_\mu a'^\mu{}_\lambda = k_\lambda a'^\mu{}_\mu,$$

即(8.148)也符合谐和坐标条件.(8.149)表明,变换后的解(8.148)中含四个任意常数 b_0、b_1、b_2 和 b_3,可用来进一步固定解.对沿 z 方向传播的波,可用(8.138)将(8.149)具体化为

$$a'_{11} = a_{11}, \quad a'_{12} = a_{12}$$

$$a'_{13} = a_{13} + kb_1, \quad a'_{23} = a_{23} + kb_2,$$

$$a'_{33} = a_{33} + 2kb_3, \quad a'_{00} = a_{00} - 2kb_0.$$

在(8.142)列出的六个独立常数中,只有 a_{11}和 a_{12}在坐标变换中不变,表明它们反映了引力波的客观性质.其他四个常数均可变.且在选择

$$b_1 = -a_{13}/k, \quad b_2 = -a_{23}/k,$$

$$b_3 = -a_{33}/(2k), \quad b_0 = a_{00}/(2k),$$

后,可将变换后的常数 a'_{13}、a'_{23}、a'_{33}、a'_{00}统统置零.再由(8.139)和(8.140)知,a'_{01}、a'_{02}和 a'_{03}也因之为零.引力波(8.134)是张量波.对沿 z 方向传播的引力波,经上述变换后,非零分量只有

$$h_{11}, \quad h_{22} = -h_{11}, \quad h_{12}, \quad h_{21} = h_{12}.$$

它们是张量的 xx、yy、xy 和 yx 分量.可见,引力波是横张量波.

有源引力波方程(8.132)具有有源波方程的一般形式(4.113),因此有推迟解(4.132)和超前解(4.134).引力辐射对应其中的推迟解.具体写下来就是

$$h_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{4G}{c^2}\int \frac{\mathscr{T}^{(0)}_{\mu\nu}\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}\right)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\mathscr{V}', \tag{8.150}$$

体积分遍及有源区域.由于 $\mathscr{T}^{(0)}_{\mu\nu}$有性质(8.127),经分部积分后可证,由(8.150)表示的 $h_{\mu\nu}$符合谐和坐标条件(8.131).

§8.7 四维欧几里得空间中三维超球面的几何学,均匀空间,闭空间与开空间

广义相对论的引力理论既是时空的几何学,便可用来研究时空的整体性质.这就是宇宙学.宇宙学研究我们所在的三维空间的全体,以及它随时间演化的过去未来.作为基础,本节先研究三维空间的几何学.由于物质的存在,现实的三维空间曲率非零,是非欧几里得的.而且,由于物质分布细看起来不可能均匀,这儿一点,那儿一点,空间性质因而也不是均匀的.不过这种不均匀性来源于这一或那一具体事物,而非空间所固有,因而可视为在一均匀背景上的涨落.天文观察表明,就大范围看来,物质的分布还是均匀的.宇宙学不研究这一或那一具体事件,因而不研究空间性质在此处或彼处的涨落.它着力研究现实空间的均匀背景,及其随时间的演化.本节便研究三维均匀空间的几何学.

最简单的三维均匀非欧空间是四维欧几里得空间中的三维超球面，其中每一点的地位是完全平等的．用 x_1、x_2、x_3 和 x_4 表示四维欧几里得空间的笛卡儿坐标．其中微分距离平方便是

$$(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x_1)^2+(\mathrm{d}x_2)^2+(\mathrm{d}x_3)^2+(\mathrm{d}x_4)^2. \tag{8.151}$$

以原点为心，半径为 a 的三维超球面方程为

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=a^2. \tag{8.152}$$

球面上一点只有三个独立坐标．将它们取为 x_1、x_2 和 x_3，第四个坐标

$$x_4=\pm\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2} \tag{8.153}$$

由它们表出．微分(8.152)得

$$x_1\mathrm{d}x_1+x_2\mathrm{d}x_2+x_3\mathrm{d}x_3+x_4\mathrm{d}x_4=0.$$

用(8.153)消去此式中的 x_4，得

$$\mathrm{d}x_4=\mp\frac{x_1\mathrm{d}x_1+x_2\mathrm{d}x_2+x_3\mathrm{d}x_3}{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2}}. \tag{8.154}$$

代入(8.151)得三维超球面上相邻两点间的微分距离平方

$$(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x_1)^2+(\mathrm{d}x_2)^2+(\mathrm{d}x_3)^2+\frac{(x_1\mathrm{d}x_1+x_2\mathrm{d}x_2+x_3\mathrm{d}x_3)^2}{a^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2}. \tag{8.155}$$

引进球坐标 r、θ、φ，它们与 x_1、x_2、x_3 的关系为

$$x_1=r\sin\theta\cos\varphi,\quad x_2=r\sin\theta\sin\varphi,\quad x_3=r\cos\theta. \tag{8.156}$$

(8.155)成为

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s)^2&=(\mathrm{d}r)^2+r^2[(\mathrm{d}\theta)^2+\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2]+\frac{(r\mathrm{d}r)^2}{a^2-r^2}\\&=\frac{a^2}{a^2-r^2}(\mathrm{d}r)^2+r^2[(\mathrm{d}\theta)^2+\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2].\end{aligned} \tag{8.157}$$

改用半径 a 作长度单位，原来的径向坐标 r 要改写为 ar，角坐标 θ、φ 不变．这样重新标度后，(8.157)成为

$$(\mathrm{d}s)^2=a^2\left\{\frac{(\mathrm{d}r)^2}{1-r^2}+r^2[(\mathrm{d}\theta)^2+\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2]\right\}. \tag{8.158}$$

其中的度规张量是对角的，非零分量为

$$\gamma_{rr}=\frac{a^2}{1-r^2},\quad \gamma_{\theta\theta}=a^2r^2,\quad \gamma_{\varphi\varphi}=a^2r^2\sin^2\theta. \tag{8.159}$$

由此算出仿射联络的非零分量为

$$\Gamma^r_{rr}=\frac{r}{1-r^2},\quad \Gamma^r_{\theta\theta}=-(1-r^2)r,\quad \Gamma^r_{\varphi\varphi}=-(1-r^2)r\sin^2\theta, \tag{8.160}$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta}=\Gamma^\theta_{\theta r}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}=-\sin\theta\cos\theta, \tag{8.161}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \cot\theta; \tag{8.162}$$

里奇张量为

$$\overline{R}_{ij} = -\frac{2}{a^2}\gamma_{ij}, \tag{8.163}$$

其中 i、j 分别可取 r、θ 和 φ;曲率标量为

$$\overline{R} = \gamma^{ij}\overline{R}_{ij} = -\frac{6}{a^2}. \tag{8.164}$$

可一般定义 $N+1$ 维欧几里得空间中 N 维超球面的高斯曲率

$$K = -\frac{R}{N!}, \tag{8.165}$$

其中 R 为它的曲率标量. 三维超球面的高斯曲率便是

$$K = -\frac{\overline{R}}{6} = \frac{1}{a^2}. \tag{8.166}$$

曲率与位置无关,表现出此空间的均匀性.

除曲率非零外,三维超球面与平直空间还有许多不同. 例如,在(8.157)中固定 $r=r_1, \theta=\frac{\pi}{2}$,令 φ 由 0 变到 2π,得一条曲线,相当于平直空间的圆周. 由(8.157)算得圆周长

$$C = r_1\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 2\pi r_1. \tag{8.167}$$

注意,这里的 r_1 并非圆的半径. 半径应定义为从圆心 $r=0$ 到圆周上一点的测地线长. 测地线与联接两给定点的其他线相比,线长取极值. 表明,沿测地线从圆心到圆周的过程中,方向 θ、φ 应维持不变. 因而,按(8.157),它的长度应为

$$b = \int_0^{r_1}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}} = a\int_0^{\frac{r_1}{a}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = a\arcsin\frac{r_1}{a}. \tag{8.168}$$

将(8.167)表示的圆周长用半径 b 表示出来,得

$$C = 2\pi a\sin\frac{b}{a}. \tag{8.169}$$

它显然短于三维平直空间中半径为 b 的圆周长,且与半径 b 不成比例. 圆周率的概念在三维超球面的几何学中失效. 不过,如果 a 足够大,半径 b 足够小,以致 $\frac{b}{a}\ll 1$,则 $\sin\frac{b}{a}\sim\frac{b}{a}$,(8.169)趋于平直三维空间的圆周—半径关系 $C=2\pi b$.

在(8.157)中将 a^2 改为 $-a^2$,可得另一种三维空间的度规. 在经过类似(8.157)到(8.158)的标度变换后,这种度规可表为

$$(\mathrm{d}s)^2 = a^2\left\{\frac{(\mathrm{d}r)^2}{1+r^2} + r^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2]\right\}. \tag{8.170}$$

此式和(8.158)可统一表为

$$(\mathrm{d}s)^2 = a^2\left\{\frac{(\mathrm{d}r)^2}{1-kr^2} + r^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2]\right\}. \tag{8.171}$$

其中 $k=1$ 则得三维超球面的度规(8.158), $k=-1$ 则得度规(8.170), $k=0$ 则得三维欧氏空间的度规.对推广的微分距离表达式(8.171),(8.159)变为

$$\gamma_{rr} = \frac{a^2}{1-kr^2}, \quad \gamma_{\theta\theta} = a^2r^2, \quad \gamma_{\varphi\varphi} = a^2r^2\sin^2\theta. \tag{8.172}$$

度规张量仍是对角的.(8.160)变为

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^r_{rr} = \frac{kr}{1-kr^2}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -(1-kr^2)r, \\ &\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -(1-kr^2)r\sin^2\theta, \end{aligned}\right\} \tag{8.173}$$

(8.161)和(8.162)不变.(8.163)变为

$$\bar{R}_{ij} = -\frac{2k}{a^2}\gamma_{ij}, \tag{8.174}$$

(8.164)和(8.166)分别变为

$$\bar{R} = -\frac{6k}{a^2}, \tag{8.175}$$

$$K = \frac{k}{a^2}. \tag{8.176}$$

不论 k 取何值,曲率均与位置无关,空间都是均匀的.只是 $k=-1$ 的空间,高斯曲率为负; $k=0$ 的空间,曲率为零,是平直的.

$k=1$ 的空间, r 的取值受到限制.在(8.158)中 $r\leqslant 1$;在(8.157)中, $r\leqslant a$.这来源于超球面方程(8.152).由于其中 $x_4^2\geqslant 0$,使得

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leqslant a.$$

这一限制又使从任一点出发,沿任何方向行进的距离不能超过最大距离

$$b_{\max} = \int_0^a \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}} = a\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}a. \tag{8.177}$$

可以称 $b_{\max}$ 为这一空间的半径.有时又简单地称 a 为这一空间的半径.其实 a 是这一空间包围的四维球的半径.总之,这一空间有一有限的半径.还可计算这一空间的总体积

$$\begin{aligned} \mathscr{V} &= \int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}}\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \\ &= 4\pi a^3\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \pi^2 a^3. \end{aligned} \tag{8.178}$$

具有限半径或有限体积的空间称为闭空间.此处 $k=1$ 的空间就是闭空间,这种空

间是有限的,却无界.设想一个宇航员在这种空间中朝一个方向一直飞行.当他到达最大距离 b_{max}处,再向前,他看到了什么呢.他看到了出发前向相反方向看到的那些东西.像麦哲伦的船队从大西洋向西进入太平洋那样,继续向前航行便踏上了归程.其间却没有遇到任何界限.

$k=0$ 或 -1 的空间,r 的取值不受限制,从任一点出发,沿任何方向行进的距离可趋于无穷.这种空间称为开空间.开空间是无限的.

§8.8 宇宙学原理,罗伯孙[①]-沃克[②]度规,爱因斯坦引力场方程的宇宙解,宇宙动力学

自哥白尼至今,数百年间人们对宇宙逐步深入的认识,导致一个明确的结论:宇宙没有一个中心.地球不是中心,太阳不是中心,我们所在的银河系也不是中心.宇宙中的各个星系,哪个也不比哪个优越.如前所述,从大范围看,物质的空间分布是均匀的,细看的不均匀性可视为均匀背景上的随机涨落.综合起来,便形成一种认识:存在一统一的时间标度,按此标度,每一时刻,在抽象掉具体事件导致的随机涨落后,空间各点的性质完全相同.这便是宇宙学原理.按此原理,宇宙中相邻两时空点的微分距离平方可表为

$$(\mathrm{d}s)^2 = a^2(t)\left\{\frac{(\mathrm{d}r)^2}{1-kr^2} + r^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2]\right\} - c^2(\mathrm{d}t)^2, \tag{8.179}$$

称为罗伯孙-沃克度规.其中待定参数 k 可取 -1、0 和 $+1$ 三个不同值,还有一未知函数 $a(t)$表示 t 时刻宇宙的空间尺度.与(8.171)对比知,每一时刻(8.179)都表示一均匀空间,如 $k=-1$ 或 0 则是一开空间,如 $k=+1$ 则是一闭空间.其中的度规张量是对角的,对角元为

$$g_{00}=-1,\quad g_{rr}=\frac{a^2(t)}{1-kr^2},\quad g_{\theta\theta}=a^2(t)r^2,\qquad g_{\varphi\varphi}=a^2(t)r^2\sin^2\theta. \tag{8.180}$$

由此得仿射联络的非零分量为

$$\Gamma^0_{ij}=\frac{\dot a}{ca}g_{ij},\quad \Gamma^i_{0j}=\Gamma^i_{j0}=\frac{\dot a}{ca}\delta^i{}_j, \tag{8.181}$$

$$\Gamma^r_{rr}=\frac{kr}{1-kr^2},\ \Gamma^r_{\theta\theta}=-(1-kr^2)r,\ \Gamma^r_{\varphi\varphi}=-(1-kr^2)r\sin^2\theta, \tag{8.182}$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta}=\Gamma^\theta_{\theta r}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}=-\sin\theta\cos\theta, \tag{8.183}$$

---

① H. P. Robertson, Ap. J., **82** (1935) 284, **83**(1936) 187, 257.

② A. G. Walker, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **42** (1936) 90.

$$\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \cot\theta; \tag{8.184}$$

里奇张量是对角的,对角元为

$$R_{00} = \frac{3\ddot{a}}{c^2 a}, \quad R_{ij} = -\left(\frac{2k}{a^2} + \frac{2\dot{a}^2}{c^2 a^2} + \frac{\ddot{a}}{c^2 a}\right) g_{ij}; \tag{8.185}$$

曲率标量为

$$R = -6\left(\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{c^2 a^2} + \frac{\ddot{a}}{c^2 a}\right); \tag{8.186}$$

其中 i、j 各自代表 r、θ 或 φ,上方圆点代表对时间 t 的微商.

设从大范围看宇宙中的物质运动可当作理想流体的流动.在每一时空点,此流体的能量动量张量为①

$$T_{\mu\nu} = \mathscr{P} g_{\mu\nu} + (\mathscr{P} + \mathscr{E}_0) \frac{u_\mu u_\nu}{c^2}, \tag{8.187}$$

其中 $\mathscr{P}$ 为该点流体的压力,$\mathscr{E}_0$ 为从随流点运动的坐标系中看该点的能量密度,(u_μ) 为流点运动的四速度,有关系

$$u_\mu u^\mu = -c^2. \tag{8.188}$$

已设宇宙空间是均匀的,因而是各向同性的,(u_μ) 的空间分量应为零.按(8.180)第一式

$$u_0 u_0 = -g^{00} u_0 u_0 = -g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = c^2.$$

可见(8.187)表示的能量动量张量是对角的,其中

$$T_{00} = \mathscr{E}_0, \quad T_{ij} = \mathscr{P} g_{ij}. \tag{8.189}$$

将(8.185)、(8.186)、(8.181)和(8.189)代入爱因斯坦引力场方程(7.166),由 00 分量方程得

$$\dot{a}^2 + c^2 k = \frac{8\pi G}{3c^2} \mathscr{E}_0 a^2, \tag{8.190}$$

由空间分量方程得

$$2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + c^2 k = -\frac{8\pi G}{c^2} \mathscr{P} a^2, \tag{8.191}$$

其余分量方程均为恒等式 0=0.用(8.190)消去(8.191)中的 $\dot{a}$,得

$$3\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{c^2} (\mathscr{E}_0 + 3\mathscr{P}) a. \tag{8.192}$$

另一方面,(8.190)两边对时间的微商给出

$$\ddot{a} = \frac{4\pi G}{3c^2} \left[-\mathscr{E}_0 a + \frac{1}{a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} (\mathscr{E}_0 a^3) \right]. \tag{8.193}$$

与上式比较知

---

① 参阅本丛书第一卷《经典力学》(10.144)和(9.152)式.

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_0 a^3}{\mathrm{d}a} + 3\mathscr{P}a^2 = 0. \tag{8.194}$$

此式保证(8.192)与(8.193)一致,也就保证(8.190)与(8.191)一致.

(8.194)表示能量密度 $\mathscr{E}_0$ 随宇宙空间尺度 $a(t)$的变化,也就是表示 $\mathscr{E}_0$ 随时间的变化,应当能从能量动量守恒关系(7.142)导出.采用协变微商的莱布尼茨规则;注意 $\mathscr{P}$ 为标量,因而协变微商就是普通微商;再由(8.187)、(7.32)、(7.194)和(7.53),可将(7.142)写为

$$\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\sqrt{-g}(\mathscr{P}+\mathscr{E}_0)\frac{u^\mu u^\nu}{c^2}\right] + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}(\mathscr{P}+\mathscr{E}_0)\frac{u^\lambda u^\nu}{c^2} = 0. \tag{8.195}$$

由于此处 $\mathscr{P}$ 与空间坐标无关,$(g^{\mu\nu})$又是对角的,且(u^μ)的空间分量为零,按(8.181)~(8.184)还有 $\Gamma^\mu_{00}=0$,(8.195)的三个空间分量方程为恒等式 $0=0$,时间分量方程则为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\mathscr{P}+\mathscr{E}_0)a^3] = \dot{\mathscr{P}}a^3. \tag{8.196}$$

略加整理即可看出,此式就是(8.194).对给定的 k,宇宙中时空与物质共有三个动力学变量,即 $a(t)$、$\mathscr{E}_0(t)$和 $\mathscr{P}(t)$,共需三个方程来确定.给定物态方程 $\mathscr{P}(\mathscr{E}_0)$后,只剩两个独立变量,即 $a(t)$和 $\mathscr{E}_0(t)$,还需两个方程来确定.在此条件下,(8.190)和(8.196)组成宇宙动力学的完备方程组.它们的解就是爱因斯坦引力场方程的宇宙解.这组方程和它们的解取决于 k 值、宇宙中的物质密度和物质在大范围内的物态方程 $\mathscr{P}(\mathscr{E}_0)$.

§8.9 红移与哈勃[①]定律,宇宙的尺度、年龄与演化,失踪质量与暗物质

关于宇宙演化的现状及其过去未来的信息主要来自遥远天体光谱的红移.用 λ_1 和 ν_1 表示天体发出的光波的波长和频率,λ_0 和 ν_0 表示这束光到达地面后的波长和频率,红移定义为

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\nu_1 - \nu_0}{\nu_0}. \tag{8.197}$$

其中 λ_0 和 ν_0 可在地面直接测得.如果忽略发光天体表面引力势与地面引力势的差别,即忽略引力红移,λ_1 和 ν_1 可认为与地面同一光源发出的同一谱线的波长和频率相同.红移 z 是一可观察量.$z>0$ 表明,谱线向长波方向移动,称为红移;$z<0$表明,谱线向短波方向移动,称为紫移,或蓝移.20 世纪初已积累了大量天体

① E. P. Hubble, Proc. Nat. Acad. Sci. **15** (1927) 168.

谱线移动的资料，大部分是红移，也有个别紫移的. 到 20 世纪 20 年代，人们已认识到天体红移与它们的距离有近似的正比关系，距我们越远的天体红移越大. 这种现象很难用引力红移解释，因为没有可靠的理由令人们相信越远的天体质量越大. 而且这种宇宙结构不符合宇宙学原理，因为它表明地球上的人类有一个与众不同的参考系. 如果改用一个遥远的星系作参考体，观察者会发现这样的宇宙对他是各向不同性的. 当他向地球方向看，越远的天体质量会越小，直到他的目光到达地球为止；当他向与地球相反的方向看，越远的天体质量仍然越大. 这提示人们用另一种方式，即用多普勒效应解释天体谱线的红移. 这只要设：除具体事件导致的涨落外，远方天体都在向远离我们的方向运动，称为退行，且退行速度与离我们的距离大体成正比. 这便是哈勃定律. 按宇宙学原理，这提示我们的宇宙正在膨胀，以致从其中任何一点看，远处天体都在退行，且退行速度与它到观察者的距离成正比.

取观察者的位置为原点. 设 r_1、θ、φ 处一天体向原点发出一束电磁波，在传播中方位角 $\theta\varphi$ 不变，径向坐标 r 则逐渐趋于零. 其中一给定相位，例如一给定波峰的运动方程，按罗伯孙-沃克度规(8.179)，为

$$a^2(t)\frac{(\mathrm{d}r)^2}{1-kr^2}-c^2(\mathrm{d}t)^2=0. \tag{8.198}$$

设此相位于 t_1 时刻离开 r_1 处，t_0 时刻到达原点，则有

$$\int_{t_1}^{t_0}\frac{c\mathrm{d}t}{a(t)}=\int_0^{r_1}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}}$$

$$\equiv f(r_1)=\begin{cases}\arcsin r_1, & 若\ k=1,\\ r_1, & 若\ k=0,\\ \operatorname{arsh} r_1, & 若\ k=-1.\end{cases} \tag{8.199}$$

设相隔一周期的相位，例如下一个波峰在 $t_1+\delta t_1$ 时离开 r_1 处，$t_0+\delta t_0$ 时到达原点，必有

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0}\frac{c\mathrm{d}t}{a(t)}=\int_0^{r_1}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}}=f(r_1).$$

可见

$$\frac{c\delta t_0}{a(t_0)}-\frac{c\delta t_1}{a(t_1)}=0.$$

因此，观察者测得的频率 $\nu_0=\dfrac{1}{\delta t_0}$ 与天体发出的频率 $\nu_1=\dfrac{1}{\delta t_1}$ 有关系

$$\frac{\nu_0}{\nu_1}=\frac{\delta t_1}{\delta t_0}=\frac{a(t_1)}{a(t_0)}. \tag{8.200}$$

(8.197)定义的红移遂为

$$z=\frac{\nu_1}{\nu_0}-1=\frac{a(t_0)}{a(t_1)}-1. \tag{8.201}$$

红移表明 $z>0$,因而 $a(t_0)>a(t_1)$. 较晚时刻的宇宙尺度 $a(t_0)$大于较早时刻的宇宙尺度 $a(t_1)$,可见宇宙在膨胀. 对不太远的天体,以 宇宙尺度 a 为单位的距离 r_1 为小量,对(8.199)右边列举的三种情况都有 $f(r_1)\simeq r_1$. 在此情况下 t_0-t_1 也是小量,(8.199)成为

$$r_1=\frac{c}{a(t_0)}(t_0-t_1);\tag{8.202}$$

(8.201)成为

$$z=\frac{a(t_0)-a(t_1)}{a(t_1)}\simeq\frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t_0-t_1)=\frac{\dot{a}(t_0)r_1}{c}$$
$$=\frac{v_r}{c},\tag{8.203}$$

v_r 为天体退行径向速度,简称退行速度. 由罗伯孙-沃克度规也可得到红移与退行速度的正比关系,与由多普勒效应对红移的解释一致.

遥远天体的距离通常用光度法测量. 天体物理确定了主星系恒星的绝对光度 L,即它发光的总功率,与恒星表面温度的关系. 而表面温度又与恒星发光光谱有直接关系. 因此,可由光谱确定主星系恒星的绝对光度. 另一方面,可直接测量单位面积在单位时间内接收到的星光能量 l,称为该星的视光度. 设与发光天体的距离为 d_L,由简单的几何知

$$l=\frac{L}{4\pi d_L^2}.\tag{8.204}$$

由此得距离

$$d_L=\left(\frac{L}{4\pi l}\right)^{1/2},\tag{8.205}$$

称为该星的光度距离. 如果宇宙是不演化的,尺度因子 a 不随时间变化,r_1 处的天体与原点的距离在 r_1 不很大时应可表为 ar_1,视光度也应是

$$l'=\frac{L}{4\pi a^2r_1^2}.\tag{8.206}$$

然而,宇宙是演化的,尺度因子 $a(t)$是时间的函数,(8.206)分母上的 a 应是 $a(t_0)$,t_0 为观测的时刻. 而且,前面定义的视光度就是观测处坡印亭矢量的值,按(1.233)它正比于电场强度和磁场强度的积. (4.143)、(4.144)、(4.151)和(4.153)表明,辐射的电磁势的振幅由波源决定,不受传播经过的空间性质影响. 可是,由(4.158)和(4.159)表示的电场强度和磁场强度的振幅却分别与所在位置电磁波的频率成正比. 这是因为,按(4.146)与(1.96),它们都是电磁势对时空坐标的微商. 可见,按(8.200),宇宙演化导致对视光度的修正,将它从(8.206)表示的 l'改为

$$l=\frac{La^2(t_1)}{4\pi a^4(t_0)r_1^2}.\tag{8.207}$$

代入(8.205)得

$$d_L=\frac{a^2(t_0)}{a(t_1)}r_1. \tag{8.208}$$

原子的可见光谱服从量子论.单个光子能量为 $h\nu$, h 为普朗克常数.按(8.200),由 r_1 处传播到原点的光能量会发生变化,即应乘修正因子$\frac{a(t_1)}{a(t_0)}$.这束光通过一横截面的时间也会发生变化,按(8.200)应乘以修正因子$\frac{a(t_0)}{a(t_1)}$.在视光度的定义中,前者乘在分子上,后者乘在分母上.这使得应在(8.206)表示的 l'上乘以修正因子$\frac{a^2(t_1)}{a^2(t_0)}$,从而得到视光度的表达式(8.207).即是说,按量子论也有(8.207)和(8.208).

将 $a(t)$在 $a(t_0)$附近展成 $t-t_0$ 的幂级数,得

$$a(t)=a(t_0)\left[1+H_0(t-t_0)-\frac{1}{2}q_0H_0^2(t-t_0)^2+\cdots\right], \tag{8.209}$$

其中

$$H_0\equiv\frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \tag{8.210}$$

称为哈勃常数,

$$q_0\equiv-\frac{\ddot{a}(t_0)a(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)} \tag{8.211}$$

称为减速参数.(8.210)又可写为

$$\dot{a}(t_0)r_1=H_0a(t_0)r_1,$$

表示 r_1 处天体在 t_0 时刻的退行速度与该时刻它到原点的距离成正比,这就是哈勃定律.其中 H_0 为比例常数,这就是称它为哈勃常数的原因.将(8.209)代入(8.201),得红移与光传播时间关系的幂级数展开

$$z=H_0(t_0-t_1)+\left(1+\frac{q_0}{2}\right)H_0^2(t_0-t_1)^2+\cdots. \tag{8.212}$$

它的逆展开为

$$t_0-t_1=\frac{1}{H_0}\left[z-\left(1+\frac{q_0}{2}\right)z^2+\cdots\right]. \tag{8.213}$$

代入(8.209)得

$$a(t_1)=a(t_0)(1-z+z^2+\cdots). \tag{8.214}$$

在 r_1 和 t_0-t_1 为小量的条件下,(8.199)、(8.209)和(8.213)给出

$$\begin{aligned}r_1&=\frac{c}{a(t_0)}\int_{t_1}^{t_0}[1+H_0(t_0-t)+\cdots]\mathrm{d}t\\&=\frac{c}{a(t_0)}\left[t_0-t_1+\frac{1}{2}H_0(t_0-t_1)^2+\cdots\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{c}{a(t_0)H_0}\left[z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + \cdots\right]. \tag{8.215}$$

将此式和(8.214)代入(8.208)得光度距离与红移关系的幂级数展开

$$d_L = \frac{c}{H_0}\left[z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \cdots\right]. \tag{8.216}$$

将此式代入(8.204)得视光度-红移关系的幂级数展开

$$l = \frac{LH_0^2}{4\pi c^2 z^2}[1 - (1 - q_0)z + \cdots]. \tag{8.217}$$

在对一系列天体测得视光度 l、绝对光度 L 和红移 z 后可检验此式是否正确，并定出当前宇宙的哈勃常数 H_0 和减速参数 q_0. 实测结果表明，(8.217)符合实际，且能较好地从其中定得 H_0，q_0 却难以从其中准确定出. 这是因为 q_0 只出现在对视光度的一级修正中，在大多数数据红移都较小的条件下，(8.217)右边对 q_0 不敏感. 从弥散的数据中只能判定，减速参数很可能是 $q_0 \simeq 1$. 对哈勃常数，目前的值是①

$$H_0 = h_0 \times (9.77813 \times 10^9\ 年)^{-1}, \tag{8.218}$$

其中

$$h_0 = (0.71 \pm 0.07)^{\times 1.15}_{\times 0.95} \tag{8.219}$$

称为归一化哈勃常数. 在估算中可取

$$H_0^{-1} = 14 \times 10^9\ 年. \tag{8.220}$$

将(8.190)写成

$$\frac{k}{a^2(t_0)} = \frac{8\pi G}{3c^2}[\rho(t_0) - \rho_c], \tag{8.221}$$

其中 $\rho = \mathscr{E}_0/c^2$ 为宇宙中的质量密度，

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 9.5 \times 10^{-27}\mathrm{kg/m^3} \tag{8.222}$$

为临界密度. 若 $\rho(t_0) > \rho_c$，则宇宙空间曲率 $\frac{k}{a^2(t_0)} > 0$，宇宙空间为闭空间，这样的宇宙称为闭宇宙. 若 $\rho(t_0) \leqslant \rho_c$，则宇宙空间曲率 $\frac{k}{a^2(t_0)} \leqslant 0$，宇宙空间为开空间，这样的宇宙称为开宇宙. 将(8.191)写成

$$\frac{k}{a^2(t_0)} = \frac{H_0^2}{c^2}(2q_0 - 1) - \frac{8\pi G}{c^4}\mathscr{P}(t_0). \tag{8.223}$$

实测结果表明，当前宇宙物质的压强很小，

$$\mathscr{P}(t_0) << \mathscr{E}_0(t_0),$$

除非 $q_0 = \frac{1}{2}$，(8.223)右边第二项与第一项相比可以略去. 于是有

---

① D. E. Groom et. al., Eur. Phys. Journ. C**15** (2000) 1.

$$\frac{k}{a^2(t_0)} = \frac{H_0^2}{c^2}(2q_0 - 1). \tag{8.224}$$

如果相信前面用视光度测得的 $q_0=1$,则空间曲率为正,且就等于$\frac{H_0^2}{c^2}$.宇宙空间是闭的,半径为

$$a(t_0) = \frac{c}{H_0} = 14 \times 10^9 \text{ 光年}. \tag{8.225}$$

不过,如前所述,这种认识只在宇宙中的质量密度大于临界密度(8.222)的条件下才是正确的.然而实测结果表明①

$$\frac{\rho(t_0)}{\rho_c} = 0.15 \sim 0.45, \tag{8.226}$$

观测到的密度比临界密度小得多.由(8.221)、(8.222)和(8.224)得

$$\frac{\rho(t_0)}{\rho_c} = 2q_0. \tag{8.227}$$

如果(8.226)是正确的,则从此式得

$$q_0 = 0.075 \approx 0.225. \tag{8.228}$$

因此,按(8.224),宇宙空间曲率为负,是开空间.在(8.224)左边取 $k = -1$,得此开空间的尺度为

$$\begin{aligned} a(t_0) &= \frac{c}{H_0}\sqrt{\frac{\rho_c}{\rho_c - \rho(t_0)}} = (1.1 \sim 1.4)\frac{c}{H_0} \\ &= (15 \sim 19) \times 10^9 \text{ 光年}. \end{aligned} \tag{8.229}$$

以 q_0 的视光度测量为基础的结论与以直接的密度测量为基础的结论互相矛盾,甚至无法确定宇宙空间是开的还是闭的.如前所述,q_0 的视光度测量的结果并不精确.然而,由密度测量定得的 q_0 值(8.228)似乎又太小了.目前普遍相信,有些物质未被现有的质量测量手段搜索到,称为暗物质,它们的质量成为失踪质量.寻找暗物质和失踪质量,是当代天体物理、宇宙学和粒子物理的热门话题.

当人们向宇宙深处观察时,不仅在深入宇宙的空间,而且也在深入宇宙的历史.例如,当人们在宇宙深处看到压强为零,就可以判断宇宙过去一段历史中压强为零.当然,人们直接观察到的,只是宇宙的一小部分.因而,只能对宇宙近期历史作直接判断.对早期宇宙的了解,必须借重理论.宇宙论是一门专门的学问,详细介绍宇宙论不是本书做得到的.这里只准备用它的一个普遍接受的论断,即宇宙演化的大部分时间内,其中压强皆可忽略,只在早期不到百分之一的时间内必须考虑非零压强.在此前提下,宇宙动力学方程有解析解.

首先,在 $\mathscr{P}(t)=0$ 的条件下,(8.196)给出 $\mathscr{E}_0(t)a^3(t)$为常数,与时间 t 无关.

---

① D. E. Groom et al., Eur. Phys. Journ. C**15**(2000)1.

它的物理意义是，在所论的宇宙演化中，宇宙包含的总能量或总质量不随时间而变.它又可表为

$$\frac{\mathscr{E}_0(t)}{\mathscr{E}_0(t_0)} = \frac{\rho(t)}{\rho(t_0)} = \frac{a^3(t_0)}{a^3(t)}. \tag{8.230}$$

用 $a(t_0)$除(8.190)的每一项，定义

$$x(t) \equiv \frac{a(t)}{a(t_0)}, \tag{8.231}$$

用(8.224)、(8.230)、(8.227)和(8.222)得

$$\dot{x} = H_0^2\left(1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right). \tag{8.232}$$

将此式写作

$$\frac{1}{H_0}\left(1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right)^{-1/2} \mathrm{d}x = \mathrm{d}t,$$

两边积分得

$$t = \frac{1}{H_0}\int_0^{x(t)}\left(1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right)^{-1/2} \mathrm{d}x. \tag{8.233}$$

特别对 $t = t_0, x(t_0) = 1$，得现在宇宙的年龄

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^{1}\left(1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right)^{-1/2} \mathrm{d}x. \tag{8.234}$$

由(8.224)知，若 $q_0 > \frac{1}{2}$，则 $k = 1$，宇宙是封闭的.对此情形，作变换

$$x = \frac{q_0}{2q_0 - 1}(1 - \xi), \tag{8.235}$$

由此得

$$1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x} = (2q_0 - 1)\frac{1 + \xi}{1 - \xi},$$

$$\mathrm{d}x = -\frac{q_0}{2q_0 - 1}\mathrm{d}\xi,$$

$$\begin{aligned} H_0 t &= \int_0^{x(t)}\left(1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right)^{-1/2} \mathrm{d}x = \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}}\int_{\xi(t)}^{1}\left(\frac{1 - \xi}{1 + \xi}\right)^{1/2} \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}}\int_{\xi(t)}^{1} \frac{1 - \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\xi(t) - \sqrt{1 - \xi^2(t)}\right]. \end{aligned} \tag{8.236}$$

再作变换

$$\xi = \cos\theta. \tag{8.237}$$

解(8.236)可表为

$$H_0 t = \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}}[\theta(t) - \sin\theta(t)]. \tag{8.238}$$

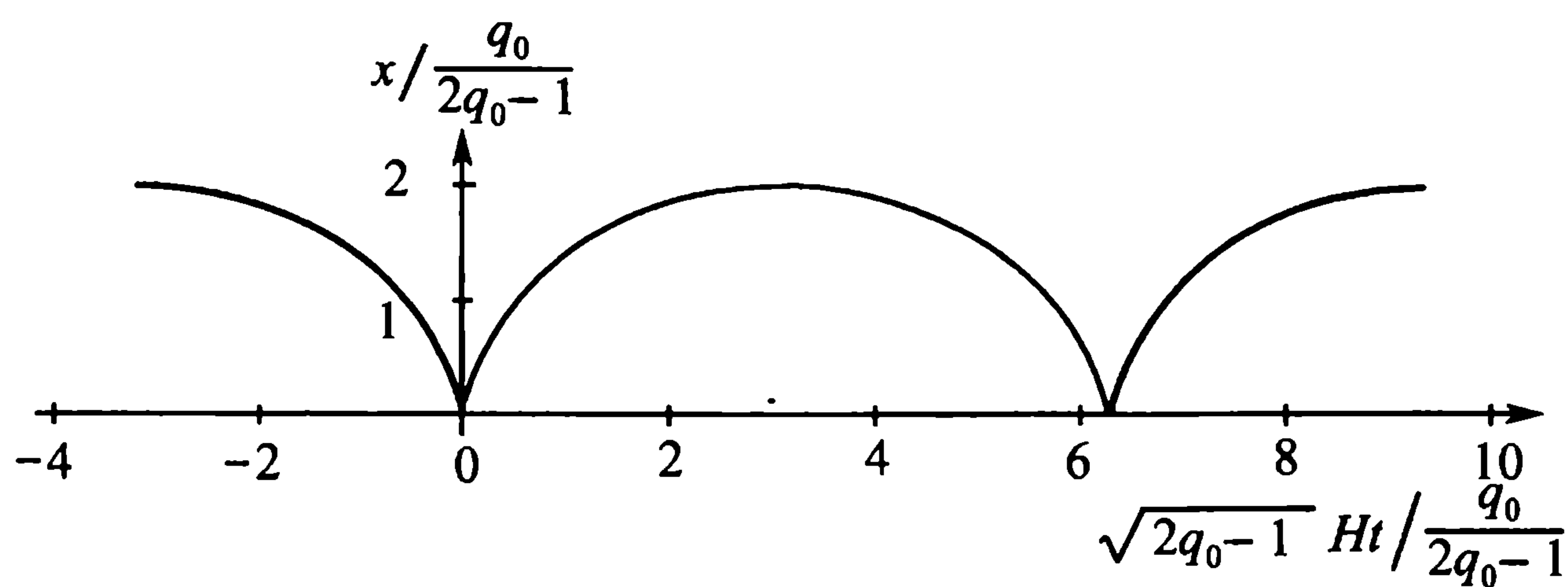


图 8-1 闭宇宙的轮回

以$\sqrt{2q_0-1}H_0 t$为横坐标，$x(t)$为纵坐标，参数方程(8.235)和(8.238)的图形为一旋轮线，轮子的半径为$\frac{q_0}{2q_0-1}$，参数为$\theta(t)$（如图 8-1）. $t=0$时，$\theta(t)=0$，$\xi(t)=1$，$x(t)=a(t)=0$. 此时的宇宙空间只是一个点. $\theta(t)$随时间增加，$\xi(t)$从1下降，由于$q_0>\frac{1}{2}$，$\frac{q_0}{2q_0-1}>0$，x沿正向增加，$a(t)$也沿正向增加. 到现时刻t_0，$x=1$，按(8.235)$\xi(t_0)=(1-q_0)/q_0$，

$$\theta(t_0) = \arccos\left(\frac{1-q_0}{q_0}\right),$$

$$\sin\theta(t_0) = \frac{\sqrt{2q_0-1}}{q_0},$$

因此按(8.238)

$$t_0 = \frac{q_0}{H_0(2q_0-1)^{3/2}}\left[\arccos\left(\frac{1-q_0}{q_0}\right) - \frac{\sqrt{2q_0-1}}{q_0}\right]. \tag{8.239}$$

若取$q_0=1$，按此种情形，现时宇宙年龄为

$$t_0 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\frac{1}{H_0} = 8\times 10^9\ 年. \tag{8.240}$$

随着时间继续流逝，θ增加到π. 称此时刻为t_m，$\theta(t_m)=\pi$，$\xi(t_m)=-1$，$x(t_m)=2q_0/(2q_0-1)$. 取$q_0=1$，则$x(t_m)=2$，宇宙空间半径增加到最大值

$$a(t_m) = 2a(t_0) = 28\times 10^9\ 光年. \tag{8.241}$$

按(8.238)

$$t_m = \frac{\pi q_0}{(2q_0-1)^{3/2}}\frac{1}{H_0}. \tag{8.242}$$

取$q_0=1$，

$$t_m = \frac{\pi}{H_0} = 44\times 10^9\ 年. \tag{8.243}$$

此后 θ 继续增加,超过 π;ξ 从 -1 回升,x 减小,宇宙空间半径 a 减小,直至 $t=2t_m$.按(8.238)和(8.242),$\theta(2t_m)=2\pi$,$\xi(2t_m)=1$,$x(2t_m)=0$.当时间增长至 $2t_m$ 时,宇宙空间重新缩成一个点.如果称 $t=0$ 时刻,一个点变成一有限的三维空间为宇宙的诞生,那么在 $t=2t_m$ 时宇宙从一有限的三维空间回归为一个点便可称为宇宙的死亡.从诞生到死亡经历的时间 $2t_m$ 便是宇宙的寿命.若取 $q_0=1$,按(8.243),宇宙寿命为 88×10^9 年.不过时间至此并不停顿.而按(8.238),随着时间的增长 $\theta(t)$ 还会增加,超过 2π.$\xi(t)$ 也会重新从 1 下降,$x(t)$ 重新取一非零正值,使 $a(t)>0$.一个有限的三维空间又从一个点中诞生出来.宇宙进入新的轮回.解(8.235)和(8.238)是周期的,表示宇宙的演化是不断的周期的轮回.可见,一个闭宇宙不仅在空间上是有限的,而且在时间上也是轮回的.

若 $q_0<\frac{1}{2}$,则 $k=-1$,宇宙是开放的.对此情形,仍可作变换(8.235),不过宜将它写为

$$x=\frac{q_0}{1-2q_0}(\xi-1). \tag{8.244}$$

随后的计算得

$$1-2q_0+\frac{2q_0}{x}=(1-2q_0)\frac{\xi+1}{\xi-1},$$

$$\mathrm{d}x=\frac{q_0}{1-2q_0}\mathrm{d}\xi,$$

$$\begin{aligned}H_0t&=\int_0^{x(t)}\left(1-2q_0+\frac{2q_0}{x}\right)^{-1/2}\mathrm{d}x=\frac{q_0}{(1-2q_0)^{3/2}}\int_1^{\xi(t)}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{1/2}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{q_0}{(1-2q_0)^{3/2}}\int_1^{\xi(t)}\frac{\xi-1}{\sqrt{\xi^2-1}}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{q_0}{(1-2q_0)^{3/2}}\left[\sqrt{\xi^2(t)-1}-\mathrm{arch}\,\xi(t)\right].\end{aligned} \tag{8.245}$$

令

$$\xi=\mathrm{ch}\,\zeta, \tag{8.246}$$

代入上式得

$$H_0t=\frac{q_0}{(1-2q_0)^{3/2}}[\mathrm{sh}\,\zeta(t)-\zeta(t)]. \tag{8.247}$$

随着 ζ 从零沿正向增长,$\mathrm{sh}\,\zeta$ 从零沿正向增长,且比 ζ 本身的增长快;因此按(8.247),t 也沿正向增长.与此同时 $\xi=\mathrm{ch}\,\zeta$ 从 1 开始沿正向增长,因此按(8.244),x 从零开始沿正向增长.增长都是单调的.可见,在此情形中,宇宙空间尺度 a 从 0 开始沿正向单调增长.宇宙只有膨胀,没有收缩.在 0 时刻,$a=0$,宇宙空间任二点间距离为零,因此整个空间也只是一点.此后它变成一无限的三维空间.t

$=0$ 即是这三维空间诞生的时刻,也就是宇宙的诞生时刻.不过,由于这空间不会收缩,也就不会再变成一点,此宇宙不会死亡.到现时刻 t_0, $x=1$,按(8.244), $\xi(t_0)=\frac{1-q_0}{q_0}$,

$$\zeta(t_0)=\operatorname{arch}\frac{1-q_0}{q_0},$$

$$\operatorname{sh}\zeta(t_0)=\frac{\sqrt{1-2q_0}}{q_0},$$

$$t_0=\frac{q_0}{H_0(1-2q_0)^{3/2}}\left[\frac{\sqrt{1-2q_0}}{q_0}-\operatorname{arch}\frac{1-q_0}{q_0}\right]. \tag{8.248}$$

若按(8.228)取 q_0,则得宇宙年龄

$$t_0=(0.86\sim 0.77)\frac{1}{H_0}=(12\sim 11)\times 10^9\text{ 年}. \tag{8.249}$$

若 $q_0=\frac{1}{2}$,则 $k=0$,宇宙也是开放的.对此情形,(8.233)成为

$$t=\frac{1}{H_0}\int_0^{x(t)}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3H_0}[x(t)]^{3/2}. \tag{8.250}$$

$t=0$ 时 $x(t)=0$, $a(0)=0$,宇宙空间也是从一点诞生出来的.随着 t 的增加, $x(t)$也不断单调增加.宇宙只膨胀,不收缩,不会回到起点,不会死亡.在现时刻 t_0, $x=1$,因此宇宙年龄为

$$t_0=\frac{2}{3H_0}=9.3\times 10^9\text{ 年}. \tag{8.251}$$

习 题 八

1. 设中心对称质量分布内部有一空腔.试证:空腔内引力场为零.将此结果与牛顿引力理论和静电场理论的相应结果比较,并作讨论.

2. 设中心对称质量及电荷分布内部有一空腔,空腔内既无质量也无电荷.试证:腔内的引力场与静电场均为零.讨论这一结果.

3. 试证:在中心对称引力场中,每一给定时刻,同方向(角坐标 θ、φ 相同)两点间测地线上每一点的角坐标 θ、φ 均相同.特别地,从对称中心到任一点的测地线,其上每一点都有固定的角坐标.这种测地线称为是沿径向的.

4. 计算施瓦氏引力场中,施瓦氏奇异面外径向测地线的长度.讨论此长度与该测地线两端径向坐标差 Δr 的关系.

5. 有一半径为 R,质量为 M 的均匀球壳, $R>\frac{2GM}{c^2}$.以球心为心,作一半径为 R'的圆.试求圆周长与圆周半径的关系.

6. 在上题所列条件下,求圆面积与其半径的关系.

7. 在第 5 题所列条件下,作一与球壳同心的球面.证求此球面面积与半径的关系.

8. 在上题所列条件下，求球面包围的体积与半径的关系.

9. 金星的轨道非常接近一以太阳为心，半径为 $1.082\times10^{11}\,\mathrm{m}$ 的圆周. 已知太阳质量为 $1.989\times10^{30}\,\mathrm{kg}$，半径为 $6.9598\times10^{8}\,\mathrm{m}$，求太阳引力对金星轨道半径的修正，即计算金星轨道的真实半径与其施瓦氏径向坐标 r 之差.

10. 一质量为 M，电荷为 q 的粒子，经典半径定义为

$$r_0 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 Mc^2}. \tag{8.252}$$

试证：在以此粒子为原点的施瓦氏径向坐标

$$r < r_0 \tag{8.253}$$

处，粒子产生的万有引力场实际是斥力场.

11. 试证：在上题所列条件下，爱因斯坦引力场方程的莱斯纳解出现奇异面的必要条件为施瓦氏半径

$$r_s > 2r_0. \tag{8.254}$$

12. 试论证：电子和质子的引力场都不会出现奇异面.

13. 试在条件(8.254)下讨论莱斯纳黑洞的性质.

14. 试证：在离源甚远，以致 $r\gg r'$ 处，推迟解(8.150)可表为

$$h_{\mu\nu}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h_{\mu\nu}(\boldsymbol{n},\omega)\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}\mathrm{d}\omega, \tag{8.255}$$

其中 $k=\dfrac{\omega}{c}$，$\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$，

$$h_{\mu\nu}(\boldsymbol{n},\omega) = \frac{4G}{c^2}\int\mathrm{d}\mathscr{V}'\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\mathscr{T}_{\mu\nu}^{(0)}(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'-\omega t')},$$

$$\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{n}. \tag{8.256}$$

15. 试讨论：为什么我们明显感到地心引力却测不到地心运动产生的引力波.

16. 在(8.171)中取 $k=-1$. 试求此种空间中圆周长与半径的关系.

17. 取度规(8.171)，对 $k=\pm1$ 两种情形求圆面积与半径的关系.

18. 取度规(8.171)，对 $k=\pm1$ 两种情形求球表面积与球半径的关系.

19. 取度规(8.171)，对 $k=\pm1$ 两种情形求球体积与球半径的关系.

20. 试证：在欧几里得三维空间中的二维球面上，任意两条测地线必相交(没有平行线).

附　　录

一、点源，δ函数与格林函数

电势 $\phi(\boldsymbol{r})$满足泊松方程(2.3)，即

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\epsilon}\rho(\boldsymbol{r}), \tag{A1.1}$$

其中 $\rho(\boldsymbol{r})$为 $\boldsymbol{r}$ 处的电荷密度，ε 为介电常数．这是未知场函数 $\phi(\boldsymbol{r})$的非齐次线性偏微分方程，非齐次项$\frac{1}{\epsilon}\rho(\boldsymbol{r})$为源函数，通常是给定的．$\phi(\boldsymbol{r})$又称为源$\frac{1}{\epsilon}\rho(\boldsymbol{r})$产生的(电势)场．由(A1.1)的线性知，若 $\phi_1(\boldsymbol{r})$是源$\frac{1}{\epsilon}\rho_1(\boldsymbol{r})$产生的场，满足方程

$$\nabla^2\phi_1(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\epsilon}\rho_1(\boldsymbol{r}),$$

$\phi_2(\boldsymbol{r})$是源$\frac{1}{\epsilon}\rho_2(\boldsymbol{r})$产生的场，满足方程

$$\nabla^2\phi_2(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\epsilon}\rho_2(\boldsymbol{r}),$$

则

$$\phi(\boldsymbol{r}) = c_1\phi_1(\boldsymbol{r}) + c_2\phi_2(\boldsymbol{r})$$

是源

$$\frac{1}{\epsilon}\rho(\boldsymbol{r}) = c_1\frac{1}{\epsilon}\rho_1(\boldsymbol{r}) + c_2\frac{1}{\epsilon}\rho_2(\boldsymbol{r})$$

产生的场，满足方程(A1.1)．这一性质提示：只要知道空间中每一点的源产生的场，将这些场叠加起来，便可得整个源产生的场．由源求场的问题可分解为求空间每一点的源产生的场的问题．一般泊松方程(A1.1)的求解便归结为点源的泊松方程的求解．用$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$表示位于 $\boldsymbol{r}'$的点源密度随位置$\boldsymbol{r}$ 的分布，源的总量为 1．用$g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$表示它产生的场．它们之间满足泊松方程

$$\nabla^2 g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{A1.2}$$

拉普拉斯算符

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{A1.3}$$

对点 $\boldsymbol{r}$ 的坐标 x、y 和 z 运算．某量的密度在某体积内的积分表示该体积内的该

量.因此,总量为1的点源密度函数 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 具有积分性质

$$\int_{\mathscr{V}}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}=\begin{cases}1, & 若\ \boldsymbol{r}'\in\mathscr{V}\\ 0, & 否则\end{cases}, \tag{A1.4}$$

表示 $\boldsymbol{r}'$ 点附近无穷小体积元内源的量为1,而在不含 $\boldsymbol{r}'$ 的任何体积内源的量为0.这就是 $\boldsymbol{r}'$ 处点源的含意.(A1.4)定义了函数 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$,如此定义的函数 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 称为三维 δ 函数.可将它分解为三个一元函数的积:

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z'), \tag{A1.5}$$

其中 x'、y' 和 z' 为 $\boldsymbol{r}'$ 点的坐标.右边三个因子显然是同一函数,只是自变量不同.它们具有相同的性质.例如

$$\int_a^b\delta(x-x')\mathrm{d}x=\begin{cases}1, & 若\ x'\in(a,b)\\ 0, & 否则\end{cases}. \tag{A1.6}$$

此式定义了函数 $\delta(x-x')$,如此定义的函数 $\delta(x-x')$ 称为 δ 函数.也可用

$$\int_a^b\delta(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}1, & 若\ 0\in(a,b)\\ 0, & 否则\end{cases}, \tag{A1.7}$$

定义 δ 函数 $\delta(x)$.(A1.6)定义的 $\delta(x-x')$ 可看作将自变量 $x-x'$ 代入 $\delta(x)$ 中的 x 得到的结果.

δ 函数和三维 δ 函数与普通函数不同,它不给出与每一自变量值相应的函数值,而由对自变量在每一区域中的积分值来定义.这样定义的函数称为广义函数.普通函数也可由每一区域中的积分值来定义,因而也是广义函数.广义函数却不一定是普通函数.

由点电荷 q 的电场表达式(1.9)和电势的定义(2.2)知,$\boldsymbol{r}'$ 处的点电荷 q 在 $\boldsymbol{r}$ 处的电势为

$$\phi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{q}{4\pi\epsilon\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|}, \tag{A1.8}$$

它应满足泊松方程

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=-\frac{q}{\epsilon}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').$$

此式提示,(A1.2)的解

$$g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|}. \tag{A1.9}$$

现在证明,此式确实符合方程(A1.2).

证 由于

$$|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}, \tag{A1.10}$$

按(A1.3)直接计算得,在 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}'$ 处

$$-\nabla^2\frac{1}{4\pi\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|}=0.$$

因此,对不含 $\boldsymbol{r}'$ 的体积 $\mathscr{V}$,积分

$$\int_{\mathscr{V}}\left[-\nabla^2\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]\mathrm{d}\mathscr{V}=0.$$

对含 $\boldsymbol{r}'$ 的体积 $\mathscr{V}'$，可在其中作一以 $\boldsymbol{r}'$ 为心，半径 a 足够小的球面. $-\nabla^2\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$在$\mathscr{V}'$内的积分可分解为两部分. 一部分为在$\mathscr{V}'$表面与球面所夹体积内的积分. 由于所夹体积内不含 $\boldsymbol{r}'$点，按前述结果，此部分积分为零. 另一部分为在球面所包围的体积内的积分，按高斯定理可化为在球面 S 上的积分. 由(A1.10)得

$$\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=-\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}. \tag{A1.11}$$

可见

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{V}'}\left[-\nabla^2\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]\mathrm{d}\mathscr{V}&=-\frac{1}{4\pi}\int_S\left(\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\&=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{1}{a^2}\mathrm{d}s=1.\end{aligned}$$

按三维 δ 函数的定义，

$$-\nabla^2\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{A1.12}$$

由(A1.9)定义的函数 $g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$符合方程(A1.2). 证毕. 总量为 1 的点源产生的场的场函数称为相应场方程的格林函数. 由(A1.9)表示的 $g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$便是泊松方程(A1.1)的格林函数.

可以将 δ 函数 $\delta(x)$想像为在 $x\neq0$ 处为 0，而在 $x\to0$ 条件下趋于无穷，以致

$$\int_a^b\delta(x)\mathrm{d}x=1,\quad 若\ 0\in(a,b).$$

如此，它与函数 $f(x)$的积将有性质

$$\int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}f(0), & 若\ 0\in(a,b)\\0, & 否则\end{cases}. \tag{A1.13}$$

此式可当作乘积

$$\Phi(x)=f(x)\delta(x)$$

的定义. 它被(A1.13)定义为一广义函数. 由(A1.13)可得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\delta(x-x')\mathrm{d}x&=\int_{a-x'}^{b-x'}f(\xi+x')\delta(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\begin{cases}f(x'), & 若\ x'\in(a,b)\\0, & 否则\end{cases},\end{aligned} \tag{A1.14}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x')\delta(x-x')\mathrm{d}x'&=-\int_{x-a}^{x-b}f(x-\xi)\delta(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{x-b}^{x-a}f(x-\xi)\delta(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\begin{cases}f(x), & 若\ x\in(a,b),\\0, & 否则.\end{cases}\end{aligned} \tag{A1.15}$$

对三维 δ 函数,此二式分别成为

$$\int_{\mathscr{V}} f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}=\begin{cases} f(\boldsymbol{r}'), & 若\ \boldsymbol{r}'\in\mathscr{V},\\ 0, & 否则,\end{cases} \tag{A1.16}$$

$$\int_{\mathscr{V}} f(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}'=\begin{cases} f(\boldsymbol{r}), & 若\ \boldsymbol{r}\in\mathscr{V},\\ 0, & 否则.\end{cases} \tag{A1.17}$$

在方程(A1.2)两边同乘以$\frac{1}{\varepsilon}\rho(\boldsymbol{r}')$,然后对 $\boldsymbol{r}'$积分,便得(A1.1),其中

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}) &= \int g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\frac{1}{\epsilon}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\mathscr{V}'\\ &= \int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon\mid\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\mid}\mathrm{d}\mathscr{V}'.\end{aligned} \tag{A1.18}$$

这便是由格林函数(A1.9)构造出来的泊松方程(A1.1)的解.它确实由各点源产生的场叠加而成.

证明两个与 δ 函数有关的公式.

1.

$$\delta(k-k')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x}\mathrm{d}x. \tag{A1.19}$$

证 对傅里叶变换

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{A1.20}$$

有逆变换

$$C(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}f(x)\mathrm{d}x. \tag{A1.21}$$

将(A1.20)表示的 $f(x)$代入此式右边的积分号下,得

$$\begin{aligned}C(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}C(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}\mathrm{d}k'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)x}\mathrm{d}x\right]C(k')\mathrm{d}k'.\end{aligned} \tag{A1.22}$$

此式对任何可傅里叶变换的函数 $C(k)$成立.特别地令

$$C(k)=\begin{cases}\Phi(k), & 若\ k\in(a,b),\\ 0, & 否则,\end{cases}$$

代入(A1.22)得

$$\int_a^b\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)x}\mathrm{d}x\right]\Phi(k')\mathrm{d}k'=\begin{cases}\Phi(k), & 若\ k\in(a,b),\\ 0, & 否则.\end{cases}$$

与(A1.14)比较知

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)x}\mathrm{d}x=\delta(k'-k).$$

交换 k'与k 即得(A1.19).证毕

(A1.19)的三维形式是

$$\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}}d\mathscr{V}, \qquad (A1.23)$$

体积分在整个空间进行.

2.

$$\frac{1}{x-i\eta}=P\frac{1}{x}+i\pi\delta(x), \qquad (A1.24)$$

其中,η 为一无穷小正数,右边两项均了解为在积分号下定义的广义函数,第一项中的 P 表示取积分主值.

证 (A1.24)左边函数在原点正上方无穷近处有一极点,此外在整个复平面上解析.在其上乘任一解析函数 $f(x)$,沿实轴从 a 到 b 积分.若(a,b)中不含 0,分母的实部不会为零,无穷小量 $i\eta$ 可以忽略,得

$$\begin{aligned}\int_{(a,b)}\frac{f(x)}{x-i\eta}dx&=\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx=P\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx\\&=\int_a^b\left[P\frac{1}{x}+i\pi\delta(x)\right]f(x)dx,\quad 若\ 0\,\overline{\in}\,(a,b).\end{aligned} \qquad (A1.25)$$

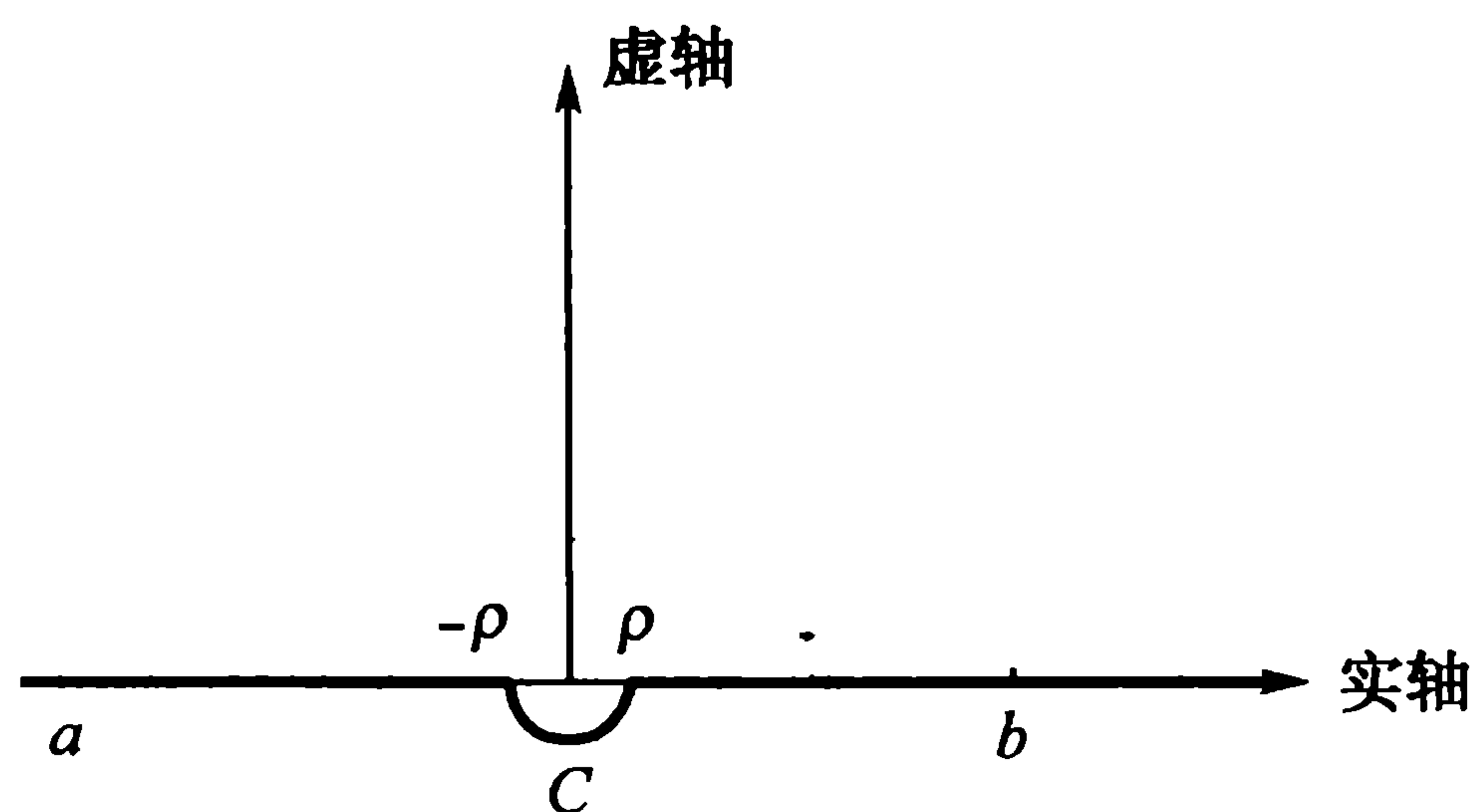


图 A-1 (A1.26)中的积分路线

若(a,b)含 0,在积分到原点附近时 $i\eta$ 不能忽略,它表示积分路线从极点下方经过.由于 η 为无穷小,可将极点移至原点,并将积分路线改为由 a 到 $-\rho$,再经一以原点为心,以 ρ 为半径,从实轴下方绕过原点的半圆 C,回到实轴上的 ρ 点,然后从 ρ 到 b(如图 A-1).ρ 为一小于$|a|$和 b 的正数.由于积分路线变化过程中不扫过被积函数的奇点,积分值不会因此改变.令 $\rho\to0$,半圆 C 上每一点都趋于原点,其上的解析函数 $f(x)\to f(0)$.再在 C 上作变换 $x=\rho e^{i\theta}$,θ 在积分中由 $-\pi$ 变到 0,得

$$\begin{aligned}\int_{(a,b)}\frac{f(x)}{x-i\eta}dx&=\lim_{\rho\to0}\left[\int_a^{-\rho}\frac{f(x)}{x}dx+f(0)\int_c\frac{1}{\rho e^{i\theta}}d(\rho e^{i\theta})+\int_\rho^b\frac{f(x)}{x}dx\right]\\&=P\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx+if(0)\int_{-\pi}^0d\theta=P\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx+i\pi f(0)\end{aligned}$$

$$= \int_a^b \left[\mathrm{P}\frac{1}{x} + \mathrm{i}\pi\delta(x) \right] f(x)\mathrm{d}x. \tag{A1.26}$$

此式和上式对所有在实轴附近解析的函数 $f(x)$ 成立.合起来便得:(A1.24)作为在积分号下定义的广义函数的关系成立.证毕.

二、勒让德多项式与球谐函数

1. 定义

$$\mathrm{P}_l(\zeta) \equiv \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\zeta^l}(\zeta^2-1)^l = \frac{1}{2^l}\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^\nu \frac{(2l-2\nu)!}{\nu!(l-\nu)!(l-2\nu)!}\zeta^{l-2\nu} \tag{A2.1}$$

为勒让德多项式,$\left[\frac{l}{2}\right]$为不大于$\frac{l}{2}$的最大整数;

$$\mathrm{P}_l^m(\zeta) \equiv (1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\zeta^m}\mathrm{P}_l(\zeta) = \frac{1}{2^l l!}(1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}\zeta^{l+m}}(\zeta^2-1)^l \tag{A2.2}$$

为连带勒让德多项式,其中 $0\leqslant m\leqslant l$ 为整数,它实际上只当 m 为偶数时才是 ζ 的多项式;

$$\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi) = \pm\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{A2.3}$$

为球谐函数,$-l\leqslant m\leqslant l$ 为整数,$m\leqslant 0$ 时根号前取正号,$m>0$ 时按 m 为偶数或奇数分别在根号前取正号或负号.按这种取法便有

$$\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta,\varphi) = (-1)^m \mathrm{Y}_{l\ -m}(\theta,\varphi). \tag{A2.4}$$

2. 微分方程

由定义(A2.1)可直接验证,勒让德多项式满足勒让德方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}(1-\zeta^2)\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_l(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta} + l(l+1)\mathrm{P}_l(\zeta) = 0. \tag{A2.5}$$

将此式对 ζ 微分 m 次,并乘以$(1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}}$,知连带勒让德多项式(A2.2)满足连带勒让德方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}(1-\zeta^2)\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_l^m(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\zeta^2}\right]\mathrm{P}_l^m(\zeta) = 0. \tag{A2.6}$$

拉普拉斯算符球坐标表示的角部分

$$\nabla_{\theta\varphi}^2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

经变换 $\zeta=\cos\theta$ 后变为

$$\nabla^2_{\theta\varphi} = \frac{\partial}{\partial\zeta}(1-\zeta^2)\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{1}{1-\zeta^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

将它作用在球谐函数(A2.3)上,利用连带勒让德方程(A2.6)得球谐函数满足的微分方程

$$\nabla^2_{\theta\varphi}\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi) + l(l+1)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi) = 0. \tag{A2.7}$$

3. 正交关系与归一化

连带勒让德多项式有正交关系

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^m(\zeta)\mathrm{P}_{l'}^m(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}. \tag{A2.8}$$

证 如 $l\neq l'$ 可设 $l'<l$ 而不失一般性. 由(A2.2),

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^m(\zeta)\mathrm{P}_{l'}^m(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{-1}^{1}F(\zeta)\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}\zeta^{l+m}}(\zeta^2-1)^l\mathrm{d}\zeta, \tag{A2.9}$$

其中

$$F(\zeta) = \frac{1}{2^{l+l'}l!\,l'!}(1-\zeta^2)^m\frac{\mathrm{d}^{l'+m}}{\mathrm{d}\zeta^{l'+m}}(\zeta^2-1)^{l'} \tag{A2.10}$$

为 $l'+m$ 次多项式. 在(A2.9)右边作 $l+m$ 次分部积分,前 m 次积出的部分由于因子$(1-\zeta^2)^m$ 而为零,后 l 次积出的部分由于因子$\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}\zeta^{l-1}}(\zeta^2-1)^l$ 而为零. 如 $l'<l$,则在作 $l'+1+m$ 次分部积分后被积函数也成为零,因而(A2.9)右边为零. 如 $l'=l$,则(A2.9)成为

$$\int_{-1}^{1}[\mathrm{P}_l^m(\zeta)]^2\mathrm{d}\zeta = (-1)^{l+m}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{l+m}F}{\mathrm{d}\zeta^{l+m}}(\zeta^2-1)^l\mathrm{d}\zeta, \tag{A2.11}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{l+m}F}{\mathrm{d}\zeta^{l+m}} &= \frac{(-1)^m}{2^{2l}(l!)^2}2l(2l-1)\cdots(2l-l-m+1)\frac{\mathrm{d}^{l+m}\zeta^{l+m}}{\mathrm{d}\zeta^{l+m}}\\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2l}(l!)^2}\frac{(2l)!(l+m)!}{(l-m)!}.\end{aligned}$$

经 l 次分部积分得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(\zeta^2-1)^l\mathrm{d}\zeta &= \int_{-1}^{1}(\zeta-1)^l(\zeta+1)^l\mathrm{d}\zeta = -\frac{l}{l+1}\int_{-1}^{1}(\zeta-1)^{l-1}(\zeta+1)^{l+1}\mathrm{d}\zeta\\ &= \cdots = (-1)^l\frac{l}{l+1}\frac{l-1}{l+2}\cdots\frac{1}{2l}\int_{-1}^{1}(\zeta+1)^{2l}\mathrm{d}\zeta\\ &= (-1)^l\frac{(l!)^2}{(2l)!}\frac{2^{2l+1}}{2l+1}.\end{aligned}$$

将此二式代入(A2.11)得

$$\int_{-1}^{1}[\mathrm{P}_l^m(\zeta)]^2\mathrm{d}\zeta=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}. \tag{A2.12}$$

可见,不论 l 与 l' 是否相等,(A2.8)恒成立.

证毕.

由(A2.8)和

$$\int_0^{2\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi})^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}m'\varphi}\mathrm{d}\varphi=2\pi\delta_{mm'} \tag{A2.13}$$

得

$$\begin{aligned}\int \mathrm{Y}_{lm}^*(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{l'm'}(\theta\varphi)\mathrm{d}\Omega &=\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta\varphi)\mathrm{Y}_{l'm'}(\theta\varphi)\\ &=\pm\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi}\frac{(l'-|m'|)!}{(l'+|m'|)!}}\\ &\quad\cdot\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^{|m|}(\zeta)\mathrm{P}_{l'}^{|m'|}(\zeta)\mathrm{d}\zeta\int_0^{2\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi})^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}m'\varphi}\mathrm{d}\varphi\\ &=\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\sqrt{\frac{2l'+1}{2}\frac{(l'-|m|)!}{(l'+|m|)!}}\\ &\quad\cdot\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^{|m|}(\zeta)\mathrm{P}_{l'}^{|m|}(\zeta)\mathrm{d}\zeta\delta_{mm'}\\ &=\delta_{ll'}\delta_{mm'},\end{aligned} \tag{A2.14}$$

其中 $\mathrm{d}\Omega\equiv\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ 为立体角元,在第二等号处作了积分变量变换 $\zeta=\cos\theta$. (A2.14)表示的是球谐函数的正交归一性.正交指两不同球谐函数,其中一个取复共轭,相乘后在 4π 立体角内的积分为零.归一指一个球谐函数的绝对值平方在 4π 立体角内积分为一.球谐函数定义(A2.3)右边的根号就是为使它归一而乘上的.这种乘以适当因子使一个函数归一的手续称为归一化,所乘因子称为归一化因子.

4. 母函数

$$G(\zeta,t)\equiv(1-2\zeta t+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\zeta)t^l, \tag{A2.15}$$

其中 $-1\leqslant\zeta\leqslant1,|t|<1$.

证 对区间[-1,1]内的任一实数 ζ, t 的二次式 $t^2-2\zeta t+1$ 的两个根 $\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}$ 都在复 t 平面内以原点为心的单位圆上. $G(\zeta,t)$ 作为 t 的复变函数在此单位圆内解析,因而可作泰勒展开

$$G(\zeta,t)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\frac{\partial^l G}{\partial t^l}\bigg|_{t=0}t^l, \tag{A2.16}$$

且按复变函数论

$$\frac{1}{l!}\frac{\partial^l G}{\partial t^l}\bigg|_{t=0}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{G(\zeta,t)}{t^{l+1}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{(1-2\zeta t+t^2)^{-\frac{1}{2}}}{t^{l+1}}\mathrm{d}t, \tag{A2.17}$$

积分沿逆时针绕原点一周的封闭回路 C 进行. 作变换

$$t = \frac{2(u - \zeta)}{u^2 - 1}, \tag{A2.18}$$

得

$$(1 - 2\zeta t + t^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1 - 2\zeta u + u^2}{u^2 - 1},$$

$$\mathrm{d}t = -2\frac{1 - 2\zeta u + u^2}{(u^2 - 1)^2}\mathrm{d}u.$$

代入(A2.17)得

$$\frac{1}{l!}\frac{\partial^l G}{\partial t^l}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C'}\frac{(u^2 - 1)^l}{2^l(u - \zeta)^{l+1}}\mathrm{d}u,$$

C'为复 u 平面上逆时针绕 ζ 一周的封闭回路. 由复变函数论知,此式即

$$\frac{1}{l!}\frac{\partial^l G}{\partial t^l}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l(u^2 - 1)^l}{\mathrm{d}u^l}\bigg|_{u=\zeta} = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\zeta^l}(\zeta^2 - 1)^l = \mathrm{P}_l(\zeta).$$

代回(A2.16)即得(A2.15). 证毕.

5. 加法定理

若 $\hat{\theta}$ 为 $\theta\varphi$ 方向与 $\theta'\varphi'$方向的夹角,则

$$\mathrm{P}_l(\cos\hat{\theta}) = \frac{4\pi}{2l + 1}\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi)\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta'\varphi'). \tag{A2.19}$$

证 在用球坐标中的方位角表示方向时,先要取定极轴. 例如在定理的陈述中谈到 $\theta\varphi$ 方向和 $\theta'\varphi'$方向时,已默认取定了一共同的极轴,这两个方向用此共同极轴规定的球坐标来表示时,方位角分别为 $\theta\varphi$ 和 $\theta'\varphi'$. 然而同一方向可用不同极轴规定的不同的球坐标方位角来表示. 例如,若固定 $\theta'\varphi'$方向,并以此方向为极轴,原来由 $\theta\varphi$ 表示的方向在新的球坐标表示中方位角就应是 $\hat{\theta}\hat{\varphi}$. 拉普拉斯算符的角部分(2.171)也可表为

$$\nabla_{\theta\varphi} = \frac{1}{\sin\hat{\theta}}\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}}\sin\hat{\theta}\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} + \frac{1}{\sin^2\hat{\theta}}\frac{\partial^2}{\partial\hat{\varphi}^2} \equiv \nabla_{\hat{\theta}\hat{\varphi}}.$$

给定 l 的任意球谐函数 $\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$和 $\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\theta},\hat{\varphi})$及其任意叠加都满足方程(A2.7). $\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi), m = -l, -l+1,\cdots,l$,或 $\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\theta},\hat{\varphi}), m = -l,-l+1,\cdots,l$ 分别组成线性独立的球谐函数系,可用来叠加出其他具有给定 l 的球谐函数. 特别地

$$\mathrm{P}_l(\cos\hat{\theta}) = \sum_{m=-l}^{l}a_m(\theta',\varphi')\mathrm{Y}_{lm}(\theta\varphi), \tag{A2.20}$$

展开系数 $a_m(\theta',\varphi')$自然与新极轴的方向 $\theta'\varphi'$有关. 将此式右边的求和指标改为 m',两边同乘以 $\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta\varphi)$后在 4π 立体角内积分. 由正交归一关系(A2.14)得

$$a_m(\theta',\varphi') = \int\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta,\varphi)\mathrm{P}_l(\cos\hat{\theta})\mathrm{d}\Omega, \tag{A2.21}$$

其中立体角元

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi = \sin\hat{\theta} d\hat{\theta} d\hat{\varphi}. \tag{A2.22}$$

另一方面,也可将 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$用 $Y_{lm'}(\hat{\theta},\hat{\varphi})$展开:

$$Y_{lm}(\theta\varphi) = \sum_{m'=-l}^{l} b_{m'm}(\theta',\varphi') Y_{lm'}(\hat{\theta},\hat{\varphi}). \tag{A2.23}$$

取复共轭后代入(A2.21)右边的积分号下,利用球谐函数的定义(A2.3)和正交归一关系(A2.14)得

$$a_m(\theta',\varphi') = b_{0m}^*(\theta',\varphi')\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}.$$

在(A2.23)中令 $\hat{\theta}=0$,在此条件下 $\theta=\theta',\varphi=\varphi'$,因而有

$$Y_{lm}(\theta',\varphi') = \sum_{m'=-l}^{l} b_{m'm}(\theta',\varphi') Y_{lm'}(0,\hat{\varphi}).$$

由(A2.2)知,若 $m\neq 0, P_l^{|m|}(1)=0$,此式简化为

$$Y_{lm}(\theta',\varphi') = b_{0m}(\theta',\varphi')\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}.$$

可见,

$$a_m(\theta',\varphi') = \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta',\varphi').$$

代入(A2.20)即得(A2.19).证毕.

三、贝塞尔函数

1. 定义

$$J_\nu(\xi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n+\nu} \tag{A3.1}$$

为贝塞尔函数或第一类贝塞尔函数;

$$N_\nu(\xi) \equiv \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(\xi) - J_{-\nu}(\xi)}{\sin(\nu\pi)} \tag{A3.2}$$

为诺伊曼函数或第二类贝塞尔函数,如 ν 为整数此式应理解为它在 ν 趋于该整数时的极限;

$$H_\nu^{(1)}(\xi) \equiv J_\nu(\xi) + iN_\nu(\xi), \tag{A3.3}$$

$$H_\nu^{(2)}(\xi) \equiv J_\nu(\xi) - iN_\nu(\xi), \tag{A3.4}$$

为汉克尔函数或第三类贝塞尔函数;对实变量 ξ,

$$I_\nu(\xi) \equiv i^{-\nu}J_\nu(i\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n+\nu} \tag{A3.5}$$

为第一类变型(或虚宗量)贝塞尔函数;同样对实变量 ξ,

$$K_\nu(\xi) \equiv \frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}[I_{-\nu}(\xi) - I_\nu(\xi)] \tag{A3.6}$$

为第二类变型贝塞尔函数，如 ν 为整数此式亦应理解为它在 ν 趋于该整数时的极限. 对实变量 ξ，$J_\nu(\xi)$、$N_\nu(\xi)$、$I_\nu(\xi)$ 和 $K_\nu(\xi)$ 显然都取实值. 由(A3.5)、(A3.2)和(A3.3)还可得

$$
\begin{aligned}
K_\nu(\xi) &= \frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}\left[i^\nu J_{-\nu}(i\xi) - i^{-\nu}J_\nu(i\xi)\right] \\
&= \frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}\left\{i^\nu\left[\cos(\nu\pi)J_\nu(i\xi) - \sin(\nu\pi)N_\nu(i\xi)\right] - i^{-\nu}J_\nu(i\xi)\right\} \\
&= \frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}i^\nu\left[\cos(\nu\pi) - e^{-i\nu\pi}\right]J_\nu(i\xi) - \frac{\pi}{2}i^\nu N_\nu(i\xi) \\
&= \frac{\pi}{2}i^{\nu+1}\left[J_\nu(i\xi) + iN_\nu(i\xi)\right] = \frac{\pi}{2}i^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(i\xi).
\end{aligned}
\tag{A3.7}
$$

2. 微方方程

由贝塞尔函数的级数表达式(A3.1)可直接验证 $J(\xi) = J_{\pm\nu}(\xi)$ 是贝塞尔方程

$$
\frac{d^2J}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dJ}{d\xi} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\xi^2}\right)J = 0 \tag{A3.8}
$$

的解. 因此，$J(\xi) = N_{\pm\nu}(\xi)$，$H_{\pm\nu}^{(1)}(\xi)$，$H_{\pm\nu}^{(2)}(\xi)$ 都是贝塞尔方程(A3.8)的解. 即三类贝塞尔函数都是贝塞尔方程的解. 由此还可断定 $I(\xi) = I_{\pm\nu}(\xi)$，$K_{\pm\nu}(\xi)$ 为变型贝塞尔方程

$$
\frac{d^2I}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dI}{d\xi} - \left(1 + \frac{\nu^2}{\xi^2}\right)I = 0 \tag{A3.9}
$$

的解. 即两类变型贝塞尔函数都是变型贝塞尔方程的解. 不过，由(A3.6)知

$$
K_{-\nu}(\xi) = K_\nu(\xi), \tag{A3.10}
$$

$K_{-\nu}(\xi)$ 就是 $K_\nu(\xi)$.

3. 递推关系

由级数表达式(A3.1)可得贝塞尔函数的递推关系

$$
\frac{d}{\xi d\xi}\left[\xi^\nu J_\nu(\xi)\right] = \xi^{\nu-1}J_{\nu-1}(\xi), \tag{A3.11}
$$

$$
\frac{d}{\xi d\xi}\left[\xi^{-\nu} J_\nu(\xi)\right] = -\xi^{-(\nu+1)}J_{\nu+1}(\xi). \tag{A3.12}
$$

由此二式及诺伊曼函数的定义(A3.2)得，诺伊曼函数有相同的递推关系

$$
\frac{d}{\xi d\xi}\left[\xi^\nu N_\nu(\xi)\right] = \xi^{\nu-1}N_{\nu-1}(\xi), \tag{A3.13}
$$

$$
\frac{d}{\xi d\xi}\left[\xi^{-\nu} N_\nu(\xi)\right] = -\xi^{-(\nu+1)}N_{\nu+1}(\xi). \tag{A3.14}
$$

这种递推关系是线性的. 作为贝塞尔函数和诺伊曼函数的线性叠加，汉克尔函数 $H_\nu^{(1)}(\xi)$ 和 $H_\nu^{(2)}(\xi)$ 必有相同的递推关系. 用 $Z_\nu(\xi)$ 表示 $J_\nu(\xi)$、$N_\nu(\xi)$、$H_\nu^{(1)}(\xi)$ 和

$H_\nu^{(2)}(\xi)$中的任意一个,皆有递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\xi\mathrm{d}\xi}[\xi^\nu Z_\nu(\xi)] = \xi^{\nu-1}Z_{\nu-1}(\xi), \tag{A3.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\xi\mathrm{d}\xi}[\xi^{-\nu}Z_\nu(\xi)] = -\xi^{-(\nu+1)}Z_{\nu+1}(\xi). \tag{A3.16}$$

由(A3.5)、(A3.6)、(A3.11)和(A3.12)得变型贝塞尔函数的递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\xi\mathrm{d}\xi}[\xi^\nu \mathrm{I}_\nu(\xi)] = \xi^{\nu-1}\mathrm{I}_{\nu-1}(\xi), \tag{A3.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\xi\mathrm{d}\xi}[\xi^{-\nu}\mathrm{I}_\nu(\xi)] = \xi^{-(\nu+1)}\mathrm{I}_{\nu+1}(\xi), \tag{A3.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\xi\mathrm{d}\xi}[\xi^\nu \mathrm{K}_\nu(\xi)] = -\xi^{\nu-1}\mathrm{K}_{\nu-1}(\xi), \tag{A3.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\xi\mathrm{d}\xi}[\xi^{-\nu}\mathrm{K}_\nu(\xi)] = -\xi^{-(\nu+1)}\mathrm{K}_{\nu+1}(\xi). \tag{A3.20}$$

特别地,在(A3.16)、(A3.18)和 (A3.20)中取 $\nu=0$,得

$$\frac{\mathrm{d}Z_0(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = -Z_1(\xi), \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_0(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \mathrm{I}_1(\xi), \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{K}_0(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = -\mathrm{K}_1(\xi). \tag{A3.21}$$

作出左边的微分,(A3.15)成为

$$\frac{\mathrm{d}Z_\nu(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{\nu}{\xi}Z_\nu(\xi) + Z_{\nu-1}(\xi), \tag{A3.22}$$

(A3.16)成为

$$\frac{\mathrm{d}Z_\nu(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\nu}{\xi}Z_\nu(\xi) - Z_{\nu+1}(\xi). \tag{A3.23}$$

两式相加,得

$$\frac{\mathrm{d}Z_\nu(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \frac{1}{2}[Z_{\nu-1}(\xi) - Z_{\nu+1}(\xi)], \tag{A3.24}$$

两式相减,得

$$\frac{2\nu}{\xi}Z_\nu(\xi) = Z_{\nu-1}(\xi) + Z_{\nu+1}(\xi). \tag{A3.25}$$

4. 母函数

$$\mathrm{e}^{\frac{\xi}{2}(t-t^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(\xi)t^n. \tag{A3.26}$$

证 由指数函数的幂级数展开

$$\mathrm{e}^{\frac{\xi}{2}t} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^k,$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{2}t^{-1}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-t)^{-l}}{l!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^l,$$

得

$$e^{\frac{\xi}{2}(t-t^{-1})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-t)^{-l}}{l!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^l.$$

由于右边两个因子幂级数对 $0<|t|<\infty$ 都是绝对收敛的，可以乘开并随意排序，记 $n=k-l=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$，得

$$e^{\frac{\xi}{2}(t-t^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \sum_{l=l_n}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{l!(n+l)!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{n+2l},$$

对 $n\geqslant 0$ 的项 $l_n=0$，对 $n<0$ 的项 $l_n=-n$. 由于

$$\Gamma(n) = \begin{cases}(n-1)!, & \text{若 } n \text{ 为自然数} \\ \infty, & \text{若 } n \text{ 为 } 0 \text{ 或负整数,}\end{cases}$$

上式即

$$\begin{aligned} e^{\frac{\xi}{2}(t-t^{-1})} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!\Gamma(n+l+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{n+2l} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_n(\xi) t^n. \end{aligned}$$

证毕.

5. 积分表达式

(A3.26)表明

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_n(\xi) &= \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dt^n} e^{\frac{\xi}{2}(t-t^{-1})}\right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{\frac{\xi}{2}(t-t^{-1})}}{t^{n+1}} dt, \end{aligned} \tag{A3.27}$$

积分回路 C 正向绕原点一周. 这便是整数阶贝塞尔函数的积分表达式. 将 C 取作以原点为心的单位圆，其上 $t=e^{i\varphi}$，(A3.27)成为

$$\mathrm{J}_n(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\xi\sin\varphi - n\varphi)} d\varphi. \tag{A3.28}$$

作变换 $\varphi \to -\varphi$，此式又可写成

$$\mathrm{J}_n(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - \xi\sin\varphi)} d\varphi. \tag{A3.29}$$

(A3.27)可推广到非整数阶贝塞尔函数. 不过，对非整数 ν，$\frac{1}{t^{\nu+1}}$对 t 绕零的变化不是单值的，积分路线 C 不能在有限远处闭合. 好在对实部大于 0 的 ξ，被积函数在 $t\to -\infty$时指数地趋于零，可令 C 在 $-\infty$处闭合. 即将 C 形变为C_1，它从 $-\infty - i0$ 处沿负实轴下缘到原点下方，正向绕到原点上方，再沿负实轴上缘到 $-\infty + i0$ 处(图 A-2)，设想它在 $-\infty$处闭合. 实际上确有积分表达式

$$\mathrm{J}_\nu(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} e^{\frac{\xi}{2}(t-t^{-1})} t^{-\nu-1} dt, \quad |\arg(\xi)| < \frac{\pi}{2}. \tag{A3.30}$$

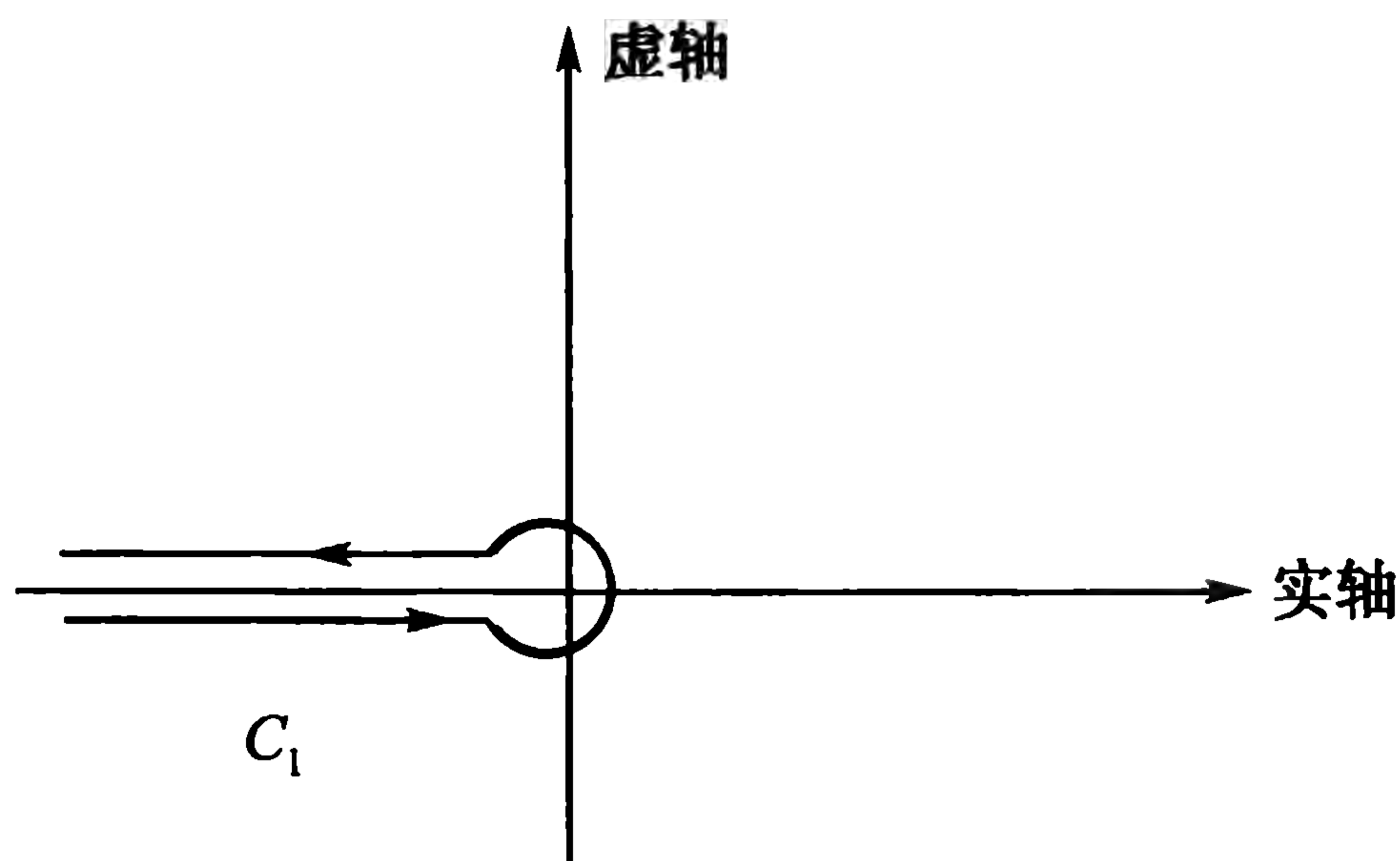


图 A-2 (A3.30)中的积分路线 C_1

证 将 Γ 函数的积分表达式

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}e^s s^{-z}ds,$$

其中 $|\arg(s)|\leqslant\pi$,代入(A3.1)得

$$\begin{aligned}J_\nu(\xi)&=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{C_1}e^s s^{-\nu-1}\frac{1}{n!}\left(-\frac{\xi^2}{4s}\right)^n ds\left(\frac{\xi}{2}\right)^\nu\\&=\left(\frac{\xi}{2}\right)^\nu\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}s^{-\nu-1}e^{s-\frac{\xi^2}{4s}}ds.\end{aligned}$$

作变换 $s=\frac{\xi t}{2}$,新变量 t 的积分路线仍形如 C_1,但方向则绕原点转了 $-\arg(\xi)$ 角. 只要 $|\arg(\xi)|<\frac{\pi}{2}$,转后的回路仍在虚轴左侧趋于无穷远. 将这一回路转回 C_1 的方位,由此扫过的任何有限区域中均无上式右侧被积函数的奇点. 由于因子 e^t,被积函数在联结旋转前后两回路末端的弧上的积分在弧趋向无穷远时又趋于零. 变换和回路的旋转均不改变上式右边积分的值,只是将它变成(A3.30). (A3.30)成立. 证毕.

在(A3.30)中再作变换 $t=e^u$,得

$$J_\nu(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}e^{\xi \operatorname{sh}u-\nu u}du, \qquad (A3.31)$$

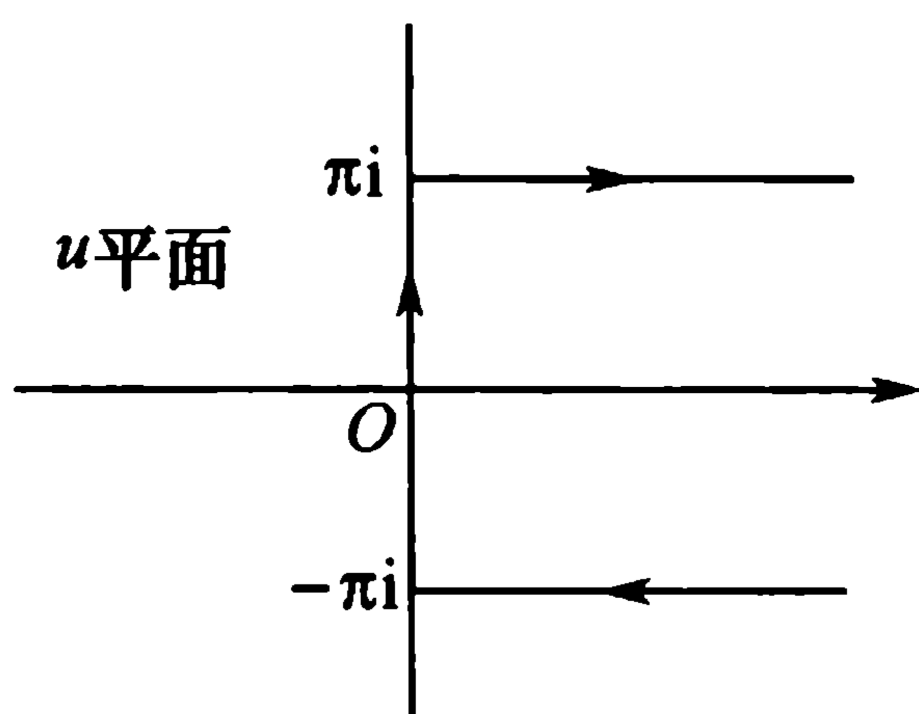


图 A-3 积分(A3.31)的积分路线 C_2

积分路线 C_2 从 $\infty-i\pi$ 处平行正实轴到 $-i\pi$,再沿虚轴到 $i\pi$,最后平行正实轴到 $\infty+i\pi$(如图 A-3).

6. $\xi\to0$ 处的渐近式

$\xi\to0$ 处,贝塞尔函数 $J_\nu(\xi)$ 的渐近式是清楚的,那就是级数(A3.1)中不为零的首项. 这也就决定了在 ν 非整数条件下,诺伊曼函数(A3.2)和汉克尔函数

(A3.3)、(A3.4)在 $\xi\to 0$ 处的渐近式.若 $\nu=n$ 为零或正整数,由于

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_{-n}(\xi) &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k-n} \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k-n} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l}}{(n+l)!\Gamma(l+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2l+n} \\
&= (-1)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(n+l+1)l!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2l+n} \\
&= (-1)^n \mathrm{J}_n(\xi),
\end{aligned} \tag{A3.32}
$$

(A3.2)右边的分子和分母均为零,由它定义的诺伊曼函数成为不定型.为求此分式在 $\nu\to n$ 条件下的极限,将它的分子和分母分别对 ν 微商,再令 $\nu\to n$.这个极限定义了整数阶诺伊曼函数

$$
\begin{aligned}
\mathrm{N}_n(\xi) &\equiv \lim_{\nu\to n} \frac{\dfrac{\partial}{\partial\nu}[\cos(\nu\pi)\mathrm{J}_\nu(\xi)-\mathrm{J}_{-\nu}(\xi)]}{\dfrac{\partial}{\partial\nu}\sin(\nu\pi)} \\
&= \frac{\cos(n\pi)\left.\dfrac{\partial \mathrm{J}_\nu}{\partial\nu}\right|_{\nu=n} - \left.\dfrac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}}{\pi\cos(n\pi)} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\partial \mathrm{J}_\nu}{\partial\nu}\right|_{\nu=n} - (-1)^n \left.\frac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}\right].
\end{aligned} \tag{A3.33}
$$

实际算出微商,得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{J}_\nu}{\partial\nu} &= \frac{\partial}{\partial\nu}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \mathrm{e}^{(2k+\nu)\ln\frac{\xi}{2}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \mathrm{e}^{(2k+\nu)\ln\frac{\xi}{2}} \ln\frac{\xi}{2} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\Gamma(\nu+k+1)}{[\Gamma(\nu+k+1)]^2}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k+\nu} \\
&= \mathrm{J}_\nu(\xi)\ln\frac{\xi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\psi(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k+\nu},
\end{aligned}
$$

其中 $\psi(z)\equiv\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ 为 Γ 函数的对数微商.同样可得

$$
\frac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}}{\partial\nu} = -\mathrm{J}_{-\nu}(\xi)\ln\frac{\xi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\psi(-\nu+k+1)}{\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k-\nu}.
$$

取极限,

$$\lim_{\nu\to n}\frac{\partial \mathrm{J}_\nu}{\partial\nu}=\mathrm{J}_n(\xi)\ln\frac{\xi}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\psi(n+k+1)}{(n+k)!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k+n},\tag{A3.34}$$

$$\lim_{\nu\to n}\frac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}}{\partial\nu}=-\mathrm{J}_{-n}(\xi)\ln\frac{\xi}{2}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\lim_{\nu\to n}\frac{\psi(-\nu+k+1)}{\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k-n}$$
$$+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\psi(-n+k+1)}{\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k-n}.\tag{A3.35}$$

利用Γ函数的性质

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

两边对 z 求微商后再除以 $\Gamma(1-z)\Gamma(z)$ 得

$$\psi(1-z)=\psi(z)+\pi\cot(\pi z),$$

以此计算(A3.35)右边第二项中的极限.取 $z=\nu-k$ 得

$$\lim_{\nu\to n}\frac{\psi(-\nu+k+1)}{\Gamma(-\nu+k+1)}=\lim_{\nu\to n}\frac{\psi(\nu-k)+\pi\cot[\pi(\nu-k)]}{\pi\{\Gamma(\nu-k)\sin[\pi(\nu-k)]\}^{-1}}$$
$$=\Gamma(n-k)\cos[\pi(n-k)]=(-1)^{n-k}(n-k-1)!.$$

(A3.35)右边的第三项则可由变换 $l=k-n$ 简化:

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\psi(-n+k+1)}{\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k-n}=(-1)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!}\frac{\psi(l+1)}{(n+l)!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2l+n}.$$

将此二式代入(A3.35),利用(A3.32),得

$$\lim_{\nu\to n}\frac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}}{\partial\nu}=(-1)^{n+1}\mathrm{J}_n(\xi)\ln\frac{\xi}{2}+(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k-n}$$
$$+(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\psi(k+1)}{(n+k)!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k+n}.\tag{A3.36}$$

将(A3.34)和(A3.36)代入(A3.33),得整数阶诺伊曼函数的表达式

$$\mathrm{N}_n(\xi)=\frac{2}{\pi}\mathrm{J}_n(\xi)\ln\frac{\xi}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k-n}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)]\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k+n},$$
$$n=0,1,2,\cdots,\tag{A3.37}$$

当 $n=0$ 时右边第二项有限和不存在.可见 $\xi=0$ 是 $\mathrm{N}_n(\xi)$ 的奇点.在此点附近

$$\mathrm{N}_0(\xi)\sim\frac{2}{\pi}\ln\frac{\xi}{2},\quad(\text{因 }\mathrm{J}_0(0)=1),\tag{A3.38}$$

$$\mathrm{N}_n(\xi)\sim-\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{-n},\quad(\text{若 }n\neq0).\tag{A3.39}$$

由定义(A3.3)和(A3.4)知,$\xi=0$ 也是零阶和正整数阶汉克尔函数的奇点.在此点附近

$$\mathrm{H}_0^{(1)}(\xi)\sim\mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln\frac{\xi}{2},\quad \mathrm{H}_0^{(2)}(\xi)\sim-\mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln\frac{\xi}{2},\tag{A3.40}$$

$$\mathrm{H}_n^{(1)}(\xi) \sim -\mathrm{i}\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{-n}, \quad \mathrm{H}_n^{(2)}(\xi) \sim \mathrm{i}\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{-n}, (若\ n \geqslant 1). \tag{A3.41}$$

7. 最陡下降法

最陡下降法是求变量取值很大处函数渐近式的有效方法.设欲求渐近式的函数有积分表达式

$$f(z) = \int_C g(t)\mathrm{e}^{zh(t)}\mathrm{d}t, \tag{A3.42}$$

其中 $g(t)$和 $h(t)$为复变量 t 在一定区域中的解析函数.积分路线 C 可在不扫过被积函数奇点的条件下变化.恒可在(A3.42)中取 z 为正实数.对一般复数 $z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$,只要重新称$|z|$为 z,称 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}h(t)$为 $h(t)$,即能使(A3.42)右边符合 z 为正实数的条件.改变积分路线,令它通过 $h'(t)$的零点 t_0,并在 t_0 附近的一段路线上保持 $h(t)$的虚部不变,

$$\mathrm{Im}[h(t)] = \mathrm{Im}[h(t_0)]. \tag{A3.43}$$

这使得在此段路线上它的贡献 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Im}[zh(t)]}$为一常数因子.$h(t)$在其解析区域的每一点有微商 $h'(t)$.设在与实轴相交为 α_s 的方向上$h(t)$实部的方向微商为 u_s,虚部的方向微商为 v_s,则

$$h'(t) = (u_s + \mathrm{i}v_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_s},$$

$|h'(t)|=\sqrt{u_s^2+v_s^2}$,$u_s$ 与 v_s 为实数.上面选择的积分路线上 $h(t)$的虚部不变,$v_s=0$,$|u_s|$取极大.可见 $\mathrm{Re}[h(t)]$的值在所选路线上的变化与在同一点沿其他方向的变化相比是最快的.所选路线因而称为最陡路线.

将 $h(t)$在 t_0 附近展开,由于 $h'(t_0)=0$,展开式为

$$h(t) = h(t_0) + \frac{h''(t_0)}{2}(t-t_0)^2 + \cdots.$$

记 $h''(t_0)\equiv a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$,设 $a>0$.按(A3.43),在最陡路线上

$$\mathrm{Im}\left[\frac{h''(t_0)}{2}(t-t_0)^2 + \cdots\right] = 0.$$

记 $t-t_0\equiv\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,此式成为

$$\mathrm{Im}\left[\frac{a}{2}\rho^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta+\theta_0)} + \cdots\right] = \frac{a}{2}\rho^2\sin(2\theta+\theta_0) + \cdots = 0.$$

可见,最陡路线通过 t_0 时的方向 θ 满足条件

$$2\theta + \theta_0 = n\pi, \quad n = 0,1,2,3,\cdots. \tag{A3.44}$$

有两条路线符合此条件.一条与 $n=0,2$ 对应,另一条与 $n=1,3$ 对应.在最陡路线上

$$h(t) - h(t_0) = \mathrm{Re}[h(t) - h(t_0)].$$

$$= \frac{a}{2}\rho^2\cos(2\theta+\theta_0)+\cdots.$$

$n=1,3$ 的那条最陡路线

$$\cos(2\theta+\theta_0)=-1,$$

在 t 离开 t_0 点时

$$h(t)-h(t_0)=\mathrm{Re}[h(t)-h(t_0)]=-\frac{a}{2}\rho^2+\cdots,$$

$\mathrm{Re}[h(t)]$从 $\mathrm{Re}[h(t_0)]$下降，称为最陡下降路线. 在(A3.42)中将 C 取为最陡下降路线，并将上列有关结果代入得

$$f(z)=\int_C g(t)\mathrm{e}^{z[h(t_0)-\frac{a}{2}\rho^2+\cdots]}\mathrm{d}(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

在 z 很大的条件下，被积函数在 $\rho=0$ 处有一陡峭的极大. 这一极大在 $z\to\infty$ 的条件下趋于无穷陡，使只有 $\rho\approx0$ 的无穷小区间对积分有贡献，在此区间中被积函数指数上删节号'…'代表的各项由于是 ρ 的高次项(三次及三次以上项)而可忽略不计. 再利用(A3.44)得 $z\to\infty$处的渐近式

$$f(z)\sim g(t_0)\mathrm{e}^{zh(t_0)}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\theta_0)/2}\int_0^{\epsilon}\mathrm{e}^{-\frac{za}{2}\rho^2}\mathrm{d}\rho+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\pi-\theta_0)/2}\int_{\epsilon}^{0}\mathrm{e}^{-\frac{za}{2}\rho^2}\mathrm{d}\rho\right\},$$

其中 2ϵ 为无穷小积分区间的长度. 作变换 $s=\sqrt{\frac{za}{2}}\rho$，在 z 足够大，以致$\sqrt{za}\epsilon\to\infty$的条件下，积得

$$f(z)\sim g(t_0)\mathrm{e}^{zh(t_0)-\mathrm{i}\frac{\theta_0}{2}}\mathrm{i}\sqrt{\frac{2\pi}{za}}. \tag{A3.45}$$

8. $\xi\to\infty$处的渐近式

对积分表达式(A3.30)用最陡下降法. 与(A3.42)比较知，此处 $g(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}t^{-\nu-1}$，$h(t)=\frac{1}{2}(t-t^{-1})$. $h'(t)=\frac{1}{2}(1+t^{-2})$，零点为 $t_0=\pm\mathrm{i}$. $h''(\pm\mathrm{i})=\mp\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\pi/2}$. 因此 $g(t_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}(\pm\mathrm{i})^{-\nu-1}$，$a=1$，$\theta_0=\mp\frac{\pi}{2}$，$h(t_0)=h(\pm\mathrm{i})=\pm\mathrm{i}$. 代入(A3.45)，将 $h'(t)$两个根的贡献加起来，得 $\xi\to\infty$处贝塞尔函数的渐近式

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_\nu(\xi)&\sim\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{i}\sqrt{\frac{2\pi}{\xi}}\{(\mathrm{i})^{-\nu-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi+\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}+(-\mathrm{i})^{-\nu-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi-\mathrm{i}(\nu+1)\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi+\mathrm{i}(\nu+1)\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\}\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\cos\left(\xi-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned} \tag{A3.46}$$

将 ν 改为 $-\nu$，此式成为

$$\mathrm{J}_{-\nu}(\xi)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\cos\left(\xi+\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

将此二式代入(A3.2)右边,得诺伊曼函数在 $\xi\to\infty$ 处的渐近式

$$\mathrm{N}_\nu(\xi)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\sin\left(\xi-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right). \tag{A3.47}$$

将(A3.46)和(A3.47)代入(A3.3)和(A3.4)右边,得 $\xi\to\infty$ 处汉克尔函数的渐近式

$$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(\xi)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\xi-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}, \tag{A3.48}$$

$$\mathrm{H}_\nu^{(2)}(\xi)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\xi-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}. \tag{A3.49}$$

作为解析函数的渐近式,这些关系可延拓到(A3.30)规定的辐角范围之外①. 由(A3.7)便可得第二类变型贝塞尔函数在 $\xi\to\infty$ 处的渐近式

$$K_\nu(\xi)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}\mathrm{e}^{-\xi}. \tag{A3.50}$$

9. $\xi\to\infty$, $\nu\to\infty$, 且 $\xi<\nu$ 处的渐近式

对实数 $\xi<\nu$,恒可由

$$\mathrm{sech}\,\eta=1/\mathrm{ch}\,\eta\equiv\xi/\nu \tag{A3.51}$$

定义正数 η. 在固定 η 的条件下,令 $\nu\to\infty$ 且 $\xi\to\infty$,求渐近式. 采用积分表达式(A3.31). 将积分变量改称 t,此式可写为

$$\mathrm{J}_\nu(\nu\,\mathrm{sech}\,\eta)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_2}\mathrm{e}^{\nu[\mathrm{sech}\,\eta\,\mathrm{sh}\,t-t]}\mathrm{d}t, \tag{A3.52}$$

它是一个变量 ν 的函数. 与(A3.42)比较,可令

$$g(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}, \tag{A3.53}$$

$$h(t)=\mathrm{sech}\,\eta\,\mathrm{sh}\,t-t. \tag{A3.54}$$

由此得

$$h'(t)=\mathrm{sech}\,\eta\,\mathrm{ch}\,t-1, \tag{A3.55}$$

$$h''(t)=\mathrm{sech}\,\eta\,\mathrm{sh}\,t. \tag{A3.56}$$

令 $h'(t_0)=0$,得 $t_0=\pm\eta+2n\pi\mathrm{i}$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$. (A3.52)的被积函数在复 t 平面的任何有限区域内都是解析的. 可在不扫过被积函数奇点的条件下改变积分路线,使它通过 $h'(t)$ 的一个根. 将这个根选为 $t_0=\eta$. 由于 η 是实数,$h(\eta)$ 也是实数,最陡路线的条件(A3.43)现在成为

$$\mathrm{Im}(\mathrm{sech}\,\eta\,\mathrm{sh}\,t-t)=0. \tag{A3.57}$$

记 $t=x+\mathrm{i}y$,实数 x 和 y 分别是 t 的实部和虚部. 代入上式,得

---

① 参阅王竹溪与郭敦仁特殊函数概论(科学出版社,1965) §7.10,或本丛书第四卷〈量子力学〉附录四(科学出版社,2002).

$$\mathrm{ch}x\sin y - y\,\mathrm{ch}\eta = 0. \qquad (A3.58)$$

此条件的一个解是 $y=0$,相应的路线是实轴. 由于 C_2 不能形变为实轴,此解不可用. (A3.58)的另一解是

$$\mathrm{ch}x = \frac{y\,\mathrm{ch}\eta}{\sin y}, \qquad (A3.59)$$

它的图形如图 A-4. 其中虚轴右边的 C_+ 可由 C_2 连续变来,且经过 $h'(t)$ 的一个根 η. 这正是所需的最陡路线. 在 $t_0=\eta$ 处, $h''(t_0)=h''(\eta)=\mathrm{th}\eta$. 与前节的定义比较知 $a=\mathrm{th}\eta, \theta_0=0, h(t_0)=\mathrm{th}\eta-\eta$. 代入(A3.45)得 $\nu\to\infty$ 处的渐近式

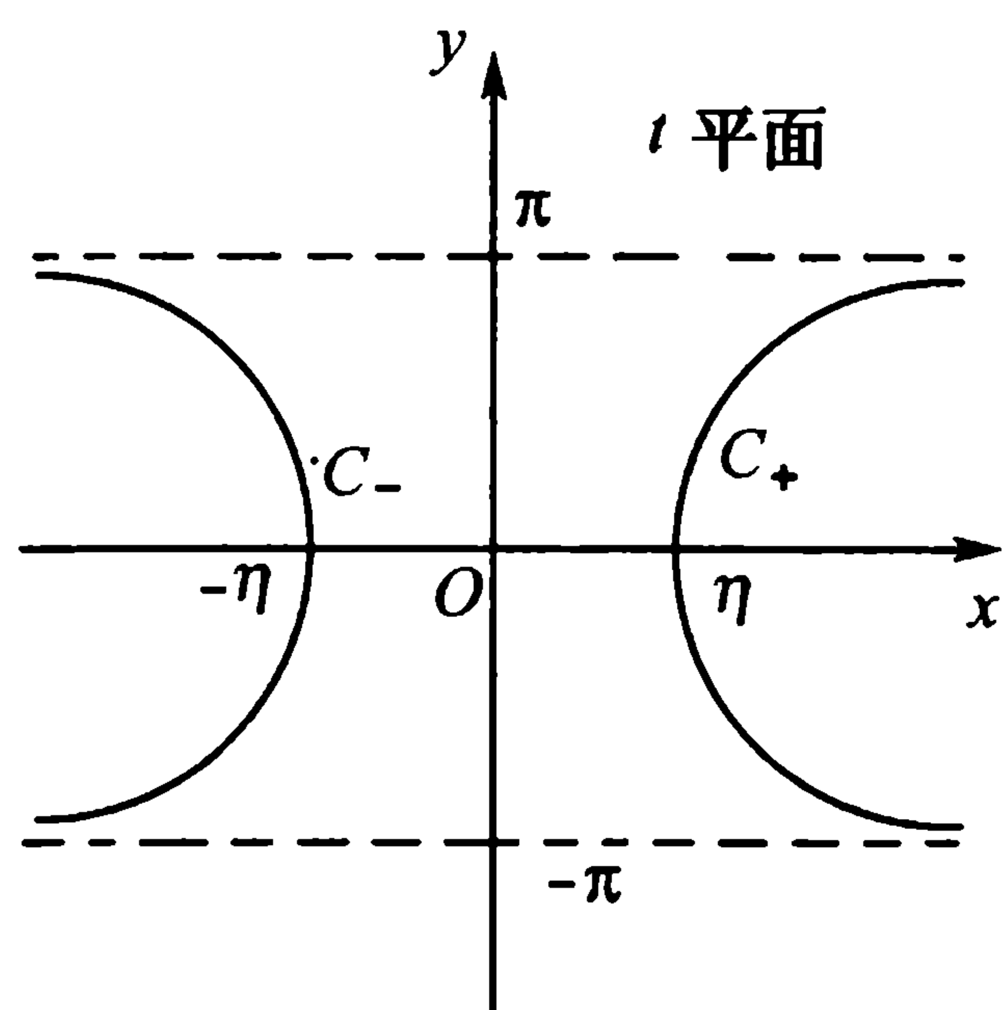


图 A-4 方程(A3.59)的图形

$$\mathrm{J}_\nu(\nu\,\mathrm{sech}\eta) \sim \frac{\mathrm{e}^{\nu(\mathrm{th}\eta-\eta)}}{\sqrt{2\nu\pi\,\mathrm{th}\eta}}. \qquad (A3.60)$$

四、傅里叶变换的两个性质

考虑函数 $\psi(x)$ 的傅里叶变换

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k. \qquad (A4.1)$$

它的逆变换为

$$C(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\psi(x)\mathrm{d}x. \qquad (A4.2)$$

通常用函数 $|\psi(x)|^2$ 表示某量随 x 的分布. 为此,取

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\mathrm{d}x = 1, \qquad (A4.3)$$

称这个分布是归一化的. 很自然地,希望用 $|C(k)|^2$ 表示该量随 k 的分布. 这只有当

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C(k)|^2\mathrm{d}k = 1 \qquad (A4.4)$$

才是合理的,在此条件下该量随 k 的分布才归一. 下面证明

性质一 设函数 $\psi(x)$ 和 $C(k)$ 按(A4.1)和(A4.2)互为傅里叶变换,则 $\psi(x)$ 的归一性(A4.3)导致 $C(k)$ 的归一性(A4.4),其逆亦真.

证 直接算得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |C(k)|^2\mathrm{d}k &= \int_{-\infty}^{\infty} C^*(k)C(k)\mathrm{d}k \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k C^*(k)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\psi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} C^*(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\psi(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\mathrm{d}x.$$

可见,若(A4.3)成立则(A4.4)也成立,若(A4.4)成立则(A4.3)也成立.证毕

定义 x 的中值为

$$\bar{x} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 x\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)x\psi(x)\mathrm{d}x, \tag{A4.5}$$

x 相对中值的均方偏差为

$$\overline{(\Delta x)^2} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2(x-\bar{x})^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)(x-\bar{x})^2\psi(x)\mathrm{d}x, \tag{A4.6}$$

k 的中值为

$$\bar{k} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |C(k)|^2 k\mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty} C^*(k)kC(k)\mathrm{d}k, \tag{A4.7}$$

k 相对中值的均方偏差为

$$\overline{(\Delta k)^2} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |C(k)|^2(k-\bar{k})^2\mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty} C^*(k)(k-\bar{k})^2C(k)\mathrm{d}k. \tag{A4.8}$$

用

$$\Delta x \equiv \sqrt{\overline{(\Delta x)^2}} \quad 和 \quad \Delta k \equiv \sqrt{\overline{(\Delta k)^2}} \tag{A4.9}$$

分别表示 x 分布的宽度和 k 分布的宽度,便有

性质二

$$\Delta x \cdot \Delta k \geqslant \frac{1}{2}. \tag{A4.10}$$

证 在(A4.6)中作自变量变换 $\xi \equiv x-\bar{x}$ 和函数变换

$$\phi(\xi) \equiv \psi(\xi+\bar{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{k}\xi-\mathrm{i}\frac{\bar{k}\bar{x}}{2}}, \tag{A4.11}$$

得

$$\overline{(\Delta x)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\xi)|^2\xi^2\mathrm{d}\xi. \tag{A4.12}$$

在(A4.8)中作自变量变换 $\eta \equiv k-\bar{k}$ 和函数变换

$$D(\eta) \equiv C(\eta+\bar{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta\bar{x}+\mathrm{i}\frac{\bar{k}\bar{x}}{2}}, \tag{A4.13}$$

得

$$\overline{(\Delta k)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} |D(\eta)|^2\eta^2\mathrm{d}\eta. \tag{A4.14}$$

变换(A4.1)和(A4.2)也分别成为

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} D(\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta\xi}\mathrm{d}\eta, \tag{A4.15}$$

$$D(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta\xi}\phi(\xi)d\xi. \tag{A4.16}$$

由(A4.14)和 (A4.16)得

$$\begin{aligned}
\overline{(\Delta k)^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\eta^2 D^*(\eta)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta\xi}\phi(\xi)d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} D^*(\eta)\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)\left(i\frac{d}{d\xi}\right)^2 e^{-i\eta\xi}d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} D^*(\eta)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta\xi}\left(-i\frac{d}{d\xi}\right)^2\phi(\xi)d\xi d\eta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(\xi)\left(-i\frac{d}{d\xi}\right)^2\phi(\xi)d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d\phi}{d\xi}\right|^2 d\xi.
\end{aligned} \tag{A4.17}$$

在第三等号处对 ξ 作了两次部分积分,在第四等号处用了(A4.15),在第五等号处再对 ξ 作了一次部分积分.部分积分中积出的部分被置零,这相当于设 $\phi(\xi)$在无穷远处足够快地趋于零.显然有

$$\left|\frac{\xi}{2\overline{(\Delta x)^2}}\phi(\xi) + \frac{d\phi}{d\xi}\right|^2 \geqslant 0. \tag{A4.18}$$

将左边乘开后移项得

$$\left|\frac{d\phi}{d\xi}\right|^2 \geqslant \frac{1}{2\overline{(\Delta x)^2}}|\phi(\xi)|^2 - \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{2\overline{(\Delta x)^2}}|\phi(\xi)|^2\right) - \frac{\xi^2}{4\overline{(\Delta x)^2}^2}|\phi(\xi)|^2.$$

代入(A4.17),利用(A4.11)、(A4.3)、(A4.12)和无穷远处 $\phi(\xi)$足够快趋于零的性质,得

$$\overline{(\Delta k)^2} \geqslant \frac{1}{4\overline{(\Delta x)^2}},$$

即

$$\overline{(\Delta x)^2}\cdot\overline{(\Delta k)^2} \geqslant \frac{1}{4}. \tag{A4.19}$$

两边都是正数,开方后用定义(A4.9),即得(A4.10).证毕.

在(A4.1)和(A4.2)中作替换 $x\rightarrow\omega, k\rightarrow t$,得

$$\psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} C(t)e^{i\omega t}dt, \tag{A4.20}$$

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega. \tag{A4.21}$$

它们可以用来表示某量的频率分布和时间分布.对这种分布,(A4.10)成为

$$\Delta t\cdot\Delta\omega \geqslant \frac{1}{2}. \tag{A4.22}$$

序

自然界有两种场可用经典理论描述，那就是电磁场与引力场．本书介绍这两种场的经典理论，其他场也有经典理论，但一开始便是为量子化建立的，它们应在量子场论中介绍．

电磁场的经典理论建立于19世纪末，是最成功的物理理论之一，称为经典电动力学，简称电动力学．它的最重要的预言是存在电磁波．这一预言的证实从根本上改变了人类生活．可以毫不夸张地说，离开电磁波便没有现代文明．电动力学的早期应用是无线电通讯和电磁器件、仪器、设备的制造．随后，伴随受控热核反应的研究发展了等离子体电动力学和磁流体力学．伴随加速器的研究发展了同步辐射理论．按这一理论发展的同步辐射装置是最重要的强光源之一．大约30年前还发明了自由电子激光，这是电动力学的直接成果．由于它的极端重要性，近百年来，电动力学一直是世界各大学本科物理专业的必修课．它也是本书的主要内容．

引力场的经典理论建立于20世纪初，这便是广义相对论引力论，是一种几何动力学．它很美，然而由于它描述的实际引力场与牛顿万有引力定律差别很小，只在天体物理和宇宙学中显露出来，加之又被认为是一门艰深的理论，广义相对论引力论至今未列入本科必修课程．另一方面，从知识完整的角度看，一个研究物质世界规律的物理学工作者，对引力理论完全不了解不能不说是一种缺陷．况且，经过几十年的发展，引力理论已有了许多应用．这些应用虽与日常生活无关，却关系到宇宙的命运，因而不能不为普通人所关注．目前黑洞、大爆炸宇宙模型等已成巷议，而且有的说得很玄．物理学工作者有义务将实情告诉世人，以正视听．为此，将引力论加入本科必修课似属难免．再说，广义相对论引力论也不像传闻那样艰深，在本科讲授是办得到的．本书将它作为第二部分内容．

本书坚持讲清楚原则．例如，无散矢量场必可表为一矢量场的旋度．这一命题几乎所有电动力学教材都用到，却鲜有证明．这不仅会在学生的知识结构中留下缺陷，且不利于培养学生一丝不苟的严谨作风．本书作了证明，而且不难．即使要用较深的数学也不回避．冷静的分析表明，学生学习电动力学的时候已有了足够的数学基础．未学过而又必须的数学内容离此基础只有一步之遥．对此，本书采取积极的态度，带领读者跨出这一步，补上必要的数学内容．有的（例如广

义相对论用的张量分析和黎曼几何）在正文中讲，有的则列入附录．

本书注意电动力学理论体系的现代化，一开始就突出它的相对论性和规范不变性；采用分析形式，即拉格朗日形式和哈密顿形式．分析形式不仅有利于认识的深入，而且为后续的量子理论和统计理论所必需．电与磁的对偶是几百年来人们对电磁认识的一个主题．近几十年关于磁单极的探讨更突出了这一主题．由于并未发现磁单极，本书没有讲解磁单极理论．但在第三章讲静磁学时，特意将理论表达到这样的程度：除了没有磁单极外，电和磁是完全对偶的．

在写理论物理丛书的每一卷时，都不会忘记写这一套丛书的初衷．那就是要强调，理论物理是一个整体，它的各分支有深刻的内在联系．本书的许多地方都可以看到这种联系的踪迹．例如，经典力学中讲了质点运动轨迹的最小作用量原理与光线的费马原理的相似，这种相似在认识量子力学的过程中起了重要作用．本书§5.5由波动光学，即电磁波的传播规律，导出了几何光学的程函形式和费马原理，与经典力学和量子力学相衔接．§6.3中表示讯号时间分布与频谱关系的（6.45）式，在量子化后就是量子力学中的能量时间测不准关系．§5.2讲述的全反射中的透射现象类似量子力学中的势垒穿透．§5.7关于共振腔中驻波本征模式和本征频率的讨论类似量子力学中力学量的本征值问题．所有这些相似，这些联系，集中表现为波动规律的共性，粒子规律的共性，和普遍的波动性与粒子性的内在联系．更不用说它们用的是同一套数学工具了．这些相似，这些联系，又是自然而然的，毋需雕琢．在讲述中没有任何刻意追求，一切顺其自然，留给读者体味．当然，如果用本书作教材，教师可在适当处点化一下．

应当承认，本书的写作是仓促的．许多地方来不及推敲．真心诚意地请各位读者和老师指正．

张启仁

2002年5月6日

于北京大学承泽园

目　　录

第一篇　电磁场论与电动力学

第二篇 引力场论与几何动力学